文章编号: 1000-5862(2018)05-0527-04

逐步 I 型区间删失下逆威布尔分布的参数估计

龙　兵

(荆楚理工学院数理学院,湖北 荆门　448000)

摘要: 基于逐步 I 型区间删失样本,通过求解似然方程并不能得到未知参数的极大似然估计. 该文利用 EM 算法得到了参数估计的迭代公式,为了简化计算过程,得到了求参数估计的另一种方法. 通过数值模拟可看到: 参数估计值与真值非常接近,相对偏差较小,从而说明 EM 算法是可行的.

关键词: 逆威布尔分布; 逐步 I 型区间删失; EM 算法; 极大似然估计

中图分类号: O 212.3　　文献标志码: A　　DOI: 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2018.05.16

0　引言

逆威布尔分布是可靠性工程中一类重要的寿命分布. 相对于指数分布和 2 参数威布尔分布而言,对于一些机械故障,如活塞、机轴、主轴承等发动机部件的故障数据,用 2 参数逆威布尔分布拟合机械部件故障会更好. 文献[1-2]假设形状参数已知,在 2 种损失函数下给出了尺度参数的贝叶斯估计. 文献[3]在完全样本情形下,得到了逆威布尔分布形状参数的精确置信区间估计以及形状参数和尺度参数的联合置信估计. 文献[4]利用混合 Gibbs 抽样,给出了逆威布尔分布参数的贝叶斯估计. 文献[5-6]基于分组数据探讨了逆威布尔分布参数的估计问题. 文献[7]基于删失数据样本,利用样本分位数得到了逆威布尔分布参数的渐近估计. 文献[8]在广义逐次截尾的试验数据下对逆威布尔分布应用贝叶斯统计方法进行可靠性推断. 文献[9-11]在逆威布尔故障模型下,对其参数进行了统计推断.

已有的研究成果都是在完全样本、截尾样本或者分组数据样本下对逆威布尔的未知参数进行估计. 本文在逐步 I 型区间删失下,利用 EM 算法并借助于 Matlab 软件编程得到了未知参数的估计.

1　参数的极大似然估计

由文献[9,12]知,逆威布尔分布的概率密度函数为

$$f(x) = \alpha\lambda x^{-(\alpha+1)}\exp(-\lambda x^{-\alpha}),x>0, \qquad (1)$$

其分布函数为

$$F(x) = \exp(-\lambda x^{-\alpha}),x>0, \qquad (2)$$

其中 $\alpha(>0)$ 为形状参数,$\lambda(>0)$ 为尺度参数.

先介绍逐步 I 型区间删失试验[13-14]: 假设某产品的寿命服从逆威布尔分布(1),为了估计未知参数 α,λ,现投入 n 个样品进行逐步 I 型区间删失试验,在预先确定的 k 个时刻 $T_1,T_2,\cdots,T_k$ 时进行观测,且满足 $0=T_0<T_1<\cdots<T_{k-1}<T_k<\infty$,在观测时刻 T_j 时,发现有 n_j 个样品在区间 $(T_{j-1},T_j]$ 内失效,同时有 $R_j(j=1,2,\cdots,k)$ 个样品随机地撤离试验. 由于在 T_j 时刻仍存活的个体数 S_j 是随机变量,应有 $R_j<S_j$,可以指定 $R_j=[p_js_j](j=1,2,\cdots,k)$,其中 $p_1,p_2,\cdots,p_k$ 是预先给定的常数,满足

$$0<p_j<1,j=1,2,\cdots,k-1,p_k=1.$$

对于上述试验得到的逐步 I 型区间删失观测数据可表示为

$$\{(n_j,R_j,T_j),j=1,2,\cdots,k\}.$$

根据前面的试验数据,用极大似然法求未知参数 α、λ 的极大似然估计.

由于

$$P\{X\in(T_{j-1},T_j]\} = F(T_j)-F(T_{j-1}) = \exp(-\lambda T_j^{-\alpha})-\exp(-\lambda T_{j-1}^{-\alpha}),$$

因此似然函数[15]为

$$L(\alpha,\lambda) = c\prod_{j=1}^{k}[F(T_j)-F(T_{j-1})]^{n_j}[1-F(T_j)]^{R_j} =$$

收稿日期: 2018-04-30

基金项目: 国家自然科学基金(61374080)和湖北省教育厅科研课题(B2016264)资助项目.

