文章编号: 1000-5862(2018)05-0531-04

约束广义最大元下向量支付弱 Pareto-Nash 均衡的存在性

卢美华[1],王清玲[1],左勇华[2,3*]

(1. 江西科技学院理学部,江西 南昌 330022; 2. 江西师范大学数学与信息科学学院,江西 南昌 330022;
3. 清华大学深圳研究生院,广东 深圳 518055)

摘要: 利用广义最大元方法研究向量支付弱 Pareto-Nash 均衡的存在性,得到了约束广义最大元对策均衡的存在性定理,该定理剔除了具体支付函数,其中偏好也不一定蕴含传递性,广义最大元对策拓宽了均衡存在性的研究内容.

关键词: 广义最大元; 向量支付对策; 弱 Pareto-Nash 均衡

中图分类号: O 225 **文献标志码**: A **DOI**: 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2018.05.17

0 引言

当前,在数理经济学中数学研究的进路逐渐收窄,但应用却日趋广泛,2016 年诺贝尔经济学奖授予契约理论表明: 机制设计仍然是理论的热点. 机制设计本质上是反求"达到'预想均衡'的条件",诚然以机制设计为核心的契约理论并不深入到基础技术研究中,但均衡的存在性、均衡点的精炼和选择仍然具有重要意义. 事实上,只有在均衡点存在的基础上才能得以进一步分析精炼均衡.

近年来,在更宽泛的条件下证明均衡存在性获得了一些进展. 俞建[1]把有限理性纳入到博弈模型中,推动了有限理性均衡问题的研究. 杨哲等[2]利用相关截口定理在大博弈中讨论了 Nash 均衡的存在性. 并且,由于现实中博弈决策目标一般是多维度的,从而,多目标博弈 Pareto-Nash 均衡点受到更多的关注. 林志[3]研究了一个新的弱 Pareto-Nash 均衡点存在性,蒲勇健等[4]研究了向量支付下的轻微利他 Pareto-Nash 均衡,杨哲等[5]研究的主从博弈本质上可以构造成一种分层加权形式. 杨哲等[6]从广义不确定的角度研究多目标博弈弱 Pareto-Nash 均衡点集的存在性与本质连通区. 贾文生等[7]从信息集的角度研究多目标博弈弱 Pareto-Nash 平衡点的存在性和稳定性. 这些研究拓广了均衡存在性的研究范围,由此精炼和选择可以在更宽泛的基础上进行. 当然,在各种研究进路下均衡的存在性是否能统一描述和刻画尤为有意义,以此可以更厚实地关联理论基础和应用.

事实上,效用理论的统一性一直是经济学基础性问题[8-10],为此,筑基于序、偏好的研究. 并且非传递性偏好更贴近有限理性,从而剔除传递的均衡存在性研究尤为重要. 本文考察在非传递性偏好和约束下均衡的存在性,并把多目标博弈弱 Pareto-Nash 平衡点纳入此类均衡的存在性,由此推进各种研究进路下均衡存在性的统一描述.

1 预备知识

定义 1 X,Y 均为拓扑空间,$F: X\to 2^Y$ 为集值映射. 若对任何 $F(x_0)$ 在 Y 中开邻域 u,$\exists x_0$ 的邻域 v,对于 $x'\in v$ 有 $F(x')\subset u$,称 F 在点 x_0 处上半连续; 若 F 在 X 上每一点都上半连续,称 F 在 X 上上半连续; 若对任何 Y 中的开集 u 且 $u\cap F(x)\neq\varnothing$,必存在 x 的邻域 v,对于 $x'\in v$ 有 $F(x')\cap u\neq\varnothing$,称 $F: X\to 2^Y$ 在 x 处下半连续; 若 F 在 X 上每一点处都下半连续,称 F 在 X 上下半连续. F 在一点连续当且

收稿日期: 2018-03-25

基金项目: 国家社会科学基金(17BJL025)和国家自然科学基金(61563020)资助项目.

通信作者: 左勇华(1976-),男,江西湖口人,讲师,博士,主要从事数理经济、博弈论、产业经济和科技政策等方面的研究.
E-mail: zuo.yonghua@sz.tsinghua.edu.cn

仅当 F 在这一点处既上半连续又下半连续.

引理 1(Fan-Glicksberg 不动点定理) X 是局部凸线性拓扑空间的非空紧凸集,$F: X \to 2^X$ 上半连续且每个 $F(x)$ 为非空紧凸集,则 $\exists x^*$,使得 $x^* \in F(x^*)$.

