文章编号:1000-5862(2018)06-0582-05

一类微差分方程整函数解的性质

吴丽镐
(华南理工大学广州学院计算机工程学院,广东 广州 510800)

摘要:利用值分布理论对一类微差分方程$f(z)^n + P(f) = \beta_1 e^{\alpha_1 z} + \beta_2 e^{\alpha_2 z} + \beta_3 e^{\alpha_3 z}$的整函数解的存在性、增长性和零点收敛指数进行了研究,其中α_i,$\beta_i(i=1,2,3)$为复常数,$P(f)$为$f(z)$的1阶微差分多项式,并推广了已有的一些结论.

关键词:微差分方程;整函数;收敛指数
中图分类号:O 174.52 文献标志码:A DOI:10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2018.06.05

0 引言和结果

本文采用Nevanlinna理论的标准记号[1-2].设$f(z)$是非常数的亚纯函数,分别用$\sigma(f)$、$\sigma_2(f)$和$\lambda(f)$表示$f(z)$的级、超级和零点收敛指数,并用$\delta(a,f)$表示复数a对于$f(z)$的亏量.

由于Nevanlinna理论的引入,有大量的文献关注于复微差分方程的整函数或亚纯函数解的存在性、唯一性和值分布问题[3-9].2006年,李平等[10]研究了一类非线性微分方程超越整函数解的存在性问题,得到了

定理A[10] 设$n \geqslant 4$是一个整数,$P_d(f)$表示$f(z)$的次数$d \leqslant n-3$且以$f(z)$的小函数为系数的微分多项式,设$p_1(z)$,$p_2(z)$是2个非零的多项式,α_1,α_2是2个非零的常数且满足α_1/α_2不是有理数,则方程

$$f(z)^n + P_d(f) = p_1(z)e^{\alpha_1 z} + p_2(z)e^{\alpha_2 z}$$

没有超越整函数解.

2011年,张杰等[11]考虑了在一定条件下,如果方程存在超越整函数解,讨论了解的值分布问题,得到了

定理B[11] 设$n \geqslant 3$是一个整数,$P_d(f)$是关于$f(z)$的微分多项式,其次数$d \leqslant n-2$.$p_1(z)$,$p_2(z)$是非零多项式,α_1,α_2是非零常数,且$\alpha_1/\alpha_2 \neq (d/n)^{\pm 1}$,1.若$f(z)$是方程

$$f(z)^n + P_d(f) = p_1(z)e^{\alpha_1 z} + p_2(z)e^{\alpha_2 z}$$

的超越整函数解,则有$\delta(0,f) = 0$.

2013年,廖良文等[12]研究了当$p_1(z)$,$p_2(z)$是有理式,$\alpha_1(z)$和$\alpha_2(z)$是多项式时,方程的精确亚纯解,获得下列结果.

定理C[12] 设$n \geqslant 3$是一个整数,$P_d(f)$是$f(z)$的次数为d且以有理函数为系数的微分多项式,设$p_1(z)$,$p_2(z)$是有理函数,α_1和α_2是多项式.如果$d \leqslant n-2$,微分方程

$$f(z)^n + P_d(f) = p_1(z)e^{\alpha_1(z)} + p_2(z)e^{\alpha_2(z)}$$

有一个仅有有限多个极点的亚纯解,则α_1'/α_2'是一个有理数.进一步地,仅有下列4种情形之一成立:

(i)$f(z) = q(z)e^{P(z)}$,$\alpha_1'/\alpha_2' = 1$,其中$q(z)$是一个有理函数,$P(z)$是一个多项式且满足$nP'(z) = \alpha_1' = \alpha_2'$;

(ii)$f(z) = q(z)e^{P(z)}$,$\alpha_1'/\alpha_2' = k/n$或$\alpha_1'/\alpha_2' = n/k$,其中$q(z)$是一个有理函数,$k$是一个整数且满足$1 \leqslant k \leqslant n$,$P(z)$是一个多项式且满足$nP'(z) = \alpha_1'$或$nP'(z) = \alpha_2'$;

(iii)f满足1阶线性微分方程

$$f' = \left(\frac{1}{n}\frac{p_2'}{p_2} + \frac{1}{n}\alpha_2'\right)f + \varphi, \frac{\alpha_1'}{\alpha_2'} = \frac{n-1}{n},$$