作者简介: 龙　兵(1973-),男,湖北荆门人,副教授,主要从事数理统计方面的研究. E-mail: qh-longbing@163.com

$c\exp(-\lambda n_1 T_1^{-\alpha})[1-\exp(-\lambda T_1^{-\alpha})]^{R_1}\prod_{j=2}^{k}[\exp(-\lambda T_j^{-\alpha})-\exp(-\lambda T_{j-1}^{-\alpha})]^{n_j}[1-\exp(-\lambda T_j^{-\alpha})]^{R_j}$,

其中 $c>0$,且其与参数 α、λ 无关. 显然

$$R_k=n-\sum_{j=1}^{k}n_j-\sum_{j=1}^{k-1}R_j.$$

对数似然函数为

$$\ln L(\alpha,\lambda)=\ln c-n_1\lambda T_1^{-\alpha}+\sum_{j=1}^{k}R_j\ln[1-\exp(-\lambda T_j^{-\alpha})]+\sum_{j=2}^{k}n_j\ln[\exp(-\lambda T_j^{-\alpha})-\exp(-\lambda T_{j-1}^{-\alpha})].\tag{3}$$

将对数似然函数求导得

$$\partial\ln L(\alpha,\lambda)/\partial\lambda=-n_1T_1^{-\alpha}+\sum_{j=1}^{k}R_jT_j^{-\alpha}\exp(-\lambda T_j^{-\alpha})/[1-\exp(-\lambda T_j^{-\alpha})]+\sum_{j=2}^{k}n_j[T_{j-1}^{-\alpha}\exp(-\lambda T_{j-1}^{-\alpha})-T_j^{-\alpha}\exp(-\lambda T_j^{-\alpha})]/[\exp(-\lambda T_j^{-\alpha})-\exp(-\lambda T_{j-1}^{-\alpha})],$$

$$\partial\ln L(\alpha,\lambda)/\partial\alpha=n_1\lambda T_1^{-\alpha}\ln T_1-\lambda\sum_{j=1}^{k}R_jT_j^{-\alpha}\cdot\ln T_j\exp(-\lambda T_j^{-\alpha})/[1-\exp(-\lambda T_j^{-\alpha})]+\lambda\sum_{j=2}^{k}n_j[T_j^{-\alpha}\ln T_j\exp(-\lambda T_j^{-\alpha})-T_{j-1}^{-\alpha}\ln T_{j-1}\cdot\exp(-\lambda T_{j-1}^{-\alpha})]/[\exp(-\lambda T_j^{-\alpha})-\exp(-\lambda T_{j-1}^{-\alpha})].$$

令 $\partial\ln L(\alpha,\lambda)/\partial\lambda=0$,$\partial\ln L(\alpha,\lambda)/\partial\alpha=0$ 得

$$-n_1T_1^{-\alpha}+\sum_{j=1}^{k}R_jT_j^{-\alpha}\exp(-\lambda T_j^{-\alpha})/[1-\exp(-\lambda T_j^{-\alpha})]+\sum_{j=2}^{k}n_j[T_{j-1}^{-\alpha}\exp(-\lambda T_{j-1}^{-\alpha})-T_j^{-\alpha}\cdot\exp(-\lambda T_j^{-\alpha})]/[\exp(-\lambda T_j^{-\alpha})-\exp(-\lambda T_{j-1}^{-\alpha})]=0,\tag{4}$$

$$n_1\lambda T_1^{-\alpha}\ln T_1-\lambda\sum_{j=1}^{k}R_jT_j^{-\alpha}\ln T_j\exp(-\lambda T_j^{-\alpha})/[1-\exp(-\lambda T_j^{-\alpha})]+\lambda\sum_{j=2}^{k}n_j[T_j^{-\alpha}\ln T_j\exp(-\lambda T_j^{-\alpha})-T_{j-1}^{-\alpha}\ln T_{j-1}\exp(-\lambda T_{j-1}^{-\alpha})]/[\exp(-\lambda T_j^{-\alpha})-\exp(-\lambda T_{j-1}^{-\alpha})]=0.\tag{5}$$

显然由方程(4)和(5)并不能得到参数 λ、α 的显式表达式,也就不易得到参数的极大似然估计,这也是在似然函数较复杂情形下,求参数的极大似然估计时经常遇到的困难. 下面用 EM 算法来解决参数估计问题.