设博弈局中人的集合 $N = \{1,2,\cdots,n\}$,第 i 人的策略集为 X_i,$\boldsymbol{X} = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$,$\hat{\boldsymbol{X}}_i = \boldsymbol{X}/X_i$,第 i 人有择优映射 $F_i: \boldsymbol{X} \to 2^{\boldsymbol{X}}$,相对于策略组合 $\boldsymbol{x}$,i 更偏好 $F_i(\boldsymbol{x})$,可行策略映射 $G_i: \hat{X}_i \to 2^{X_i}$. 称多元组 $\Gamma = (X_i, F_i, G_i)_{i \in N}$ 为约束广义最大元对策. 称 x_i^* 为第 i 人关于 $\hat{x}_i^*$ 的最优对策,当 $(x_i^*, \hat{x}_i^*) \in \bigcap_{z_i \in G_i(\hat{x}_i^*)} F_i(z_i, \hat{x}_i^*)$ 且 $x_i^* \in G_i(\hat{x}_i^*)$. 称 $\boldsymbol{x}^* \in \boldsymbol{X}$ 为约束广义最大元对策 Γ 的 Nash 均衡点,若 $\forall i \in N$ 有 $(x_i^*, \hat{x}_i^*) \in \bigcap_{z_i \in G_i(\hat{x}_i^*)} F_i(z_i, \hat{x}_i^*)$ 且 $x_i^* \in G_i(\hat{x}_i^*)$.

引理 2[11] 对于约束广义最大元对策 $\Gamma = (X_i, F_i, G_i)_{i \in N}$,$\forall i \in N$,若 $\forall \boldsymbol{x} = (x_i, \hat{x}_i)$,$F_i(\boldsymbol{x}) \cap X_i \times \hat{x}_i$、$G_i(\hat{x}_i)$ 均凸,同时 $\{\bigcap_{z_i \in G_i(\hat{x}_i^*)} F_i(z_i, \hat{x}_i^*)\} \cap G_i(\hat{x}_i) \times \hat{x}_i \neq \varnothing$,且 F_i 的图像 $G_{raph}(F_i)$ 在 $\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{X}$ 中闭,G_i 连续且为闭集,则约束广义最大元对策 Γ 必有 Nash 均衡点.

引理 2 表明在不具传递性偏好下广义最大元对策存在 Nash 均衡;$\Gamma = (X_i, F_i, G_i)_{i \in N}$ 剔除了支付函数而采用集值映射 $F_i: X \to 2^X$ 刻画了偏好选择和择优行为. 在一些效用函数下的均衡存在性定理是引理 2 的特例. 显然,左勇华[11] 说明了一般支付函数构造的对策可纳入广义最大元对策 $\Gamma = (X_i, F_i, G_i)_{i \in N}$,从而杨哲等[5] 定义的社会 Nash 均衡也可纳入此类广义最大元对策 $\Gamma = (X_i, F_i, G_i)_{i \in N}$ 中. 对于多目标博弈可以定义择优映射 F_i 为

$F_i(x_i, \hat{x}_i) = \{(y_i, \hat{x}_i) \mid \boldsymbol{f}_i(y_i, \hat{x}_i) - \boldsymbol{f}_i(x_i, \hat{x}_i) \notin \operatorname{int} C_i\}$,这里 C_i 是凸尖锥,$\boldsymbol{f}_i(x_i, \hat{x}_i)$ 是向量函数.

2 主要结果

下面将讨论向量支付意义下博弈的 Nash 均衡存在性定理,并证明向量支付对策同样可以纳入广义最大元对策 $\Gamma = (X_i, F_i, G_i)_{i \in N}$ 中. 事实上,D. Blackwell[12] 最早引入向量支付对策,推广了一般标量对策,但 D. Blackwell 最早讨论的是向量支付的零和对策. L. S. Sharpley[13] 提出向量支付对策的均衡点概念,向量支付对策的基本框架才得以建立,从而给出了一系列均衡存在性定理. Yang Hui 等[14] 给出了向量值支付弱 Pareto-Nash 均衡的存在定理. 以下采用文献[12]建立的博弈框架和相关概念,以此研究广义最大元对策 Γ 对向量支付对策的吸纳.