或者f满足1阶线性微分方程

$$f' = \left(\frac{1}{n}\frac{p_1'}{p_1} + \frac{1}{n}\alpha_1'\right)f + \varphi, \frac{\alpha_1'}{\alpha_2'} = \frac{n}{n-1},$$

其中φ是一个有理函数;

(iv)$f(z) = \gamma_1(z)e^{\beta_1(z)} + \gamma_2(z)e^{-\beta_1(z)}$,$\alpha_1'/\alpha_2' = -1$,其中$\gamma_1$和$\gamma_2$是有理函数,$\beta_1(z)$是一个多项式且满足$n\beta_1' = \alpha_1'$或$n\beta_1' = \alpha_2'$.

上述定理中,所讨论方程右边的形式皆为$p_1 e^{\alpha_1 z} + p_2 e^{\alpha_2 z}$.由此自然想到,对于方程的右边超过2项相加

收稿日期:2018-06-15
基金项目:国家自然科学基金(11761035)和广东省普通高校青年创新人才(2015KQNCX230)资助项目.
作者简介:吴丽镐(1982-),男,广东汕头人,副教授,主要从事复分析研究.E-mail:wulh@gcu.edu.cn

的情况,解的存在性和性质如何? 为此,本文将研究微差分方程

$$f(z)^n + P(f) = \beta_1 e^{\alpha_1 z} + \beta_2 e^{\alpha_2 z} + \beta_3 e^{\alpha_3 z}, \quad (1)$$

应用 Nevanlinna 理论和线性代数理论,得到了其整函数解的存在性、增长性和零点收敛指数,扩充了已有的结论.

定理 1　设 $n \geqslant 5$ 为整数,$\beta_i(i=1,2,3)$ 为非零复常数,$\alpha_i(i=1,2,3)$ 为互不相等的非零复常数,且对于 $i,j \in \{1,2,3\}$,有 $\alpha_i \neq n\alpha_j$. 若 $P(f)$ 满足下列条件之一:

(i) $P(f) = q(f(z+\eta))^{(m)}$,其中 $m \geqslant 0$ 为整数,$q \neq 0$,η 为复常数;

(ii) $P(f) = q(z)f(z+\eta)$,其中 $q(z) \not\equiv 0$ 为有理式,η 为复常数,

则方程(1) 没有有限级整函数解.

例 1　方程 $f(z)^4 - 4\sqrt[3]{1.5}f\left(z+\frac{1}{3}\ln\frac{2}{3}\right) = e^{-8z} + 4e^{-5z} + e^{4z}$ 有整函数解 $f(z) = e^{-2z} + e^{z}$.

注 1　由例 1 说明,在定理 1 中,当 $n=4$ 时,方程(1) 可能存在有限级整函数解,即定理 1 中 $n \geqslant 5$ 这个条件不能放宽.

定理 2　设 $n \geqslant 2$ 为整数,$\beta_i(i=1,2,3)$ 为非零复常数,$\alpha_i(i=1,2,3)$ 为互不相等的非零复常数,且对于 $i,j \in \{1,2,3\}$,有 $\alpha_i \neq n\alpha_j$. 假设 $P(f) = q(z)(f(z+\eta))^{(m)}$,其中 $m \geqslant 0$ 为整数,$q(z) \not\equiv 0$ 为有理式,η 为复常数,若方程(1) 有有限级整函数解 $f(z)$,则 $\lambda(f) = \sigma(f) = 1$.

例 2　方程 $f(z)^2 + (f(z+\pi i))''/4 = -e^z/4 - 2e^{3z} + e^{4z}$ 有整函数解 $f(z) = e^z - e^{2z}$.

注 2　由例 1 和例 2 说明,在定理 2 中,当 $n \geqslant 2$ 时,方程(1) 可能存在有限级整函数解 $f(z)$,并且满足结论 $\lambda(f) = \sigma(f) = 1$.

1　相关引理

引理 1[13]　设 $f(z)$ 是方程 $f^nP(z,f) = Q(z,f)$ 的有限级超越亚纯函数解,其中 $P(z,f)$,$Q(z,f)$ 是 $f(z)$ 的微差分多项式,$Q(z,f)$ 关于 $f(z)$ 及其微分和差分的次数总和至多为 n,则有 $m(r,P(z,f)) = S(r,f)$.