2 用 EM 算法得到未知参数的估计

对于第 1 节中的逐步 I 型区间删失试验,记随机变量全体为 X,观测结果为 U,记 Y_j 为区间$(T_{j-1},T_j]$内失效个体的寿命,Z_j 为在 T_j 时刻删失的个体寿命,且 $Y=(Y_1,Y_2,\cdots,Y_k)$,$Z=(Z_1,Z_2,\cdots,Z_k)$.

若给定 $\alpha=\alpha^{(i)}$,$\lambda=\lambda^{(i)}$,Y_1 的后验条件密度为

$$f_1(y)=\frac{\alpha^{(i)}\lambda^{(i)}y^{-(\alpha^{(i)}+1)}\exp(-\lambda^{(i)}y^{-\alpha^{(i)}})}{\int_0^{T_1}\alpha^{(i)}\lambda^{(i)}y^{-(\alpha^{(i)}+1)}\exp(-\lambda^{(i)}y^{-\alpha^{(i)}})\mathrm{d}y}=\frac{\alpha^{(i)}\lambda^{(i)}y^{-(\alpha^{(i)}+1)}\exp(-\lambda^{(i)}y^{-\alpha^{(i)}})}{\exp(-\lambda^{(i)}T_1^{-\alpha^{(i)}})},0<y\leqslant T_1.\tag{6}$$

Y_j 的后验条件密度为

$$f_j(y)=\frac{\alpha^{(i)}\lambda^{(i)}y^{-(\alpha^{(i)}+1)}\exp(-\lambda^{(i)}y^{-\alpha^{(i)}})}{\int_{T_{j-1}}^{T_j}\alpha^{(i)}\lambda^{(i)}y^{-(\alpha^{(i)}+1)}\exp(-\lambda^{(i)}y^{-\alpha^{(i)}})\mathrm{d}y}=\frac{\alpha^{(i)}\lambda^{(i)}y^{-(\alpha^{(i)}+1)}\exp(-\lambda^{(i)}y^{-\alpha^{(i)}})}{\exp(-\lambda^{(i)}T_j^{-\alpha^{(i)}})-\exp(-\lambda^{(i)}T_{j-1}^{-\alpha^{(i)}})},T_{j-1}<y\leqslant T_j,$$
$$j=2,3,\cdots,k.\tag{7}$$

Z_j 的后验条件密度为

$$p_j(z)=\frac{\alpha^{(i)}\lambda^{(i)}z^{-(\alpha^{(i)}+1)}\exp(-\lambda^{(i)}z^{-\alpha^{(i)}})}{1-\exp(-\lambda^{(i)}T_j^{-\alpha^{(i)}})},T_j<z<+\infty,j=1,2,\cdots,k.\tag{8}$$

E 步:根据似然函数的定义可得

$$L(\lambda,\alpha|U,Y,Z)=\prod_{i=1}^{k}[\alpha\lambda Y_j^{-(\alpha+1)}\cdot\exp(-\lambda Y_j^{-\alpha})]^{n_j}[\alpha\lambda Z_j^{-(\alpha+1)}\exp(-\lambda Z_j^{-\alpha})]^{R_j},$$

$$\ln L(\lambda,\alpha|U,Y,Z)=\sum_{j=1}^{k}n_j[\ln\alpha+\ln\lambda-(\alpha+1)\ln Y_j-\lambda Y_j^{-\alpha}]+\sum_{j=1}^{k}R_j[\ln\alpha+\ln\lambda-(\alpha+1)\ln Z_j-\lambda Z_j^{-\alpha}],$$

$$Q(\lambda,\alpha|\lambda^{(i)},\alpha^{(i)})=E[\ln L(\lambda,\alpha|U,Y,Z)|\lambda^{(i)},\alpha^{(i)}]=n(\ln\alpha+\ln\lambda)-(\alpha+1)\sum_{j=1}^{k}[n_jE(\ln Y_j)+R_jE(\ln Z_j)]-\lambda\sum_{j=1}^{k}[n_jE(Y_j^{-\alpha})+R_jE(Z_j^{-\alpha})].$$

