

文章编号: 1000-5862(2018)05-0518-09

具有双时滞的企业竞争模型的稳定性分析

徐 飞, 李庶民*

(昆明理工大学理学院数学系, 云南 昆明 650500)

摘要: 以一类 3 维金融企业竞争模型为研究对象, 研究时滞反馈作用下企业竞争的稳定性. 首先, 运用 Hopf 分支理论与稳定性得到系统正平衡点的特性; 其次, 取时滞 τ_1 和 τ_2 作为分支参数, 得到当经过分支点时, 系统正平衡点的稳定性发生改变, 继而引起混沌现象的消失, 且可以分支出周期轨, 也可以利用 Hassard 方法与中心流形定理, 得到周期解的分支方向与稳定性的判定公式; 最后, 利用 Matlab 数值模拟了时滞受控系统动力学行为随参数的演变, 从而验证解析结果的有效性.

关键词: 企业竞争模型; Hopf 分支; 稳定性; 时滞微分方程

中图分类号: O 175.1 **文献标志码:** A **DOI:** 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2018.05.15

0 引言

动力系统分支理论作为一种解决现代科技中所出现的一些疑难问题的重要工具, 它已经广泛应用于力学、物理学、生态学、经济学、数值计算、工程技术等领域中, 其稳定性和分支现象是微分方程的研究主题^[1-4]. 人们已经认识到时滞不但会引起系统稳定性的改变, 而且还会使系统产生振荡或产生周期解^[5-8].

正如在经济学中, 企业之间的相互竞争随着经济不断的发展也变得越来越激烈, 许多学者运用生态学理论来研究企业竞争活动之间的规律. 最初是由 J. Freeman 等^[9]在综合了相关组织生态学论述的基础上提出了完整的组织生态学概念和研究框架, 同时建立了数学模型来衡量整个企业中个体的发展、变迁和演替. 接着由 J. F. Moore^[10]提出的企业生态系统演化理论可以得出: 随着环境变化的日益加剧, 现如今世界经济正趋于一个互相融合、共同发展的方向, 作为一个精明的企业家要想企业发展得好, 就必须创新, 要从自身企业的角度出发, 制定出适合自身企业的发展规划.

在投资市场的竞争中, 投资项目和投资企业之间的关系类似于捕食模型中捕食者与食饵之间的关系. 与此同时, 投资企业之间也存在着内部竞争, 而这种内部竞争又类似于捕食模型中 2 种捕食者之间

的关系. 正是由于这种相似性才为对企业投资行为的深入分析提供了新的方法和思路.

刘凯^[11]提出了捕食者具有年龄结构的捕食模型^[12-13], 得到投资企业与投资项目之间的“捕食”模型:

$$\begin{cases} dx/dt = (a - \mu x)x - dx(z + y), \\ dy/dt = cx(t - \tau)(z + y) - my - ey, \\ dz/dt = my - bz, \end{cases} \quad (1)$$

其中 x, y, z 分别表示投资项目、中小型投资公司、大型投资公司在 t 时刻的单位面积内的个体数; 一个地区的投资项目数, 在拥有 ax 的自然扩张力之外, 同时受到 x 的增长对其的反馈影响(即 $-\mu x^2$), 从长远来看该函数应满足 S 型曲线, 用 P. F. Verhulst 提出的 Logistic 方程 $(a - \mu x)x$ 表示投资项目随时间 t 变化的改变量, 这里 a 表示投资项目的自然增长速度, μ 表示投资项目受已有项目数的抑制系数; b 表示大型投资公司退出市场的系数; c 表示中小型投资公司随投资项目变化的增长率; d 表示投资项目被投资公司所“捕食”的作用系数; $x(t - \tau)$ 表示某一地区投资项目经过时间 τ 积累的数目; e 表示中小型投资公司退出该行业的系数; m 表示中小型投资公司转化成大型投资公司的比例系数; $m + e$ 表示中小型投资公司总的减少比例.

对于系统(1), 文献[11]虽然分析了平衡点的局部稳定性、全局稳定性和持久性, 也对其进行了数值模拟, 但是它没有考虑到市场外界的客观因素对

收稿日期: 2018-03-20

基金项目: 国家自然科学基金(11561034)资助项目.

通信作者: 李庶民(1965-) 男, 云南楚雄人, 副教授, 主要从事非线性动力系统及其应用研究. E-mail: Leesm007@163.com

投资项目的干扰以及时间延迟对大型投资公司退出市场的时机是否成熟的影响,因此在一定意义上并不能更好地推动企业发展.

本文注意到了以上的局限性,在(1)式的基础上增加了宏观调控因素,即对投资项目的增长速度以及大型投资公司退出市场的时机是否成熟分别添加了控制因素 τ_1 和 τ_2 , τ_1 和 τ_2 分别表示投资项目的增长时滞和大型投资公司退出市场时机的成熟时滞.在尊重市场调节的前提下对经济运行状态和经济关系进行调节和干预,得到了含有双时滞的企业竞争模型:

$$\begin{cases} dx/dt = (a - \mu x)x - dx(z + y), \\ dy/dt = cx(t - \tau_1)(z + y) - my - ey, \\ dz/dt = my - bz(t - \tau_2). \end{cases} \quad (2)$$

1 平衡点的稳定性及局部 Hopf 分支的存在性

对于系统(2)求得系统的平衡点为 $E_* = (x_*, y_*, z_*)$,其中

$$\begin{aligned} x_* &= b(m + e) / [c(m + b)], \\ y_* &= b(acm + abc - bm\mu - be\mu) / [cd(b + m)^2], \\ z_* &= m(acm + abc - bm\mu - be\mu) / [cd(b + m)^2]. \end{aligned}$$

设 $\bar{x} = x - x_*$, $\bar{y} = y - y_*$, $\bar{z} = z - z_*$,则得到

$$\begin{cases} d\bar{x}/dt = (a - \mu\bar{x} - 2\mu x_*)\bar{x} - d\bar{x}\bar{z} - d\bar{x}_* \bar{z} - d\bar{x}z_* - d\bar{x}\bar{y} - d\bar{x}_* \bar{y} - d\bar{x}y_* , \\ d\bar{y}/dt = c\bar{z}\bar{x}(t - \tau_1) + cz_*\bar{x}(t - \tau_1) + c\bar{y}\bar{x}(t - \tau_1) + cy_*\bar{x}(t - \tau_1) + cx_*\bar{z} + cx_*\bar{y} - m\bar{y} - e\bar{y}, \\ d\bar{z}/dt = m\bar{y} - b\bar{z}(t - \tau_2). \end{cases}$$

仍用 x, y, z 表示,则对应的线性系统为

$$\begin{cases} dx/dt = (a - 2\mu x_* - dy_* - dz_*)x(t) - dx_*y(t) - dx_*z(t), \\ dy/dt = c(y_* + z_*)x(t - \tau_1) + (cx_* - m - e)y(t) + cx_*z(t), \\ dz/dt = my(t) - bz(t - \tau_2). \end{cases} \quad (3)$$

令 $\alpha_1 = a - 2\mu x_* - dy_* - dz_*$, $\alpha_2 = \alpha_3 = -dx_*$, $\alpha_4 = c(y_* + z_*)$, $\alpha_5 = cx_* - m - e$, $\alpha_6 = cx_*$, $\alpha_7 = m$, $\alpha_8 = -b$,则系统(3)变为

$$\begin{cases} dx/dt = \alpha_1 x(t) + \alpha_2 y(t) + \alpha_3 z(t), \\ dy/dt = \alpha_4 x(t - \tau_1) + \alpha_5 y(t) + \alpha_6 z(t), \\ dz/dt = \alpha_7 y(t) + \alpha_8 z(t - \tau_2). \end{cases}$$

对应的特征方程为

$$\lambda^3 - (A\lambda^2 + B)e^{-\lambda\tau_2} - (C\lambda + D)e^{-\lambda\tau_1} + Ee^{-\lambda(\tau_1+\tau_2)} - F\lambda^2 + G\lambda + H = 0, \quad (4)$$

其中 $A = \alpha_8$, $B = \alpha_1\alpha_5\alpha_8 - \alpha_1\alpha_8 - \alpha_5\alpha_8$, $C = \alpha_2\alpha_4$, $D = \alpha_3\alpha_4\alpha_7$, $E = \alpha_2\alpha_4\alpha_8$, $F = \alpha_1 + \alpha_5$, $G = \alpha_1\alpha_5 - \alpha_6\alpha_7$, $H = \alpha_1\alpha_6\alpha_7$.