引理 2[14]　设 $f_1(z)$,$f_2(z)$,$\cdots$,$f_n(z)$ 是亚纯函数,$g_1(z)$,$g_2(z)$,$\cdots$,$g_n(z)$ 是整函数,且满足

(i) $\sum\limits_{j=1}^{n} f_j(z)e^{g_j(z)} \equiv 0$;

(ii) $g_j(z) - g_k(z)$ 不为常数,其中 $1 \leqslant j < k \leqslant n$;

(iii) 当 $1 \leqslant j \leqslant n$,$1 \leqslant h < k \leqslant n$ 时,$T(r,f_j) = o\{T(r,e^{g_h-g_k})\}(r\to\infty, r \notin E)$,其中 $E \subset (1,\infty)$ 是对数测度为有限的集合,则

$$f_j(z) \equiv 0(j=1,2,\cdots,n).$$

引理 3　设 $n \geqslant 2$ 为整数,d_1,d_2 为复常数,c_1,c_2,c_3 为有理式,α_1,α_2,α_3 为互不相等的非零复常数,且对于 $i,j \in \{1,2,3\}$,有 $\alpha_i \neq n\alpha_j$. 若等式

$$(c_1e^{\alpha_1 z} + c_2e^{\alpha_2 z} + c_3e^{\alpha_3 z})^n = d_1e^{\alpha_1 z} + d_2e^{\alpha_2 z} \quad (2)$$

成立,则有 $c_1 \equiv c_2 \equiv c_3 \equiv 0$.

证　将等式(2) 展开,可得

$$d_1e^{\alpha_1 z} + d_2e^{\alpha_2 z} = c_1^n e^{n\alpha_1 z} + c_2^n e^{n\alpha_2 z} + c_3^n e^{n\alpha_3 z} + \sum_{(m_1,m_2,m_3)} c_{m_1,m_2,m_3} e^{(m_1\alpha_1+m_2\alpha_2+m_3\alpha_3)z}, \quad (3)$$

其中 m_1,m_2,$m_3 \in \{0,1,\cdots,n-1\}$,且 $m_1+m_2+m_3 = n$.

假设 $\exists\, b_{ij} \in \{0,1,\cdots,n-1\}(i,j=1,2,3)$,且

$$b_{i1} + b_{i2} + b_{i3} = n(i=1,2,3), \quad (4)$$

满足

$$\begin{cases} n\alpha_1 = b_{11}\alpha_1 + b_{12}\alpha_2 + b_{13}\alpha_3, \\ n\alpha_2 = b_{21}\alpha_1 + b_{22}\alpha_2 + b_{23}\alpha_3, \\ n\alpha_3 = b_{31}\alpha_1 + b_{32}\alpha_2 + b_{33}\alpha_3, \end{cases} \quad (5)$$

易得 $b_{12} > 0$. 因为若 $b_{12} = 0$,由(4) 式得 $b_{11} + b_{13} = n$,又由(5) 中的第 1 个等式知 $(n-b_{11})\alpha_1 = b_{13}\alpha_3$,故可得 $\alpha_1 = \alpha_3$,与已知条件矛盾. 同理可以证明 $b_{23} > 0$.

将(5) 式看成关于变量 $\alpha_i(i=1,2,3)$ 的齐次线性方程组

$$\begin{cases} (b_{11}-n)\alpha_1 + b_{12}\alpha_2 + b_{13}\alpha_3 = 0, \\ b_{21}\alpha_1 + (b_{22}-n)\alpha_2 + b_{23}\alpha_3 = 0, \\ b_{31}\alpha_1 + b_{32}\alpha_2 + (b_{33}-n)\alpha_3 = 0, \end{cases} \quad (6)$$

其系数矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} b_{11}-n & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22}-n & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33}-n \end{pmatrix}.$$

一方面,将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 列和第 3 列加到第 1 列,结合(4) 式,可得 $|\boldsymbol{A}| = 0$,又因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 存在一个 2 阶非零子式

$$\begin{vmatrix} b_{12} & b_{13} \\ b_{22}-n & b_{23} \end{vmatrix} = b_{12}b_{23} + b_{13}(n-b_{22}) \geqslant b_{12}b_{23} > 0,$$

可知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2. 这说明方程组(6) 的基础解系所含向量个数为 1. 另一方面,从(4) 式可知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为 0,所以 $(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 是方程组(6) 的一个解,故方程组(6) 的基础解系为(1,1,

$1)^{\mathrm{T}}$,即通解为 $k(1,1,1)^{\mathrm{T}}$,其中 k 为任意常数,即得 $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3$,与已知条件矛盾. 由此可得,(5)式中至少有一个等式不成立.