设局中人的集合 $N = \{1,2,\cdots,n\}$,对每个 $i \in N$,X_i 是第 i 人的策略集,记 $\boldsymbol{X} = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$,$\hat{\boldsymbol{X}}_i = X_1 \times \cdots \times X_{i-1} \times X_{n+1} \times \cdots \times X_n$,且有正整数 m_i,记 $R_+^{m_i} = \{(r_1, r_2, \cdots, r_{m_i}) \in \mathbf{R}^{m_i} \mid r_j \geqslant 0, 1 \leqslant j \leqslant m_i\}$,显然 $R_+^{m_i}$ 是凸尖锥. 对每个 i,$G_i: \hat{X}_i \to 2^{X_i}$ 为其可行策略映射,$\boldsymbol{f}^i: \boldsymbol{X} \to \mathbf{R}^{m_i}$ 是第 i 人的向量支付函数,称多元组 $\Gamma = (X_i, G_i, \boldsymbol{f}^i)_{i \in N}$ 为 n 人多目标广义对策.

定义 2 在 n 人多目标广义对策 $\Gamma = (X_i, \boldsymbol{f}^i, G_i)_{i \in N}$ 中,称 $\boldsymbol{x}^* \in \boldsymbol{X}$ 为弱 Pareto-Nash 均衡,若 $\forall i \in N$,$\boldsymbol{x}^* = (x_i^*, \hat{x}_i^*)$ 有 $x_i^* \in G_i(\hat{x}_i^*)$ 且 $\boldsymbol{f}^i(y_i, \hat{x}_i^*) - \boldsymbol{f}^i(\boldsymbol{x}^*) \notin \operatorname{int} R_+^{m_i}$,$\forall y_i \in G_i(\hat{x}_i^*)$.

定义 2 表明,在可行策略集中,向量支付在任何点处的每个分量函数值不可能同时严格地比均衡点处的大. 本质上,这里引入了一个锥序描述弱序式偏好.

文献[14]给出了一个弱 Pareto-Nash 均衡的存在性定理.

定理 1 n 人多目标广义对策 $\Gamma = (X_i, \boldsymbol{f}^i, G_i)_{i \in N}$ 适合:(i) 每个 X_i 是 Banach 空间的非空紧凸集;(ii) 每个 G_i 在 $\hat{X}_i$ 上连续且非空闭凸集;(iii) $\forall i \in N$,存在某个 $1 \leqslant j_i \leqslant m_i$,$f_{j_i}^i$ 在 X 上连续且 $u_i \to f_{j_i}^i(u_i, \hat{x}_i)$ 拟凹,其中 $\boldsymbol{f}^i = (f_1^i, f_2^i, \cdots, f_{m_i}^i)$,则对策 Γ 有弱 Pareto-Nash 均衡.

这里博弈决策和选择的意义是第 i 人只依赖第 j_i 目标来参与决策.

证 在 i 的完整偏好下,择优映射 F_i 为 $F_i(x) = \{(y_i, \hat{x}_i) \mid \boldsymbol{f}^i(x_i, \hat{x}_i) - \boldsymbol{f}^i(y_i, \hat{x}_i) \notin \operatorname{int} R_+^{m_i}\}$. 事实上,由弱 Pareto-Nash 均衡概念知,只要对每个 i,就其特定的 j_i 作择优映射 $F'_i: \boldsymbol{X} \to 2^X$ 为 $F'_i(\boldsymbol{x}) = \{(y_i, \hat{x}_i) \mid f_{j_i}^i(y_i, \hat{x}_i) \geqslant f_{j_i}^i(x)\}$,其中 $\boldsymbol{x} = (x_i, \hat{x}_i)$.

由于每个 G_i 都连续且闭凸集,且 $u_i \to f_{j_i}^i(u_i, \hat{x}_i)$ 凹,则 $F'_i(x) \cap X_i \times \hat{x}_i$ 一定凸. 由 $f_{j_i}^i$ 连续知,能在 $G_i(\hat{x}_i)$ 上取得最大值,$\{\bigcap_{z_i \in G_i(\hat{x}_i)} F_i(z_i, \hat{x}_i)\} \cap G_i(\hat{x}_i) \times \hat{x}_i \neq \varnothing$. 又由 $f_{j_i}^i$ 连续得 F'_i 的图像闭. 根据引理 2,则必有 Nash 均衡点. 但是,由于采用特定的 j_i 作择优映射,故而此均衡点是弱 Pareto-Nash 均衡点.

定理 1 是文献[4]在向量支付意义下弱 Pareto-Nash 均衡存在性的推广，这里支付函数被削弱为某一个分量的连续性和拟凹性.

以下是文献[4]的关于向量支付意义下的一个结果.