情况1 当 $\tau_1 = \tau_2 = 0$ 时,方程(4)变为

$$\lambda^3 - (A + F)\lambda^2 + (G - C)\lambda + E + H - B - D = 0.$$

由 Hurwitz 判据知,若满足

$$H_1 = -(A + F) > 0,$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} -A - F & U \\ 1 & G - C \end{vmatrix} > 0,$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} -A - F & U & 0 \\ 1 & G - C & 0 \\ 0 & -A - F & U \end{vmatrix} > 0,$$

其中 $U = E + H - B - D$,则所有的根具有负实部.

定理1 当 $\tau_1 = \tau_2 = 0$ 时,平衡点 (x_*, y_*, z_*) 是渐近稳定的.

情况2 考虑 $\tau_1 = 0$, $\tau_2 > 0$.

定理2 若 $\tau_1 = 0$,当 $0 < \tau_2 < \tau_{20}$ 时,则平衡点 (x_*, y_*, z_*) 是渐近稳定的.然而,当 $\tau_2 = \tau_{20}$ 时,系统(3)出现 Hopf 分支,其中

$$\tau_{20} = (\arccos[F\omega_{20}^2 / (B - E - A\omega_{20}^2)]) / \omega_{20}.$$

证 当 $\tau_1 = 0$ 时,特征方程(4)变为

$$\lambda^3 - (A\lambda^2 + b - E)e^{-\lambda\tau_2} - F\lambda^2 + (G - C)\lambda + H - D = 0. \quad (5)$$

设 $\pm i\omega$ ($\omega > 0$) 是方程(5)的一对纯虚根,则可以得到

$$\begin{aligned} (A\omega^2 + E - B)\cos\omega\tau_2 &= -F\omega^2, \\ (A\omega^2 + E - B)\sin\omega\tau_2 &= -\omega^3 + (G - C)\omega. \end{aligned} \quad (6)$$

两边同时平方并相加得

$$-\omega^6 + [A^2 - F^2 + 2(G - C)]\omega^4 + [2A(E - B) - (G - C)^2]\omega^2 + (E - B)^2 = 0. \quad (7)$$

设 $u = \omega^2$,令 $p = -A^2 + F^2 - 2(G - C)$, $q = -2A(E - B) + (G - C)^2$, $r = -(E - B)^2$,则(7)式变为

$$u^3 + pu^2 + qu + r = 0. \quad (8)$$

引理1 若 $r < 0$,则(8)式至少有1个正根;若 $r \geq 0$, $f(u) = u^3 + pu^2 + qu + r$,则(8)式至少有1个正根当且仅当 $u_* > 0$ 使得 $f(u_*) = 0$ 且 $f'(u_*) \geq 0$.

容易得(6)式有唯一正根 ω_{20}^2 ,则对应的临界值 τ_{2n} 是

$$\tau_{2n} = \frac{1}{\omega_{20}} \arccos \frac{F\omega_{20}^2}{B - E - A\omega_{20}^2} + \frac{2n\pi}{\omega_{20}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

令 $\lambda(\tau_{2n}) = \pm i\omega_{20}$ 是方程 (5) 的根, 则可得横截性条件为

$$(d\lambda/d\tau_2)^{-1} = (3\lambda^2 - 2F\lambda + G - C)e^{\lambda\tau_2} / [\lambda(A\lambda^2 + B - E)] - 2A / (A\lambda^2 + B - E) + \tau_2 / \lambda.$$

$$\begin{aligned} & \text{由 } \text{Sign}\{ \text{Re}(d\lambda(\tau_2)/d\tau_2) \}_{\tau_2=\tau_{2n}}^{-1} = \\ & \text{Sign}\{ (\text{Re}(3\lambda^2 - 2F\lambda + G - C)e^{\lambda\tau_2} / [\lambda(A\lambda^2 + B - E)])_{\tau_2=\tau_{2n}} - (\text{Re}(2A / (A\lambda^2 + B - E))_{\tau_2=\tau_{2n}}) \} = \\ & [-3\omega^4 + (4a_4 - 2a_3^2 + 2a_1^2)\omega^2 - (a_4^2 + 2a_1a_2)] / (a_1\omega^2 - a_2)^2, \\ & \text{其中 } a_1 = A, a_2 = B - E, a_3 = F, a_4 = G - C, a_5 = H - D. \end{aligned}$$

情况 3 考虑 $\tau_2 = 0, \pi_1 > 0$.

定理 3 若 $\tau_2 = 0$ 成立, 当 $0 < \tau_1 < \tau_{10}$ 时, 则平衡点 (x^*, y^*, z^*) 是渐近稳定的. 然而, 当 $\tau_1 = \tau_{10}$ 时, 系统出现 Hopf 分支. 其中

$$\tau_{10} = \frac{1}{\omega_{10}} \arccos [C\omega_{10}^2(-\omega_{10}^2 + G) + (D - E) \cdot ((A + F)\omega_{10}^2 + H - B)] / [C^2\omega_{10}^2 + (D - E)^2] + 2j\pi.$$

证 此定理的证明类似于定理 2.

情况 4 考虑 τ_2 是 $(0, \pi_{20})$ 中的一个固定值, 并且 $\tau_1 > 0$.

定理 4 对于系统 (2), $\pi_1 > 0, \pi_2 \in (0, \pi_{20})$, $\tau_1 \neq \tau_2$, 假设 $H_1 > 0, H_2 > 0$, 当 $\tau_1 \in (0, \pi_{10})$ 时, 平衡点 (x^*, y^*, z^*) 是渐近稳定的, 然而, 当 $\tau_1 = \tau_{10}$ 时, 系统出现 Hopf 分支.

证 已知 τ_2 是固定的, 把 τ_1 作为参数, 设 $i\omega (\omega > 0)$ 是方程 (4) 的根, 分离实部虚部可得

$$\begin{cases} F\omega^2 + (A\omega^2 - B)\cos\omega\tau_2 + H = C\omega\sin\omega\tau_1 + D\cos\omega\tau_1 - E\cos\omega(\tau_1 + \tau_2), \\ \omega^3 + (A\omega^2 - B)\sin\omega\tau_2 - G\omega = -C\omega\cos\omega\tau_1 + D\sin\omega\tau_1 - E\sin\omega(\tau_1 + \tau_2). \end{cases}$$

进而化简成

$$\begin{cases} E_{11}\sin\omega\tau_1 + E_{12}\cos\omega\tau_1 = E_{13}, \\ E_{11}\cos\omega\tau_1 - E_{12}\sin\omega\tau_1 = E_{14}, \end{cases} \quad (9)$$

其中 $E_{11} = C\omega + E\sin\omega\tau_2, E_{12} = D - E\cos\omega\tau_2, E_{13} = F\omega^2 + H + (A\omega^2 - B)\cos\omega\tau_2, E_{14} = -\omega^3 + G\omega - (A\omega^2 - B)\sin\omega\tau_2$.