不失一般性,假设 $m_1\alpha_1+m_2\alpha_2+m_3\alpha_3\neq n\alpha_1$,由(3)式及引理 2 可得 $c_1\equiv 0$,从而有

$$(c_2e^{\alpha_2 z}+c_3e^{\alpha_3 z})^n=d_1e^{\alpha_1 z}+d_1e^{\alpha_2 z},$$

展开得

$$d_1e^{\alpha_1 z}+d_2e^{\alpha_2 z}=c_2^ne^{n\alpha_2 z}+c_3^ne^{n\alpha_3 z}+\sum_{j=1}^{n-1}\binom{n}{j}c_2^jc_3^{n-j}e^{(j\alpha_2+(n-j)\alpha_3)z}.\tag{7}$$

由于 $\alpha_2\neq\alpha_3$,则对于 $j=0,1,\cdots,n-1$,有 $n\alpha_2\neq j\alpha_2+(n-j)\alpha_3$,$n\alpha_3\neq j\alpha_2+(n-j)\alpha_3$,结合(7)式及引理 2 可得 $c_2\equiv c_3\equiv 0$. 引理 3 得证.

引理 4[15] 设 $f(z)$ 是非常数亚纯函数,c 是任意复常数. 若 $\sigma_2(f)<1$,且 $\varepsilon>0$,则

$$m\left(r,\frac{f(z+c)}{f(z)}\right)=O\left(\frac{T(r,f(z))}{r^{1-\sigma_2(f)-\varepsilon}}\right),$$

$r\notin E$,E 具有有穷对数测度.

引理 5[16] 设 f 为有限级非常数亚纯函数,则

$$m\left(r,\frac{f'(z)}{f(z)}\right)=O(\log r)\ (r\to\infty,r\notin E),$$

若 f 为无穷级的超越亚纯函数,$k\geqslant 1$ 是一个整数,则

$$m\left(r,\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right)=O(\log rT(r,f))\ (r\to\infty,r\notin E),$$

其中 E 为线测度有限的集合.

引理 6[17] 设 $H(z)$ 是亚纯函数,$h(z)$ 是多项式且 $\deg h(z)\geqslant 1$,c 是非零复常数. 若 $\sigma(H(z))<\sigma(e^{h(z)})$,则

$$T(r,H(z))=S(r,e^{h(z)}),$$
$$T(r,H(z+c))=S(r,e^{h(z)}),$$
$$T(r,e^{h(z+c)-h(z)})=S(r,e^{h(z)}).$$

2 定理的证明

定理 1 的证明 设 $f(z)$ 为方程(1)的任一有限级整函数解且 $P(f)$ 满足定理 1 条件(i). 若 $f(z)$ 为多项式,则方程(1)两边的级不相等,矛盾,所以 $f(z)$ 只可能是超越的. 将方程(1)两边求导,得

$$nf^{n-1}f'+P(f)'=\alpha_1\beta_1e^{\alpha_1 z}+\alpha_2\beta_2e^{\alpha_2 z}+\alpha_3\beta_3e^{\alpha_3 z}.\tag{8}$$

再将方程(8)两边求导,得

$$(nf^{n-1}f')'+P(f)''=\alpha_1^2\beta_1e^{\alpha_1 z}+\alpha_2^2\beta_2e^{\alpha_2 z}+\alpha_3^2\beta_3e^{\alpha_3 z}.\tag{9}$$

由(1)式、(8)式和(9)式,消去 $e^{\alpha_1 z}$ 和 $e^{\alpha_3 z}$ 可得

$$\beta_2e^{\alpha_2 z}=[-\alpha_1\alpha_3(f^n+P(f))+(\alpha_1+\alpha_3)(f^n+P(f))'-(f^n+P(f))'']/[(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_1)],$$

从而有

$$F+Q(f)=(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_2)\beta_2e^{\alpha_2 z},\tag{10}$$