定理 2　n 人多目标广义对策 $\Gamma=(X_i,\boldsymbol{f}^i,G_i)_{i\in N}$ 适合：(i) 每个 X_i 是 Banach 空间的非空紧凸集；(ii) 每个 G_i 在 $\hat{X}_i$ 上连续且非空闭凸集；(iii) $\forall i\in N,1\leqslant j\leqslant m_i,\boldsymbol{f}^i=(f^i_1,f^i_2,\cdots,f^i_{m_i})$ 中 f^i_j 在 X 上连续；(iv) $\forall i\in N,1\leqslant j\leqslant m_i,u_i\to f^i_j(u_i,\hat{x}_i)$ 凹，则对策 Γ 必有弱 Pareto-Nash 均衡.

显然，定理 2 的条件强于定理 1 的条件，从而存在弱 Pareto-Nash 均衡. 事实上，针对定理 2 的较强条件，给出更强的、更好的 Pareto-Nash 均衡定义，并给出 Pareto-Nash 均衡的存在性定理.

事实上，对每一个局中人 i 而言，取一个 $\boldsymbol{\lambda}_i=(\lambda^1_i,\lambda^2_i,\cdots,\lambda^{m_i}_i)$，其中 $\boldsymbol{\lambda}_i$ 的每一分量均为正数，取

$$F'_i(\boldsymbol{x})=\left\{(y_i,\hat{x}_i)\ \middle|\ \sum_{k=1}^{m_i}\lambda^k_i f^i_k(y_i,\hat{x}_i)\geqslant\sum_{k=1}^{m_i}\lambda'_i f^i_k(\boldsymbol{x})\right\},$$

其中 $\boldsymbol{x}=(x_i,\hat{x}_i)$，则 F'_i 也是适合引理 2 条件的一个择优函数，从而也存在一个均衡，这种均衡是加权意义下的均衡，而且是 Pareto 最优的，称为 Pareto-Nash 均衡. Pareto-Nash 均衡是要求每一个局中人及其每个目标同时达到最优是不现实的，于是局中人就权衡利弊，对每一个目标确定一个权重来参与博弈；在既定的权重中，均衡状态下任何局中人不可能改善一个目标的支付，而又不损害其他任何目标的支付.

显然，由于采用了权重的方法，Pareto-Nash 均衡必然是弱 Pareto-Nash 均衡. 当然，由于对择优映射作了一次选择，所以通过以上方法，并不能找出所有的弱 Pareto-Nash 均衡，但被剔除的弱 Pareto-Nash 均衡正是可以被改进的均衡. 以下是 Pareto-Nash 均衡的存在性定理.

定理 3　n 人多目标广义对策 $\Gamma=(X_i,\boldsymbol{f}^i,G_i)_{i\in N}$ 适合：(i) $\forall i\in N,X_i$ 是 Banach 空间的非空紧凸集；(ii) $\forall i\in N,G_i$ 在 $\hat{X}_i$ 上连续且非空闭凸集；(iii) $\forall i\in N,1\leqslant j\leqslant m_i,f^i_j$ 在 X 上连续，其中 $\boldsymbol{f}^i=(f^i_1,f^i_2,\cdots,f^i_{m_i})$；(iv) $\forall i\in N,1\leqslant j\leqslant m_i,u_i\to f^i_j(u_i,\hat{x}_i)$ 是凹的，则对策 Γ 必有 Pareto-Nash 均衡.

3　结论与展望

本文利用广义最大元对策对多目标向量支付对策进行了统一. 广义最大元对策剔除支付函数而直接采用偏好关系构建博弈模型，这类偏好并不必然的含有传递性，并非经典意义上的偏好. 所以，广义最大元对策的均衡存在性定理对均衡做了实质性的拓展.

Yang Hui 等[15]的向量支付意义下弱 Pareto-Nash 均衡存在性也可以借助这类非传递性偏好推广，文献[4]以加权方法处理博弈. 但采用本文方法可以把其中的支付函数削弱为某一个分量的连续性和拟凹性.

另一方面，和加权意义不同，对于向量支付可以考虑分层权重，以不同的、不可跨越的优先层级赋予向量支付函数中的分量[16]，这类效用函数的博弈均衡仍然能利用本文的方法加以处理，后文将给出有关结果. 序贯均衡如何纳入最大元 Nash 均衡是下一步将要重点研究的内容.

考虑分层权重，在定理 2 的条件下是否存在 Nash 均衡？另外，分层权重向量支付的对策与广义最大元对策的关系是怎样的？这些问题有待于进一步研究.

4　参考文献

[1] 俞建. 几类考虑有限理性平衡问题解的稳定性[J]. 系统科学与数学，2009，29(7)：999-1008.

[2] 杨哲，蒲勇健. 大博弈中 Nash 均衡的存在性[J]. 系统科学与数学，2010，30(12)：1606-1612.