由 (9) 式得

$$\begin{aligned} & \omega^6 + e_1\omega^4 + e_2\omega^2 + e_3 + (e_4\omega^4 + e_5\omega^2 + e_6) \cdot \\ & \cos\omega\tau_2 + (e_7\omega^5 + e_8\omega^3 + e_9\omega)\sin\omega\tau_2 = 0, \quad (10) \\ & \text{其中 } e_1 = A^2 + F^2 - 2G, e_2 = 2FH - 2AB + G^2 - C^2, \\ & e_3 = B^2 + H^2 - D^2 - E^2, e_4 = 2AF, e_5 = 2(AH - BF), \end{aligned}$$

$$e_6 = -2BH + 2DE, e_7 = 2A, e_8 = -2(B + AG), e_9 = 2(BG - CE).$$

设 $H_1 > 0$, (10) 式的根表示为 $\omega_1^{(1)}, \omega_1^{(2)}, \omega_1^{(3)}, \omega_1^{(4)}$, 每个 $\omega_i^{(j)} (i = 1, 2, 3, 4)$ 对应的临界值 $\tau_{1i}^{(j)}$ 为 $\tau_{1i}^{(j)} = \frac{1}{\omega_1} \arccos [(E_{12}E_{13} + E_{11}E_{14}) / (E_{11}^2 + E_{12}^2) + 2j\pi]_{\omega_1=\omega_1^{(j)}}, j = 1, 2, 3, 4; j = 0, 1, 2, \dots$.

设 $\tau_{10} = \min\{\tau_{1i}^{(j)} | i = 1, 2, 3, 4; j = 0, 1, 2, \dots\}$, ω_{10} 是 (10) 式在 $\tau_1 = \tau_{10}$ 下的根, 令 $\lambda = i\omega_{10}$ 是方程 (4) 的根得

$$\begin{aligned} & (d\lambda/d\tau_1)^{-1} = [3\lambda^2 - 2A\lambda e^{-\lambda\tau_2} + (A\lambda^2 + B)\tau_2 e^{-\lambda\tau_2} - Ce^{-\lambda\tau_1} + (C\lambda + D)\tau_1 e^{-\lambda\tau_1} - (\tau_1 + \tau_2)Ee^{-\lambda(\tau_1+\tau_2)}] / [\lambda Ee^{-\lambda(\tau_1+\tau_2)} - \lambda(C\lambda + D)e^{-\lambda\tau_1}] = \\ & (P' + iQ') / (M' + iN'), \end{aligned}$$

$$\text{Re}(d\lambda/d\tau_1)^{-1}_{\lambda=i\omega_{10}} = \text{Re}((P' + iQ') / (M' + iN')) = (P'M' + Q'N') / (M'^2 + N'^2),$$

其中

$$P' = -3\omega^2 - 2A\omega\sin\omega\tau_2 - A\omega^2\tau_2\cos\omega\tau_2 + B\tau_2\cos\omega\tau_2 - C\cos\omega\tau_1 + C\omega\tau_1\sin\omega\tau_1 + D\tau_1\cos\omega\tau_1 - (\tau_1 + \tau_2)E\cos\omega(\tau_1 + \tau_2),$$

$$Q' = -2A\omega\cos\omega\tau_2 + A\omega^2\tau_2\sin\omega\tau_2 - B\tau_2\sin\omega\tau_2 + C\sin\omega\tau_1 + C\omega\tau_1\cos\omega\tau_1 - D\tau_1\sin\omega\tau_1 + (\tau_1 + \tau_2)E\sin(\tau_1 + \tau_2),$$

$$M' = \omega E\sin\omega(\tau_1 + \tau_2) + C\omega^2\cos\omega\tau_1 - D\omega\sin\omega\tau_1,$$

$$N' = \omega E\cos\omega(\tau_1 + \tau_2) - C\omega^2\sin\omega\tau_1 - D\omega\cos\omega\tau_1.$$

横截性条件在如下条件下成立:

$$(P_1) \quad P'M' + Q'N' \neq 0.$$

情况 5 考虑 τ_1 是 $(0, \pi_{10})$ 中的一个固定值, 并且 $\tau_2 > 0$, 在 τ_1 是固定值, π_2 是参数的情况下考虑方程 (4), 类似于情况 4, 得到定理 5.

定理 5 对于系统 (2), $\pi_2 > 0, \pi_1 \in (0, \pi_{10})$, $\tau_1 \neq \tau_2$, 假设 $H_1 > 0, H_2 > 0$, 当 $\tau_2 \in (0, \pi_{20})$ 时, 平衡点 (x^*, y^*, z^*) 是渐近稳定的, 然而, 当 $\tau_2 = \tau_{20}$ 时, 系统出现 Hopf 分支.

证 已知 τ_1 是固定的, 把 τ_2 作为参数, 设 $i\omega (\omega > 0)$ 是方程 (4) 的根, 分离实部虚部可得

$$\begin{cases} F\omega^2 + (A\omega^2 - B)\cos\omega\tau_2 + H = D\cos\omega\tau_1 + C\omega\sin\omega\tau_1 - E\cos\omega(\tau_1 + \tau_2), \\ \omega^3 + (A\omega^2 - B)\sin\omega\tau_2 - G\omega = D\sin\omega\tau_1 - C\omega\cos\omega\tau_1 - E\sin\omega(\tau_1 + \tau_2). \end{cases}$$

进而化简成

$$\begin{cases} E_{23} = E_{21}\sin\omega\tau_2 + E_{22}\cos\omega\tau_2, \\ E_{24} = E_{21}\cos\omega\tau_2 - E_{22}\sin\omega\tau_2, \end{cases} \quad (11)$$

其中

$$\begin{aligned} E_{21} &= E \sin \omega \tau_1, E_{22} = A \omega^2 - B - E \cos \omega \tau_1, \\ E_{23} &= -F \omega^2 - H + C \omega \sin \omega \tau_1 + D \cos \omega \tau_1, \\ E_{24} &= \omega^3 - G \omega + C \omega \cos \omega \tau_1 - D \sin \omega \tau_1. \end{aligned}$$

由(11)式得

$$\omega^6 + e_1' \omega^4 + e_2' \omega^2 + e_3' + (e_4' \omega^4 + e_5' \omega^2 + e_6') \cos \omega \tau_1 + (e_7' \omega^3 + e_8' \omega) \sin \omega \tau_1 = 0. \quad (12)$$

其中 $e_1' = -A^2 + F^2 - 2G$, $e_2' = 2FH + 2AB + G^2 + C^2$, $e_3' = -B^2 + H^2 + D^2 - E^2$, $e_4' = 2C$, $e_5' = -2(CG + DF - AE)$, $e_6' = -2(DH + BE)$, $e_7' = -2(D + CF)$, $e_8' = -2(CH - DG)$.