M 步:把 $Q(\lambda,\alpha|\lambda^{(i)},\alpha^{(i)})$ 分别对 λ、α 求导,得出使 $Q(\lambda,\alpha|\lambda^{(i)},\alpha^{(i)})$ 极大化的点$(\lambda^{(i+1)},\alpha^{(i+1)})$. 对 λ 求导得

$$\partial Q/\partial\lambda=n/\lambda-\sum_{j=1}^{k}[n_jE(Y_j^{-\alpha})+R_jE(Z_j^{-\alpha})].$$

令 $\partial Q/\partial\lambda=0$ 可得

$$\lambda=n/\sum_{j=1}^{k}[n_jE(Y_j^{-\alpha})+R_jE(Z_j^{-\alpha})].$$

取上式中的 $\alpha=\alpha^{(i)}$,$\lambda=\lambda^{(i+1)}$,则可得

$$\lambda^{(i+1)} = n \Big/ \sum_{j=1}^{k} [n_j E(Y_j^{-\alpha^{(i)}}) + R_j E(Z_j^{-\alpha^{(i)}})]. \tag{9}$$

由于

$$E(Y_1^{-\alpha^{(i)}}) = \frac{\alpha^{(i)}\lambda^{(i)}\int_0^{T_1} y^{-(2\alpha^{(i)}+1)}\exp(-\lambda^{(i)}y^{-\alpha^{(i)}})\,dy}{\exp(-\lambda^{(i)}T_1^{-\alpha^{(i)}})} = T_1^{-\alpha^{(i)}} + 1/\lambda^{(i)}, \tag{10}$$

$$E(Y_j^{-\alpha^{(i)}}) = \frac{\alpha^{(i)}\lambda^{(i)}\int_{T_{j-1}}^{T_j} y^{-(2\alpha^{(i)}+1)}\exp(-\lambda^{(i)}y^{-\alpha^{(i)}})\,dy}{\exp(-\lambda^{(i)}T_j^{-\alpha^{(i)}}) - \exp(-\lambda^{(i)}T_{j-1}^{-\alpha^{(i)}})} = [(T_j^{-\alpha^{(i)}} + 1/\lambda)\exp(-\lambda^{(i)}T_j^{-\alpha^{(i)}}) - (T_{j-1}^{-\alpha^{(i)}} + 1/\lambda)\exp(-\lambda^{(i)}T_{j-1}^{-\alpha^{(i)}})] \Big/ [\exp(-\lambda^{(i)}T_j^{-\alpha^{(i)}}) - \exp(-\lambda^{(i)}T_{j-1}^{-\alpha^{(i)}})],\ j = 2,3,\cdots,k. \tag{11}$$

$$E(Z_j^{-\alpha^{(i)}}) = \frac{\alpha^{(i)}\lambda^{(i)}\int_{T_j}^{+\infty} z^{-(2\alpha^{(i)}+1)}\exp(-\lambda^{(i)}z^{-\alpha^{(i)}})\,dz}{1-\exp(-\lambda^{(i)}T_j^{-\alpha^{(i)}})} = \frac{1}{\lambda^{(i)}} - \frac{T_j^{-\alpha^{(i)}}\exp(-\lambda^{(i)}T_j^{-\alpha^{(i)}})}{1-\exp(-\lambda^{(i)}T_j^{-\alpha^{(i)}})},\ j = 1,2,\cdots,k. \tag{12}$$

把(10) ~ (12) 式代入(9) 式得到参数 λ 的迭代公式.

将 $Q(\lambda,\alpha|\lambda^{(i)},\alpha^{(i)})$ 对 α 求导得

$$\partial Q/\partial\alpha = n/\alpha - \sum_{j=1}^{k}[n_j E(\ln Y_j) + R_j E(\ln Z_j)] + \lambda\sum_{j=1}^{k}[n_j E(Y_j^{-\alpha}\ln Y_j) + R_j E(Z_j^{-\alpha}\ln Z_j)].$$

令 $\partial Q/\partial\alpha = 0$ 得

$$\alpha = n\Big\{\sum_{j=1}^{k}[n_j E(\ln Y_j) + R_j E(\ln Z_j)] - \lambda\sum_{j=1}^{k}[n_j E(Y_j^{-\alpha}\ln Y_j) + R_j E(Z_j^{-\alpha}\ln Z_j)]\Big\}^{-1}.$$

取上式右边的 $\lambda = \lambda^{(i+1)}$,则

$$\alpha = n\Big\{\sum_{j=1}^{k}[n_j E(\ln Y_j) + R_j E(\ln Z_j)] - \lambda^{(i+1)}\sum_{j=1}^{k}[n_j E(Y_j^{-\alpha}\ln Y_j) + R_j E(Z_j^{-\alpha}\ln Z_j)]\Big\}^{-1}.$$