[3] 林志. 一个新的弱 Pareto-Nash 均衡点存在性结果[J]. 系统科学与数学，2009，29(6)：849-853.

[4] 蒲勇健，杨哲. 轻微利他弱 Pareto-Nash 均衡[J]. 系统科学与数学，2010，30(9)：1259-1266.

[5] 杨哲，蒲勇健. 单主多从博弈中中级社会 Nash 均衡的存在性与应用[J]. 系统科学与数学，2013，33(7)：777-784.

[6] 杨哲，蒲勇健. 广义不确定下广义多目标博弈弱 Pareto-Nash 均衡点集的存在性与本质连通区[J]. 系统科学与数学，2011，31(12)：1613-1621.

[7] 贾文生，向淑文. 信息集广义多目标博弈弱 Pareto-Nash 平衡点的存在性和稳定性[J]. 运筹学学报，2015，19(1)：9-17.

[8] Samuelson P A. Consumption theory in terms of revealed preference[J]. Economica，1948，15(60)：243-253.

[9] 肯尼斯·J 阿罗. 社会选择与个人价值[M]. 丁建锋，译. 上海：上海人民出版社，2010.

[10] 阿马蒂亚·森. 集体选择与社会福利[M]. 胡的的，胡毓达，译. 上海：上海科学技术出版社，2004.

[11] 左勇华. 约束形式下广义最大元 Nash 均衡的存在性

[J]. 经济数学,2016,33(1):65-67.

[12] Blackwell D. An analog of minimax theorem for vector pay-offs [J]. Pac J Math,1956,6(1):1-8.

[13] Sharpley L S. Equilibrium points in games with vector pay-offs [J]. Naval Research Logistics Quarterly,1959,6(1):57-61.

[14] Yang Hui,Yu Jian. Essential components of the set of weakly Pareto-Nash equilibrium points [J]. Applied Mathematics Letters,2002,15(5):553-560.

[15] Yang Hui. Essential components of the set of weakly Pareto-Nash equilibria for multiobjective generalized games [M] //Petrosyan L A,Yeung D W. Icm Millennium Lectures on Games,Berlin: Springer,2003:267-278.

[16] Scalzo V. Remarks on the existence and stability of some relaxed Nash equilibrium in strategic form games [J]. Economic Theory,2016,61(3):1-16.

The Existence of Weakly Pareto-Nash Equilibria for Vector Payoff Games under Constraint Game with Generalized Largest Element

LU Meihua[1],WANG Qingling[1],ZUO Yonghua[2,3*]

(1. School of Science,Jiangxi University of Technology,Nanchang Jiangxi 330022,China;

2. College of Mathematics and Informatics,Jiangxi Normal University,Nanchang Jiangxi 330022,China;

3. Graduate School at Shenzhen,Tsinghua University,Shenzhen Guangdong 518055,China)

Abstract: In the paper,the generalized-largest-element method is used to study the existence of weakly Pareto-Nash equilibria for vector payoff games. A Nash equilibrium existence theorem of the model is given without concrete pay-off function or transitive preference,which generalize Nash equilibrium existence of previous game models.

Key words: generalized largest element; vector payoff games; weakly Pareto-Nash equilibria

(责任编辑:曾剑锋)

(上接第 530 页)

[17] 吴丹阳,曹显兵. I 型逐阶删失数据下基于 EM 算法的 Weibull 参数估计 [J]. 数学的实践与认识,2015,45(16):196-202.

[18] Wang Yashi,Wang Xuanhe,Wang Ziyue. Estimation of parameters based on type-II hybrid censored data by EM algorithm [J]. Chinese Journal of Applied Probability and Statistics,2016,32(2):121-131.

[19] 木拉提·吐尔德,胡锡健. EM 算法在删失数据分布和混合分布参数估计中的应用 [J]. 统计与决策,2011(15):161-163.

The Parameter Estimation of Inverse Weibull Distribution under Progressive Type-I Interval Censoring

LONG Bing

(School of Mathematics and Physics,Jingchu University of Technology,Jingmen Hubei 448000,China)

Abstract: Based on progressive type-I interval censored samples,the maximum likelihood estimation of the unknown parameters can´t be obtained by solving the likelihood equation. The iterative formulas of the parameter estimation are obtained by EM algorithm,in order to simplify the calculation process,another method of parameter estimation is obtained in this paper. It can be seen that the estimated values of the parameters are very close to the true values through numerical simulation,and the relative deviation are small,which shows that the EM algorithm is feasible.

Key words: inverse Weibull distribution; progressive type-I interval censoring; EM algorithm; maximum likelihood estimation

(责任编辑:曾剑锋)