设 $H_2 > 0$, (12) 式的根表示为 $\omega_2^{(1)}, \omega_2^{(2)}, \omega_2^{(3)}, \omega_2^{(4)}$, 每个 $\omega_2^{(i)} (i = 1, 2, 3, 4)$ 对应的临界值 $\tau_{2i}^{(j)}$ 为

$$\tau_{2i}^{(j)} = \frac{1}{\omega_2} \arccos \{ (E_{22} E_{23} + E_{21} E_{24}) / (E_{21}^2 + E_{22}^2 + 2j\pi) \}, \omega_2 = \omega_2^{(j)}, j = 1, 2, 3, 4; j = 0, 1, 2, \dots$$

设 $\tau_{20}' = \min \{ \tau_{2i}^{(j)} \mid i = 1, 2, 3, 4; j = 0, 1, 2, \dots \}$, ω_{20}' 是(12)式在 $\tau_2 = \tau_{20}'$ 下的根, 令 $\lambda = i\omega_{20}'$ 是方程(4)的根得

$$(d\lambda/d\tau_2)^{-1} = (P'' + iQ'') / (M'' + iN''),$$

$$\operatorname{Re}(d\lambda/d\tau_2)_{\lambda=i\omega_{20}'}^{-1} = \operatorname{Re}((P'' + iQ'') / (M'' + iN'')) = (P''M'' + Q''N'') / (M''^2 + N''^2),$$

其中

$$\begin{aligned} P'' &= -3\omega^2 - 2A\omega \sin \omega \tau_2 + (B - A\omega^2) \tau_2 + (D\tau_1 - C) \cos \omega \tau_1 + C\omega \tau_1 \sin \omega \tau_1 - (\tau_1 + \tau_2) E \cos \omega(\tau_1 + \tau_2), \\ Q'' &= -2A\omega \cos \omega \tau_2 + (C - D\tau_1) \sin \omega \tau_1 + C\omega \tau_1 \cos \omega \tau_1 + (\tau_1 + \tau_2) E \sin \omega(\tau_1 + \tau_2), \\ M'' &= \omega E \sin \omega(\tau_1 + \tau_2) + (A\omega^3 - B\omega) \sin \omega \tau_2, \\ N'' &= \omega E \cos \omega(\tau_1 + \tau_2) + (A\omega^3 - B\omega) \cos \omega \tau_2. \end{aligned}$$

横截性条件在如下条件下成立:

$$(P_2) \quad P''M'' + Q''N'' \neq 0.$$

2 周期解的稳定性与分支方向

考虑平衡点 E^* 在 $\tau_2 = \tau_{20}'$, $\tau_1 \in (0, \pi_{10})$ 情况下的 Hopf 分支, 设 $\tau_2 = \tau_{20}' + \mu$, $\mu \in \mathbf{R}$, 使得在 $\mu = 0$ 时出现 Hopf 分支. 不失一般性, 假设 $\tau_1^* < \tau_{20}'$, 其中 $\tau_1^* \in (0, \pi_{10})$. 现在继续沿用文献[12, 14-15]的思想, 令 $t = t\tau_2$, $X(t) = x - x_*$, $Y(t) = y - y_*$, $Z(t) = z - z_*$, 则系统(2)可以写成

$$dv/dt = (\tau_{20}' + \mu) [B_1 v(t) + B_2 v(t - \tau_1^*/\tau_2) + B_3 v(t - 1) + f(x, y, z)],$$

其中

$$f = (f_1, f_2, f_3)^T, v(t) = (X(t), Y(t), Z(t))^T,$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & \alpha_5 & \alpha_6 \\ 0 & \alpha_7 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_8 \end{pmatrix}.$$

为了方便 $X(t), Y(t), Z(t)$ 仍然分别用 $x(t), y(t), z(t)$ 表示. 非线性项 f_1, f_2, f_3 分别是

$$f_1 = -\mu x^2(t) - dx(t)y(t) - dx(t)z(t),$$

$$f_2 = cx(t - \tau_1^*/\tau_2)y(t) + cx(t - \tau_1^*/\tau_2)z(t),$$

$$f_3 = 0.$$

定义一组算子:

$$L_\mu \varphi = (\tau_{20}' + \mu) [B_1 \varphi(0) + B_2 \varphi(t - \tau_1^*/\tau_2) + B_3 \varphi(-1)] \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)^T \in C([-1, 0], \mathbf{R}^3).$$

通过应用 Riesz 表示定理, 存在一个有界变差矩

$$\eta(\theta, \mu): [-1, 0] \rightarrow \mathbf{R}^2, \text{使得 } L_\mu \varphi = \int_{-1}^0 d\eta(\theta, \mu) \varphi(\theta), \text{ 选取}$$

$$\eta(\theta, \mu) = \begin{cases} (\tau_{20}' + \mu)(B_1 + B_2 + B_3), & \theta = 0, \\ (\tau_{20}' + \mu)(B_2 + B_3), & \theta = [-\frac{\tau_1^*}{\tau_2}, 0), \\ (\tau_{20}' + \mu)B_3, & \theta = (-1, -\frac{\tau_1^*}{\tau_2}), \\ 0, & \theta = -1. \end{cases}$$

对 $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)^T \in C([-1, 0], \mathbf{R}^3)$ 定义

$$A(\mu) \varphi = \begin{cases} d\varphi(\theta)/d\theta, & \theta \in [-1, 0), \\ \int_{-1}^0 d\eta(s, \mu) \varphi(s), & \theta = 0, \end{cases}$$

$$R(\mu) \varphi = \begin{cases} 0, & \theta \in [-1, 0), \\ h(\mu, \varphi), & \theta = 0, \end{cases}$$

其中

$$h(\mu, \varphi) = (\tau_{20}' + \mu)(h_1, h_2, h_3)^T,$$

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)^T \in C([-1, 0], \mathbf{R}^3),$$

$$h_1 = -\mu \varphi_1^2(0) - d\varphi_1(0)\varphi_2(0) - d\varphi_1(0)\varphi_3(0),$$

$$h_2 = c\varphi_1(-\tau_1^*/\tau_2)\varphi_2(0) + c\varphi_1(-\tau_1^*/\tau_2)\varphi_3(0),$$

$$h_3 = 0.$$

因此, 系统(2)可以写成

$$dv/dt = A(\mu)v_t + R(\mu)v_t, \quad (13)$$

其中 $v = (X(t), Y(t), Z(t))^T$, $\mu_t(\theta) = \mu(t + \theta)$, $\theta \in [-1, 0]$.

对 $\varphi \in C([0, 1], (\mathbf{R}^3)^*)$ 定义 $A(0) = A$ 和 A 的共轭算子 A^* 如下:

$$A^* \varphi(s) = \begin{cases} -d\varphi(s)/ds, & s \in (0, 1], \\ \int_{-1}^0 d\eta^T(t, \rho) \varphi(-t), & s = 0, \end{cases}$$

其中 η^T 是矩阵 η 的转置.

对 $\psi \in C[-1, \rho] \mathbb{R}^3$ 和 $\varphi \in C[0, 1] \mathbb{R}^3$ 定义一个双线性内积:

$$\langle \psi(s), \varphi(\theta) \rangle = \bar{\psi}(0) \varphi(0) - \int_{-1}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} \bar{\psi}(\xi - \theta) d\eta(\theta) \varphi(\xi) d\xi,$$

其中 $\eta(0) = \eta(\theta, \rho)$.

A 和 A^* 的特征值是 $\pm i\omega_0 \tau'_{20}$, 而 A 和 A^* 的特征向量通过它们所对应的特征值 $i\omega_0 \tau'_{20}$ 和 $-i\omega_0 \tau'_{20}$ 计算得出.

引理 2 A 的特征值 $i\omega_0 \tau'_{20}$ 所对应的特征向量为 $q(\theta) = (1 \ \beta \ \gamma)^T e^{i\omega_0 \tau'_{20} \theta}$, A^* 的特征值 $-i\omega_0 \tau'_{20}$ 所对应的特征向量为 $q^*(s) = \bar{D}(1 \ \beta \ \gamma)^T e^{i\omega_0 \tau'_{20} s}$, 并且 $\langle q^*(s), q(\theta) \rangle = 1, \langle q^*(s), \bar{q}(\theta) \rangle = 0$ 其中

$$\beta = \frac{i\omega_0 \alpha_6 + \alpha_2 \alpha_4 e^{-i\omega_0 \tau_1} - \alpha_1 \alpha_6}{\alpha_2(i\omega_0 - \alpha_5) + \alpha_2 \alpha_6}, \quad \gamma = \frac{i\omega_0 - \alpha_1}{\alpha_2} - \beta,$$

$$\beta^* = -\frac{\alpha_1 + i\omega_0}{\alpha_4} e^{i\omega_0 \tau_1} \gamma^* = -\frac{\alpha_2}{\alpha_7} - \frac{i\omega_0 + \alpha_5}{\alpha_7} \beta^*,$$

$$\bar{D} = \mathcal{V} [1 + \beta\beta^* + \gamma\gamma^* + \tau'_{20}(\alpha_8 \gamma \bar{\gamma}^* e^{-i\omega_0 \tau'_{20}} + \alpha_4 \bar{\beta}^* \tau_1^* e^{-i\omega_0 \tau_1^* / \tau'_{20}} / \tau'_{20})].$$