其中

$$F=\alpha_1\alpha_3f^n-(\alpha_1+\alpha_3)(f^n)'+(f^n)'',\tag{11}$$

$$Q(f)=\alpha_1\alpha_3P(f)-(\alpha_1+\alpha_3)P(f)'+P(f)'',\tag{12}$$

将(10)式两边求导,得

$$F'+Q(f)'=(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_1)\alpha_2\beta_2e^{\alpha_2 z}.\tag{13}$$

由(10)式和(13)式,消去 $e^{\alpha_2 z}$ 可得

$$\alpha_2F-F'=Q(f)'-\alpha_2Q(f).\tag{14}$$

于是由(11)式和(14)式可得

$$f^{n-3}\varphi=Q(f)'-\alpha_2Q(f),\tag{15}$$

其中 φ 为 f 的 3 次微分多项式,且有

$$\varphi=\alpha_1\alpha_2\alpha_3f^3+(\alpha_2(-n(\alpha_1+\alpha_3)f'+nf'')-\alpha_1\alpha_3nf'-(n(\alpha_1+\alpha_3)f'+nf''))f^2+(n(n-1)\alpha_2(f')^2-(-n(\alpha_1+\alpha_3)f'+nf'')(n-1)f'-2n(n-1)f'f'')f-n(n-1)(n-2)(f')^3.$$

由于 $n\geqslant 5$,$Q(f)$ 为 f 的 1 次微差分多项式,若 $\varphi\neq 0$,由(15)式及引理 1 可得 $T(r,\varphi)=m(r,\varphi)=S(r,f)$. 另外,(15)式可变形为

$$f^{n-4}(f\varphi)=Q(f)'-\alpha_2Q(f),$$

同样由引理 1 可得 $T(r,f\varphi)=S(r,f)$,从而

$$T(r,f)\leqslant T(r,f\varphi)+T(r,1/\varphi)=S(r,f),$$

矛盾,则有 $\varphi\equiv 0$,即

$$Q(f)'-\alpha_2Q(f)\equiv 0,\tag{16}$$

$$\alpha_2F-F'\equiv 0.\tag{17}$$

下面分 2 种情形讨论.

情形 1 当 $Q(f)\neq 0$ 时,由方程(16)可得 $Q(f)=\tilde{c}_2e^{\alpha_2 z}(\tilde{c}_2\neq 0)$,代入方程(12)可解得

$$P(f)=\tilde{c}_1e^{\alpha_1 z}+\tilde{c}_2e^{\alpha_2 z}/[(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_2)]+\tilde{c}_3e^{\alpha_3 z}.$$

结合 $P(f)=q(f(z+\eta))^{(m)}$ 解得

$$f(z)=c_1e^{\alpha_1 z}+c_2e^{\alpha_2 z}+c_3e^{\alpha_3 z},\tag{18}$$

其中 c_1,c_2,c_3 为复常数. 另外,将 $e^{\alpha_2 z}=Q(f)/\tilde{c}_2$ 代入方程(10),有

$$F+Q(f)=(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_2)\beta_2Q(f)/\tilde{c}_2,$$

即

$$\alpha_1\alpha_3f^n+(-n(\alpha_1+\alpha_3)f'+nf'')\cdot f^{n-1}+n(n-1)(f')^2f^{n-2}+(1-(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_2)\beta_2/\tilde{c}_2)Q(f)=0,$$

从而有

$$f^{n-2}(\alpha_1\alpha_3f^2+(-n(\alpha_1+\alpha_3)f'+nf'')f+n(n-1)(f')^2)=((\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_2)\beta_2/\tilde{c}_2-1)Q(f).$$

类似前面证明 $\varphi\equiv 0$ 的方法,可以得到

$$\alpha_1\alpha_3^2+(-n(\alpha_1+\alpha_3)f'+nf'')f+n(n-1)(f')^2\equiv 0,$$

由此可解得

$$f(z)=c_4(e^{\alpha_3 z+\alpha_1 nc_5}+e^{\alpha_1 z+\alpha_3 nc_5})^{1/n},$$

即

$$f(z)^n=d_1e^{\alpha_1 z}+d_3e^{\alpha_3 z},\tag{19}$$

其中 d_1,d_2 为复常数. 再由(18) 式和(19) 式有

$$(c_1e^{\alpha_1 z}+c_2e^{\alpha_2 z}+c_3e^{\alpha_3 z})^n=d_1e^{\alpha_1 z}+d_3e^{\alpha_3 z},$$

从而由引理3 可得 $c_1=c_2=c_3=0$,即 $f(z)\equiv 0$,这与 $f(z)$ 是超越整函数矛盾.