根据(6) ~ (8) 式给出的 Y_j、$Z_j(j = 1,2,\cdots,k)$ 的后验条件密度,则

$$\alpha = n\Big\{\sum_{j=1}^{k}\Big[n_j\int_{T_{j-1}}^{T_j}\ln y\cdot f_j(y)\,dy + R_j\int_{T_j}^{+\infty}\ln z\cdot p_j(z)\,dz\Big] - \lambda^{(i+1)}\sum_{j=1}^{k}\Big[n_j\int_{T_{j-1}}^{T_j} y^{-\alpha}\ln y\cdot f_j(y)\,dy + R_j\int_{T_j}^{+\infty} z^{-\alpha}\ln z\cdot p_j(z)\,dz\Big]\Big\}^{-1}.$$

若令

$$h(\alpha) = n\Big\{\sum_{j=1}^{k}\Big[n_j\int_{T_{j-1}}^{T_j}\ln y\cdot f_j(y)\,dy + R_j\int_{T_j}^{+\infty}\ln z\cdot p_j(z)\,dz\Big] - \lambda^{(i+1)}\sum_{j=1}^{k}\Big[n_j\int_{T_{j-1}}^{T_j} y^{-\alpha}\ln y\cdot f_j(y)\,dy + R_j\int_{T_j}^{+\infty} z^{-\alpha}\ln z\cdot p_j(z)\,dz\Big]\Big\}^{-1}, \tag{13}$$

则可得

$$h(\alpha) = \alpha. \tag{14}$$

在计算机上可以利用数值方法来寻找满足(14) 式的近似解,此解就是参数 α 的第 $i+1$ 次迭代估计值 $\alpha^{(i+1)}$. 这样就形成了 1 次迭代$(\lambda^{(i)},\alpha^{(i)}) \to (\lambda^{(i+1)},\alpha^{(i+1)})$,给定$(\lambda,\alpha)$ 的初始值,重复上述过程就可以得到参数 λ、α 的最终估计值.

由于(13) 式中的定积分没有显式表达式,只能进行近似计算,且计算较复杂,因此可采用下列方法来求参数 α、λ 的估计.

步骤 1　给定参数 α 的一个值,记为 $\alpha_{(1)}$;

步骤 2　给定参数 λ 的迭代初值 $\lambda^{(0)}$,对于给定的很小正数 ε,通过迭代方程(9),当 $|\lambda^{(i+1)} - \lambda^{(i)}| < \varepsilon$ 时,记 $\lambda_{(1)} = \lambda^{(i+1)}$,则$(\alpha_{(1)},\lambda_{(1)})$ 就是对应参数(α,λ) 的第 1 次估计值;

步骤 3　将$(\alpha_{(1)},\lambda_{(1)})$ 代入到(3) 式中,计算对数似然函数的值;

步骤 4　重复步骤 1 ~ 3,直到对数似然函数的值达到最大,即 $\ln L(\alpha_{(j)},\lambda_{(j)}) = \max\{\ln L(\alpha,\lambda)\}$,则最优的 $\alpha_{(j)}$ 和 $\lambda_{(j)}$ 就是所要寻求的未知参数的估计,记为 $\hat{\alpha}$、$\hat{\lambda}$.

步骤 1 ~ 4 可在计算机上编程,采用逐渐搜索的方法,最终得到未知参数 α、λ 的估计.

由文献[16-19] 可知,EM 算法是数据缺失下参数估计的一种较好的方法. 为了说明在本文中使用 EM 算法求未知参数的估计是可行的,下面用数值模拟的方法进行验证.

3　数值模拟

设总体 X 服从逆威布尔分布(2),取参数 $\lambda = 2$,$\alpha = 1.5$,预先确定的 7 个观测时刻分别为 $T_1 = 1.0$,$T_2 = 1.5$,$T_3 = 2.0$,$T_4 = 3.0$,$T_5 = 5.0$,$T_6 = 10.0$,$T_7 = 16.0$. 随机确定每一观测时刻 T_i 的截尾数 R_i,当取不同的 n 值时,利用 Matlab 软件模拟产生了 10 个逐步 I 型区间删失样本,列于表 1 中.