下面计算中心流 C_0 在 $\mu = 0$ 时的坐标, 定义 $z(t) = \langle q^*, x_t \rangle W(t, \theta) = x_t(\theta) - 2\text{Re}\{z(t) q(\theta)\}$. (14) 在中心流 C_0 上有 $W(t, \theta) = W(z(t), \bar{z}(t), \theta)$ 且 $W(z, \bar{z}, \theta) = W_{20}(\theta) z^2/2 + W_{11}(\theta) z\bar{z} + W_{02}(\theta) \bar{z}^2/2 + W_{30}(\theta) z^3/6 + \dots$,

这里 z 与 \bar{z} 是中心流 C_0 在方向为 q 与 \bar{q} 上的局部坐标, 注意到: 若 W 和 x_t 为实数, 则仅考虑实值解. 对 $x_t \in C_0$, 由于 $\mu = 0, dz/dt = \langle q^*, dx/dt \rangle = \langle q^*, Ax_t + Rx_t \rangle = \langle q^*, Ax_t \rangle + \langle q^*, Rx_t \rangle = i\omega\tau z + \bar{q}^*(0) \cdot f(0, W(z, \bar{z}, \rho)) + 2\text{Re}\{zq(\theta)\} = i\omega\tau z + \bar{q}^*(0) \cdot f_0(z, \bar{z}) = i\omega\tau z + g(z, \bar{z})$ 这里

$$g(z, \bar{z}) = \bar{q}^*(0) f_0(z, \bar{z}) = g_{20}(\theta) z^2/2 + g_{11}(\theta) z\bar{z} + g_{02} \bar{z}^2/2 + g_{21} z^2 \bar{z}/2 + \dots \quad (15)$$

由 (14) 式可得

$$x_t(\theta) = (x_{1t}(\theta) \ x_{2t}(\theta) \ x_{3t}(\theta))^T = W(t, \theta) + zq(\theta) + \bar{z}\bar{q}(\theta),$$

并且 $q(\theta) = (1 \ \beta \ \gamma)^T e^{i\omega_0 \tau'_{20} \theta}$. 可以推出

$$x_{1t}(0) = z + \bar{z} + W_{20}^{(1)}(0) z^2/2 + W_{11}^{(1)}(0) z\bar{z} + W_{02}^{(1)} \bar{z}^2/2 + \dots$$

$$x_{2t}(0) = \beta z + \bar{\beta} \bar{z} + W_{20}^{(2)}(0) z^2/2 + \dots$$

$$x_{3t}(0) = \gamma z + \bar{\gamma} \bar{z} + W_{20}^{(3)}(0) z^2/2 + \dots$$

$$x_{1t}(-1) = ze^{-i\omega_0 \tau'_{20}} + \bar{z}e^{i\omega_0 \tau'_{20}} + W_{20}^{(1)}(-1) \cdot z^2/2 + \dots$$

$$x_{2t}(-1) = \beta ze^{-i\omega_0 \tau'_{20}} + \bar{\beta} \bar{z}e^{i\omega_0 \tau'_{20}} + W_{20}^{(2)}(-1) \cdot z^2/2 + \dots$$

$$x_{3t}(-1) = \gamma ze^{-i\omega_0 \tau'_{20}} + \bar{\gamma} \bar{z}e^{i\omega_0 \tau'_{20}} + W_{20}^{(3)}(-1) \cdot z^2/2 + \dots$$

$$x_{1t}(-\tau_1^*/\tau_2) = ze^{-i\omega_0 \tau_1^*} + \bar{z}e^{i\omega_0 \tau_1^*} + W_{20}^{(1)}(-\tau_1^*/\tau_2) z^2/2 + \dots$$

$$x_{2t}(-\tau_1^*/\tau_2) = \beta ze^{-i\omega_0 \tau_1^*} + \bar{\beta} \bar{z}e^{i\omega_0 \tau_1^*} + W_{20}^{(2)}(-\tau_1^*/\tau_2) z^2/2 + \dots$$

$$x_{3t}(-\tau_1^*/\tau_2) = \gamma ze^{-i\omega_0 \tau_1^*} + \bar{\gamma} \bar{z}e^{i\omega_0 \tau_1^*} + W_{20}^{(3)}(-\tau_1^*/\tau_2) z^2/2 + \dots$$

又因为

$$g(z, \bar{z}) = \bar{D} \tau'_{20} (1 \ \bar{\beta}^* \ \bar{\gamma}^*) \cdot$$

$$\begin{pmatrix} -\mu x_{1t}^2(0) - dx_{1t}(0) x_{2t}(0) - dx_{1t}(0) x_{3t}(0) \\ cx_{1t}(-\tau_1^*/\tau_2)(x_{2t}(0) + x_{3t}(0)) \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\bar{D} \tau'_{20} [-\mu x_{1t}^2(0) - dx_{1t}(0) x_{2t}(0) - dx_{1t}(0) x_{3t}(0) + c \bar{\beta}^* x_{1t}(-\tau_1^*/\tau_2) x_{2t}(0) + c \bar{\beta}^* x_{1t}(-\tau_1^*/\tau_2) x_{3t}(0)] = g_{20}(\theta) z^2/2 + g_{11}(\theta) z\bar{z} + g_{02} \bar{z}^2/2 + g_{21} z^2 \bar{z}/2 + \dots$$

则可得

$$g_{20} = 2 \tau'_{20} \bar{D} [-\mu - d(\beta + \gamma) + c \bar{\beta}^* e^{-i\omega_0 \tau_1^*} (\beta + \gamma)],$$

$$g_{11} = \tau'_{20} \bar{D} [-2\mu - d(\beta + \bar{\beta}) - d(\gamma + \bar{\gamma}) + c \bar{\beta}^* (\bar{\beta} \cdot e^{-i\omega_0 \tau_1^*} + \beta e^{i\omega_0 \tau_1^*}) + c \bar{\beta}^* (\bar{\gamma} e^{-i\omega_0 \tau_1^*} + \gamma e^{i\omega_0 \tau_1^*})],$$

$$g_{02} = 2 \tau'_{20} \bar{D} [-\mu - d(\bar{\beta} + \bar{\gamma}) + c \bar{\beta}^* e^{i\omega_0 \tau_1^*} (\bar{\beta} + \bar{\gamma})],$$

$$g_{20} = 2 \tau'_{20} \bar{D} \{ -\mu W_{20}^{(1)}(0) - d[W_{11}^{(2)}(0) + (W_{20}^{(2)}(0) + \bar{\beta} W_{20}^{(1)}(0))/2 + \beta W_{11}^{(1)}(0)] - d[W_{11}^{(3)}(0) + (W_{20}^{(3)}(0) + \bar{\gamma} W_{20}^{(1)}(0))/2 + \gamma W_{11}^{(1)}(0)] +$$

$$c \bar{\beta}^* [(\bar{\beta} W_{20}^{(1)}(-\tau_1^*/\tau_2) + W_{20}^{(2)}(0) e^{i\omega_0 \tau_1^*})/2 + \beta W_{11}^{(1)}(-\tau_1^*/\tau_2) + W_{11}^{(2)}(0) e^{-i\omega_0 \tau_1^*}] +$$

$$c \bar{\beta}^* [(\bar{\beta} W_{20}^{(1)}(-\tau_1^*/\tau_2) + W_{20}^{(2)}(0) e^{i\omega_0 \tau_1^*})/2 + \gamma W_{11}^{(1)}(-\tau_1^*/\tau_2) + W_{11}^{(2)}(0) e^{-i\omega_0 \tau_1^*} \}.$$

由于 g_{21} 中需要对 $W_{20}(\theta)$, $W_{11}(\theta)$ 进行计算, 因而从 (13) 式和 (15) 式可得

$$d\omega/dt = dx_t/dt - qdz/dt - \bar{q}d\bar{z}/dt =$$

$$\begin{cases} AW - 2\operatorname{Re}\{\bar{q}^*(0)f_0q(\theta)\} & , \quad \theta \in [-1, 0) \\ AW - 2\operatorname{Re}\{\bar{q}^*(0)f_0q(\theta)\} + f_0 & , \theta = 0 \end{cases} \triangleq AW + H(z, \bar{z}, \theta). \quad (16)$$

这里

$$H(z, \bar{z}, \theta) = H_{20}(\theta)z^2/2 + H_{11}(\theta)z\bar{z} + H_{02}(\theta)\bar{z}^2/2 + \dots \quad (17)$$

由于系数相等, 从而可以获得

$$\begin{aligned} (A - 2i\omega_0\tau'_{20})W_{20}(\theta) &= -H_{20}(\theta) \quad AW_{11}(\theta) = \\ &= -H_{11}(\theta) \quad H(z, \bar{z}, \theta) = -\bar{q}^*(0)f_0q(\theta) - \\ &= q^*(0)\bar{f}_0\bar{q}(\theta) = -gq(\theta) - \bar{g}\bar{q}(\theta), \end{aligned} \quad (18)$$

与(17)式比较系数, 可以得到

$$H_{20}(\theta) = -g_{20}q(\theta) - \bar{g}_{02}\bar{q}(\theta),$$

$$H_{11}(\theta) = -g_{11}q(\theta) - \bar{g}_{11}\bar{q}(\theta).$$

由(18)式和A的定义可得

$$dW_{20}(\theta)/d\theta = 2i\omega_0\tau'_{20}W_{20}(\theta) + g_{20}q(\theta) + \bar{g}_{02}\bar{q}(\theta).$$

假设 $q(\theta) = (1 \ \beta \ \gamma)^T e^{i\omega_0\tau'_{20}\theta}$, 因此

$$W_{20}(\theta) = ig_{20}q(0)e^{i\omega_0\tau'_{20}\theta}/\omega_0\tau'_{20} +$$

$$ig_{02}\bar{q}(0)e^{-i\omega_0\tau'_{20}\theta}/3\omega_0\tau'_{20} + E_1e^{2i\omega_0\tau'_{20}\theta}, \quad (19)$$

其中 $E_1 = (E_1^{(1)} \ E_1^{(2)} \ E_1^{(3)}) \in \mathbf{R}^3$ 为常向量, 同理可得

$$W_{11}(\theta) = -ig_{11}q(0)e^{i\omega_0\tau'_{20}\theta}/\omega_0\tau'_{20} +$$

$$ig_{11}\bar{q}(0)e^{-i\omega_0\tau'_{20}\theta}/\omega_0\tau'_{20} + E_2, \quad (20)$$

其中的 $E_2 = (E_2^{(1)} \ E_2^{(2)} \ E_2^{(3)}) \in \mathbf{R}^3$ 是常向量.

接下来需要求出适当的 E_1 和 E_2 , 从(18)式和A的定义可知

$$\int_{-1}^0 d\eta(\theta)W_{20}(\theta) = 2i\omega_0\tau'_{20}\omega_{20}(0) - H_{20}(0),$$

$$\int_{-1}^0 d\eta(\theta)W_{11}(\theta) = -H_{11}(0), \quad (21)$$

其中 $\eta(\theta) = \eta(0, \theta)$, 由(16)式可以得出

$$H_{20}(0) = -g_{20}q(0) - \bar{g}_{02}\bar{q}(0) + 2\tau'_{20}(-\mu - d(\beta + \gamma) \ \rho(\beta + \gamma) \ e^{-i\omega_0\tau_1^*} \ \rho)^T, \quad (22)$$

$$H_{11}(0) = -g_{11}q(0) - \bar{g}_{11}\bar{q}(0) + 2\tau'_{20}(-\mu - \operatorname{Re}(\beta + \gamma) \ \rho \operatorname{Re}[e^{i\omega_0\tau_1^*}(\beta + \gamma)] \ \rho)^T. \quad (23)$$

将(19) ~ (20)、(22) ~ (23)式代入(21)式中可得

$$(i\omega_0\tau'_{20}I - \int_{-1}^0 e^{i\omega_0\tau'_{20}\theta} d\eta(\theta))q(0) = 0,$$

$$(i\omega_0\tau'_{20}I - \int_{-1}^0 e^{-i\omega_0\tau'_{20}\theta} d\eta(\theta))\bar{q}(0) = 0.$$

所以有

$$\begin{aligned} (2i\omega_0\tau'_{20}I - \int_{-1}^0 e^{2i\omega_0\tau'_{20}\theta} d\eta(\theta))E_1 &= 2\tau_0(-\mu - \\ &= d(\beta + \gamma) \ \rho(\beta + \gamma) \ e^{-i\omega_0\tau_1^*} \ \rho)^T. \end{aligned}$$

从而

$$E_1^{(1)} = 2/M \cdot$$

$$\begin{vmatrix} -\mu - d(\beta + \gamma) & -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ c(\beta + \gamma) e^{-i\omega_0\tau_1^*} & 2i\omega_0 - \alpha_5 & -\alpha_6 \\ 0 & -\alpha_7 & 2i\omega_0 - \alpha_8 e^{-2i\omega_0\tau'_{20}} \end{vmatrix},$$

$$E_1^{(2)} = 2/M \cdot$$

$$\begin{vmatrix} 2i\omega_0 - \alpha_1 & -\mu - d(\beta + \gamma) & -\alpha_3 \\ -\alpha_4 \cdot e^{-2i\omega_0\tau_1^*/\tau'_{20}} & c(\beta + \gamma) e^{-i\omega_0\tau_1^*} & -\alpha_6 \\ 0 & 0 & 2i\omega_0 - \alpha_8 e^{-2i\omega_0\tau'_{20}} \end{vmatrix},$$

$$E_1^{(3)} = 2/M \cdot$$

$$\begin{vmatrix} 2i\omega_0 - \alpha_1 & -\alpha_2 & -\mu - d(\beta + \gamma) \\ -\alpha_4 \cdot e^{-2i\omega_0\tau_1^*/\tau'_{20}} & 2i\omega_0 - \alpha_5 & c(\beta + \gamma) e^{-i\omega_0\tau_1^*} \\ 0 & -\alpha_7 & 0 \end{vmatrix},$$

其中

$$M = \begin{vmatrix} 2i\omega_0 - \alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ -\alpha_4 \cdot e^{-2i\omega_0\tau_1^*/\tau'_{20}} & 2i\omega_0 - \alpha_5 & -\alpha_6 \\ 0 & -\alpha_7 & 2i\omega_0 - \alpha_8 e^{-2i\omega_0\tau'_{20}} \end{vmatrix}.$$