表 1 逐步 I 型区间删失样本

n	$(n_1,R_1,n_2,R_2,n_3,R_3,n_4,R_4,n_5,R_5,n_6,R_6,n_7,R_7)$	编号
800	(108,30,154,24,114,20,130,15,102,14,55,10,12,12)	1
	(100,32,164,28,109,23,123,18,94,12,61,8,14,14)	2
600	(87,31,108,27,85,21,86,18,69,10,36,9,6,7)	3
	(78,29,123,25,76,20,86,17,73,12,42,8,5,6)	4
500	(72,25,91,20,66,16,80,12,55,8,36,4,7,8)	5
	(66,22,98,18,72,14,77,10,64,8,31,5,8,7)	6
400	(58,25,72,20,50,13,60,12,40,10,26,7,4,3)	7
	(49,24,78,20,56,15,55,12,46,8,22,6,5,4)	8
200	(26,15,38,13,24,10,29,8,16,6,9,2,2,2)	9
	(30,16,34,12,28,10,25,7,21,4,8,0,3,2)	10

根据表 1 中的样本,运用 EM 算法得到了未知参数估计的近似值,计算出相对偏差 $B(\hat{\theta})/\theta = |(\hat{\theta}-\theta)/\theta|$,相关结果列于表 2 中.

从表 2 中的分析结果来看,在利用逐步 I 型区间删失样本对逆威布尔分布的参数进行估计时,利用 EM 算法所得到的参数估计值与真值非常接近,相对偏差很小.

表 2 参数估计值及相对偏差

编号	$\hat{\alpha}$	$\hat{\lambda}$	$B(\hat{\alpha})/\alpha$	$B(\hat{\lambda})/\lambda$
1	1.505	2.004	0.003 3	0.002 0
2	1.495	2.041	0.003 3	0.020 5
3	1.475	1.944	0.016 7	0.028 0
4	1.510	2.021	0.006 7	0.010 5
5	1.472	1.954	0.018 7	0.023 0
6	1.535	2.022	0.023 3	0.011 0
7	1.445	1.938	0.036 7	0.031 0
8	1.525	2.077	0.016 7	0.038 5
9	1.485	2.017	0.010 0	0.008 5
10	1.513	1.931	0.008 7	0.034 5

4 结论

本文基于逐步 I 型区间删失数据,通过 EM 算法给出了逆威布尔分布未知参数极大似然估计的近似求法,由于涉及到复杂的定积分计算,给出了求参数估计的另一种方法,并且可在计算机上编程实现. 最后通过随机模拟的方法产生了 10 个样本,利用提出的方法给出了每一个样本下的参数估计值,其相对偏差较小,估计效果较好. 另外,还可把本文的方法运用到其他 2 参数寿命分布的参数估计中.

5 参考文献

[1] 魏艳华,王丙参,孙永辉. 定数截尾逆威布尔分布参数的贝叶斯估计[J]. 统计与决策,2014(11):12-15.

[2] 苏韩,韦程东,韦师,等. 平方损失下逆威布尔分布参数的 Bayes 估计[J]. 广西师范学院学报:自然科学版,2009,26(4):32-35.

[3] 王新长. 逆 Weibull 分布参数的点估计和联合置信域估计[J]. 统计与决策,2015(2):16-18.

[4] 仲崇刚,韦程东,吕孝亮. 复合 LINEX 对称损失下逆威布尔分布尺度参数的 E-Bayes 估计[J]. 广西师范学院学报:自然科学版,2011,28(4):37-38.

[5] 魏艳华,王丙参,孙永辉. 分组数据场合逆威布尔分布参数贝叶斯估计的混合 Gibbs 算法[J]. 四川大学学报:自然科学版,2014,51(1):31-39.

[6] 魏艳华,王丙参,孙永辉. 分组数据场合逆威布尔分布参数估计[J]. 统计与决策,2014(2):12-15.

[7] 魏艳华,王丙参,何万生. 利用样本分位数求逆威布尔分布参数的渐近估计[J]. 统计与决策,2011(16):167-169.

[8] 彭秀云. 基于广义逐次截尾数据的逆威布尔分布可靠性推断[D]. 呼和浩特:内蒙古工业大学,2013.

[9] 师义民,师小琳. 逆威布尔部件的可靠性估计[J]. 西北工业大学学报,2015,33(4):694-698.