同理, 可以得到

$$E_2^{(1)} = \frac{2}{G} \begin{vmatrix} -\mu - \operatorname{Re}(\beta + \gamma) & -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ c\operatorname{Re}[e^{i\omega_0\tau_1^*}(\beta + \gamma)] & -\alpha_5 & -\alpha_6 \\ 0 & -\alpha_7 & -\alpha_8 \end{vmatrix},$$

$$E_2^{(2)} = \frac{2}{G} \begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\mu - \operatorname{Re}(\beta + \gamma) & -\alpha_3 \\ \alpha_4 \cdot e^{-2i\omega_0\tau_1^*/\tau'_{20}} & c\operatorname{Re}[e^{i\omega_0\tau_1^*}(\beta + \gamma)] & -\alpha_6 \\ 0 & 0 & -\alpha_8 \end{vmatrix},$$

$$E_2^{(3)} = \frac{2}{G} \begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\mu - \operatorname{Re}(\beta + \gamma) \\ \alpha_4 \cdot e^{-2i\omega_0\tau_1^*/\tau'_{20}} & -\alpha_5 & -\alpha_6 \\ 0 & -\alpha_7 & -\alpha_8 \end{vmatrix}.$$

其中

$$G = \begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ \alpha_4 \cdot e^{-2i\omega_0\tau_1^*/\tau'_{20}} & -\alpha_5 & -\alpha_6 \\ 0 & -\alpha_7 & -\alpha_8 \end{vmatrix}.$$

从而可以确定 $W_{20}(\theta)$ 和 $W_{11}(\theta)$, 进一步, 可以确定每一个 g_{ij} . 因此, 每一个 g_{ij} 可由时滞系统(2)的参数表示出来, 计算得出下列各值:

$$c_1(0) = i(g_{11}g_{20} - 2|g_{11}|^2 - |g_{02}|^2/3)/(2\omega_0\tau'_{20}) +$$

$$g_{21}/2 \quad \mu_2 = -\operatorname{Re}\{c_1(0)\}/\operatorname{Re}\{\lambda'(\tau'_{20})\},$$

$$T_2 = (\operatorname{Im}\{c_1(0)\} + \operatorname{Im}\{\lambda'(\tau'_{20})\})/(\omega_0\tau'_{20}),$$

$$\beta_2 = 2\operatorname{Re}\{c_1(0)\}.$$

以上表达式给出了系统(2)分支周期解在中心流 C_0 上的描述, 进一步, 当 $\operatorname{Re}\{\lambda'(\tau'_{20})\} > 0$ 和临界值 $\tau_2 = \tau'_{20}$ 时, 有以下结论:

(i) μ_2 表示周期解的分支方向, 若 $\mu_2 > 0$ ($\mu_2 <$

0) 则周期解分支是超临界(次临界)的;

(ii) β_2 是确定分支周期解的稳定性,若 $\beta_2 < 0$ ($\beta_2 > 0$) 则周期解是稳定(不稳定)的;

(iii) T_2 确定分支周期解的周期,若 $T_2 > 0$ ($T_2 < 0$) 则周期是增加(减少)的.

3 数值模拟

为了更深入地了解系统的性质,可以运用 Matlab 软件对系统模型进行数值模拟与分析. 具体参数设置如下: $a = 1.02$ $b = 0.17$ $c = 0.40$ $d =$

0.20 $e = 0.40$.

(i) 当 $\tau_1 = 0$ 时,取 τ_2 的临界值为 $\tau_{20} = 4.31$, 易得系统的平衡点为 $E_* = (0.97 \ 3.99 \ 0.23)$, 当 $\tau_2 (= 4.20) < \tau_{20} (= 4.31)$ 时,平衡点 E_* 是渐近稳定的,然而,当 $\tau_2 (= 9.35) > \tau_{20} (= 4.31)$ 时, E_* 失去稳定并且出现 Hopf 分支现象,如图 1 所示.

(ii) 当 $\tau_2 = 0$ 时,取 τ_1 的临界值为 $\tau_{10} = 3.02$, 易得系统的平衡点为 $E_* = (0.97 \ 2.62 \ 0.15)$, 当 $\tau_1 (= 1.90) < \tau_{10} (= 3.02)$ 时,平衡点 E_* 是渐近稳定的,然而,当 $\tau_1 (= 3.79) > \tau_{10} (= 3.02)$ 时, E_* 失去稳定并且出现 Hopf 分支现象,如图 2 所示.

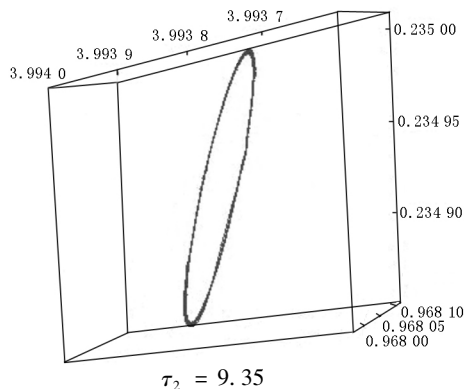
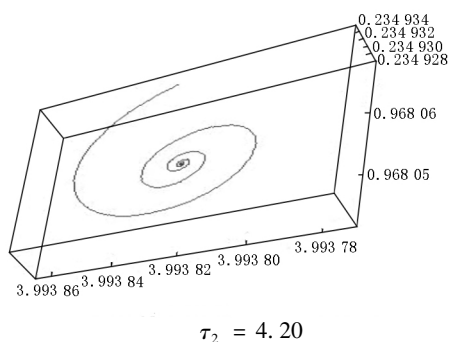


图 1 $\tau_1 = 0$ 的数值模拟

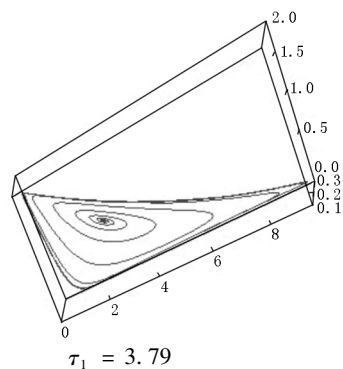
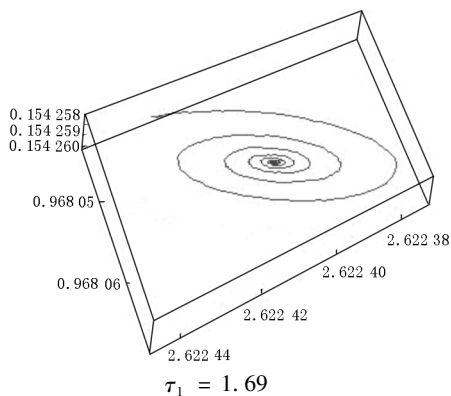


图 2 $\tau_2 = 0$ 的数值模拟

(iii) 在 $\tau_1 = 1.60$ 的条件下,当 $\tau_2 (= 3.45) < \tau_{20}' (= 3.51)$ 时,易得 $E_* = (0.97 \ 2.62 \ 0.15)$ 是渐

近稳定的,然而,当 $\tau_2 (= 8.90) > \tau_{20}' (= 3.51)$ 时, E_* 失去稳定并且出现 Hopf 分支现象,如图 3 所示.

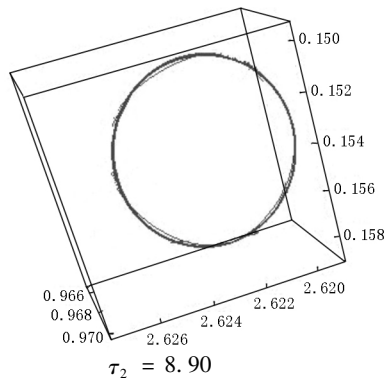
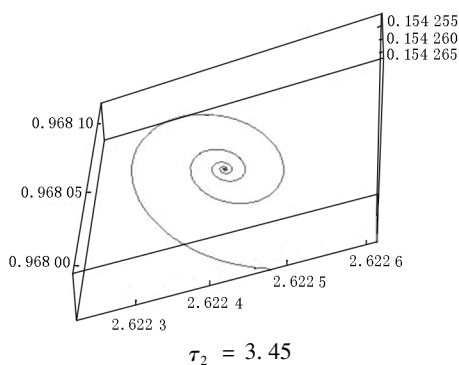


图 3 $\tau_1 = 1.60$ 的数值模拟

(iv) 在 $\tau_2 = 4.40$ 的条件下, 当 $\tau_1 (= 0.12) < \tau_{10} (= 0.16)$ 时, 易得 $E_* = (0.97 \ 3.99 \ 0.23)$ 是渐近稳定的, 然而, 当 $\tau_1 (= 0.60) > \tau_{10} (= 0.16)$

时 E_* 失去稳定并且出现 Hopf 分支现象, 如图 4 所示.

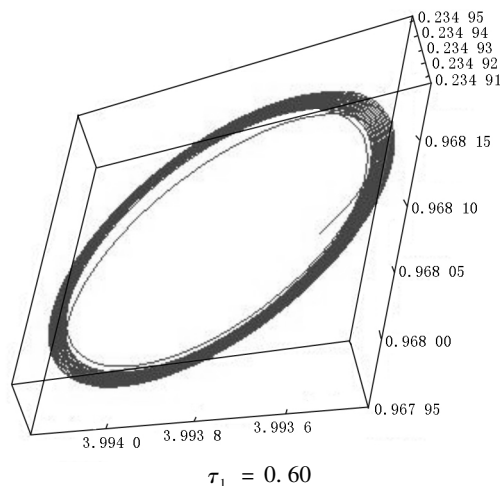
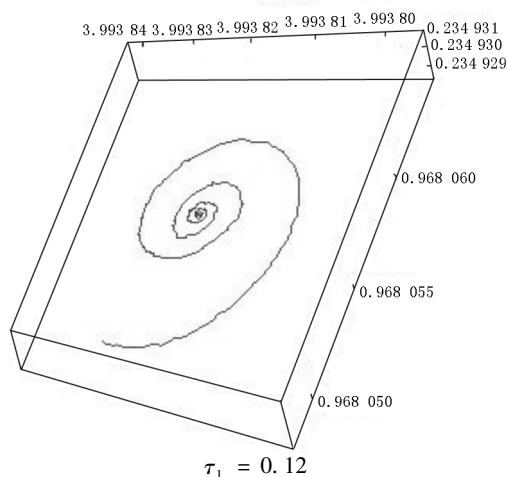


图 4 $\tau_2 = 4.40$ 的数值模拟

4 小结

本文首先运用 Hopf 分支理论与稳定性得到系统正平衡点的特性; 其次, 取时滞 τ_1 和 τ_2 作为分支参数, 得到当经过分支点时, 系统正平衡点的稳定性发生改变, 从而导致混沌现象消失, 且可以分支出周期轨; 然后, 利用 Hassard 方法与中心流形定理, 得到周期解的分支方向与稳定性的判定公式; 最后, 利用数值模拟验证解析结果的有效性.

A. Hastings 等^[16] 对于不含时滞的 3 维企业竞争模型只是简单地用一个模型来代表企业竞争之间的关系, 并没有考虑到一个市场的稳定性以及企业的发展会受到许多其他外界因素的干扰. 而刘凯^[11] 在添加单时滞后情况有所改变, 企业可以通过选择不同的时间点进入市场从而产生不同的影响. 然而, 中小型企业发展成为大型企业所需要的时间对市场的稳定性并没有影响, 只是对企业的发展历程有影响.

本文引入双时滞对投资市场动力学模型进行分析, 研究表明: 可以通过对投资项目的增长速度添加控制因素 τ_1 (即增长时滞) 来促进市场的稳定性, 接着再对大型投资公司退出市场的时机是否成熟添加另一个控制因素 τ_2 (即成熟时滞), 为企业选择最好的时间点进入市场做准备. 当进入市场的时间在临界值之内, 会促进市场的稳定发展; 当进入市场的时间在临界值之外, 则会导致市场秩序混乱, 企业可以为了自身更好地发展选择合适的时间点进入市场.

由此为投资市场的稳定性发展以及管理者更好地发展市场提供了理论依据, 同时也要求市场调控者在调控时应考虑时滞对市场稳定性的影响, 通过政策调控企业进入市场的最佳时间.

5 参考文献

- [1] 李继彬, 冯贝叶. 稳定性, 分支与混沌 [M]. 昆明: 云南科技出版社, 1995.
- [2] 张芷芬, 丁同仁, 黄文灶, 等. 微分方程定性理论 [M]. 北京: 科学出版社, 1997.
- [3] Xu Rui, Ma Zhen. Stability and Hopf bifurcation in a predator-prey model with stage structure for the predator [J]. Nonlinear Anal Real World Appl, 2008, 9 (4): 1444-1460.
- [4] Yuan Sanling, Song Yongli. Stability and Hopf bifurcation in a delayed Leslie-Gower predator-prey system [J]. J Math Anal Appl, 2009, 335 (1): 82-100.
- [5] Song Yongli, Han Maoan, Peng Yahong. Stability and Hopf bifurcation in a competitive Lotka-Volterra system with two delays [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2004, 22 (5): 1139-1148.
- [6] Tang Xianhua, Zhou Xingfu. Global attractivity of non-autonomous Lotka-Volterra competition system without instantaneous negative feedback [J]. Journal of Differential Equations, 2003, 192 (2): 502-535.
- [7] Sun Chengjun, Lin Yiping, Han Maoan. Stability and Hopf bifurcation for an epidemic disease model with delay [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2006, 30 (1): 204-216.
- [8] Yan Xiangping, Chu Yandong. Stability and bifurcation

- analysis for a delayed Lotka-Volterra predator-prey system [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2006, 196(1): 198-210.
- [9] Freeman J, Hannan M T. Niche width and the dynamic of organizational populations [J]. American Journal of Sociological, 1983, 88(6): 1116-1145.
- [10] Moore J F. Predators and prey: a new ecology of competition [J]. Harvard Business Review, 1993, 71(3): 75-86.
- [11] 刘凯. 一类时滞金融模型的稳定性分析 [D]. 镇江: 江苏大学, 2011: 20-33.
- [12] Chen Yuanyuan, Song Changming. Stability and Hopf bifurcation analysis in a prey-predator system with stage-structure for prey and time delay [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2008, 38(4): 1104-1114.
- [13] Kar T K, Batabyal A. Stability and bifurcation of a prey-predator model with time delay [J]. Comptes Rendus Biologie, 2009, 332(7): 642-651.
- [14] Hassard B D, Kazarinoff N D, Wan Yieh Hei. Theory and application of Hopf bifurcation [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1981: 961-969.
- [15] Paolo Russu. Hopf bifurcation in a environmental defensive expenditures model with time delay [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2009, 42(5): 3147-3159.
- [16] Hastings A, Powell T. Chaos in a three-species food chain [J]. Ecology, 1991, 72(3): 896-903.

The Stability Analysis of the Enterprise Competition Model with Two Time Delays

XU Fei, LI Shumin*

(Department of Mathematics, Faculty of Science, Kunming University of Science and Technology, Kunming Yunnan 650500, China)

Abstract: A three-dimensional financial enterprise competition model is made as the research object in this paper, and the stability of enterprise competition under the action of time-delay feedback is studied. Firstly, the positive equilibrium characteristics of the system are gotten on the basis of the theory of Hopf branch and stability. Secondly, taking time-delay τ_1 and τ_2 as branch parameters, the stability of the positive equilibrium point changes in the system when going through a branch point, which leads to the disappearance of the chaos phenomenon and can branch out of the cycle track. Similarly, the Hassard method and center manifold theorem are used to get the branch direction of periodic solution and judgment formula of stability. Finally, under the numerical simulation of Matlab, the dynamic behavior of the time-delay controlled system in the evolution of parameters is studied. Consequently, the validity of the analytical results is verified.

Key words: enterprise competitive model; Hopf branch; stability; the delay differential equation

(责任编辑: 曾剑锋)