[10] 韩庆田,卢洪义,杨兴根. 逆威布尔分布模型及其应用[J]. 质量与可靠性,2006(4):18-21.

[11] 韩庆田,李文强,曹文静. 发动机无失效数据可靠性评估研究[J]. 航空计算技术,2012,42(1):65-67.

[12] Qiu Guoxin,Jiang Haibo. Comparisons on order statistics from heterogeneous inverse Weibull distributions[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics,2015,32(4):590-598.

[13] 任瑞,周秀轻. 逐步 I 型区间删失数据下的参数估计[J]. 南京师大学报:自然科学版,2011,34(3):7-12.

[14] 吴悦. Pareto 分布在逐步 I 型区间删失下的参数估计[D]. 上海:华东师范大学,2012.

[15] 沈新娣,丁邦俊. Pareto 分布在逐步 II 型区间删失下的参数估计[J]. 应用概率统计,2016,32(2):132-146.

[16] 茆诗松,王静龙,濮晓龙. 高等数理统计[M]. 2 版. 北京:高等教育出版社,2006:432-433.

(下转第 534 页)

[J]. 经济数学,2016,33(1):65-67.
[12] Blackwell D. An analog of minimax theorem for vector payoffs [J]. Pac J Math,1956,6(1):1-8.
[13] Sharpley L S. Equilibrium points in games with vector payoffs [J]. Naval Research Logistics Quarterly,1959,6(1):57-61.
[14] Yang Hui,Yu Jian. Essential components of the set of weakly Pareto-Nash equilibrium points [J]. Applied Mathematics Letters,2002,15(5):553-560.
[15] Yang Hui. Essential components of the set of weakly Pareto-Nash equilibria for multiobjective generalized games [M]//Petrosyan L A,Yeung D W. Icm Millennium Lectures on Games,Berlin:Springer,2003:267-278.
[16] Scalzo V. Remarks on the existence and stability of some relaxed Nash equilibrium in strategic form games [J]. Economic Theory,2016,61(3):1-16.

The Existence of Weakly Pareto-Nash Equilibria for Vector Payoff Games under Constraint Game with Generalized Largest Element

LU Meihua[1],WANG Qingling[1],ZUO Yonghua[2,3*]
(1. School of Science,Jiangxi University of Technology,Nanchang Jiangxi 330022,China;
2. College of Mathematics and Informatics,Jiangxi Normal University,Nanchang Jiangxi 330022,China;
3. Graduate School at Shenzhen,Tsinghua University,Shenzhen Guangdong 518055,China)

Abstract: In the paper,the generalized-largest-element method is used to study the existence of weakly Pareto-Nash equilibria for vector payoff games. A Nash equilibrium existence theorem of the model is given without concrete payoff function or transitive preference,which generalize Nash equilibrium existence of previous game models.
Key words: generalized largest element; vector payoff games; weakly Pareto-Nash equilibria

(责任编辑:曾剑锋)

(上接第 530 页)
[17] 吴丹阳,曹显兵. I 型逐阶删失数据下基于 EM 算法的 Weibull 参数估计 [J]. 数学的实践与认识,2015,45(16):196-202.
[18] Wang Yashi,Wang Xuanhe,Wang Ziyue. Estimation of parameters based on type-II hybrid censored data by EM algorithm [J]. Chinese Journal of Applied Probability and Statistics,2016,32(2):121-131.
[19] 木拉提·吐尔德,胡锡健. EM 算法在删失数据分布和混合分布参数估计中的应用 [J]. 统计与决策,2011(15):161-163.

The Parameter Estimation of Inverse Weibull Distribution under Progressive Type-I Interval Censoring

LONG Bing
(School of Mathematics and Physics,Jingchu University of Technology,Jingmen Hubei 448000,China)

Abstract: Based on progressive type-I interval censored samples,the maximum likelihood estimation of the unknown parameters can´t be obtained by solving the likelihood equation. The iterative formulas of the parameter estimation are obtained by EM algorithm,in order to simplify the calculation process,another method of parameter estimation is obtained in this paper. It can be seen that the estimated values of the parameters are very close to the true values through numerical simulation,and the relative deviation are small,which shows that the EM algorithm is feasible.
Key words: inverse Weibull distribution; progressive type-I interval censoring; EM algorithm; maximum likelihood estimation

(责任编辑:曾剑锋)