情形2 当 $Q(f)\equiv 0$ 时,即 $\alpha_1\alpha_3P(f)-(\alpha_1+\alpha_3)P(f)'+P(f)''=0$,解得 $P(f)=\tilde{k}_1e^{\alpha_1 z}+\tilde{k}_3e^{\alpha_3 z}$. 结合 $P(f)=q(f(z+\eta))^{(m)}$,可解得

$$f=k_1e^{\alpha_1 z}+k_3e^{\alpha_3 z},\tag{20}$$

其中 k_1,k_3 为复常数.

假设 $F\equiv 0$,由(11) 式可解得 $f^n=\tilde{l}_1e^{\alpha_1 z}+\tilde{l}_3e^{\alpha_3 z}$. 将 $f^n=\tilde{l}_1e^{\alpha_1 z}+\tilde{l}_3e^{\alpha_3 z}$ 和 $P(f)=\tilde{k}_1e^{\alpha_1 z}+\tilde{k}_3e^{\alpha_3 z}$ 代入方程(1),由引理2 可得 $\beta_2=0$,与已知条件矛盾,所以 $F\not\equiv 0$. 由(11) 式和(17) 式可解得

$$f^n=l_1e^{\alpha_1 z}+l_2e^{\alpha_2 z}+l_3e^{\alpha_3 z}.\tag{21}$$

比较(20) 式和(21) 式,有

$$(k_1e^{\alpha_1 z}+k_3e^{\alpha_3 z})^n=l_1e^{\alpha_1 z}+l_2e^{\alpha_2 z}+l_3e^{\alpha_3 z},$$

展开得

$$l_1e^{\alpha_1 z}+l_2e^{\alpha_2 z}+l_3e^{\alpha_3 z}=k_1^ne^{n\alpha_1 z}+k_3^ne^{n\alpha_3 z}+\sum_{j=1}^{n-1}\binom{n}{j}k_1^jk_3^{n-j}e^{(j\alpha_1+(n-j)\alpha_3)z}.\tag{22}$$

因为 $\alpha_1\neq\alpha_3$,所以对于 $j=0,1,\cdots,n-1$,有 $n\alpha_1\neq j\alpha_1+(n-j)\alpha_3$ 和 $n\alpha_3\neq j\alpha_1+(n-j)\alpha_3$. 由(22) 式及引理2 可得 $c_1=c_3=0$,即 $f(z)\equiv 0$,矛盾.

综上所述,可知方程(1) 没有有限级整函数解.

若 $P(f)$ 满足定理1 条件(ii),类似以上的方法逐步推导亦可证明结论.

定理2 的证明 设 $f(z)$ 为方程(1) 的任一有限级整函数解,类似定理1 证明可知 $f(z)$ 只能是超越的. 由引理4 和引理5 可得

$$\begin{aligned}T(r,P(f))&=T(r,f(z)^n+q(z)(f(z+\eta))^{(m)})\geqslant m(r,f(z)^n+q(z)(f(z+\eta))^{(m)})\geqslant m(r,f(z)^n)-\\&m(r,q(z)f(z)f(z+\eta)(f(z+\eta))^{(m)}/(f(z)f(z+\eta)))\geqslant nm(r,f(z))-m(r,f(z))+S(r,f)=\\&(n-1)T(r,f(z))+S(r,f).\end{aligned}\tag{23}$$

另外,

$$T(r,\beta_1e^{\alpha_1 z}+\beta_2e^{\alpha_2 z}+\beta_3e^{\alpha_3 z})\leqslant T(r,\beta_1e^{\alpha_1 z})+T(r,\beta_2e^{\alpha_2 z})+T(r,\beta_3e^{\alpha_3 z})+o(1)=(|\alpha_1|+|\alpha_2|+|\alpha_3|)r(1+o(1))/\pi.\tag{24}$$

由(1) 式、(23) 式和(24) 式可得

$$(n-1)T(r,f(z))+S(r,f)\leqslant(|\alpha_1|+|\alpha_2|+|\alpha_3|)r(1+o(1))/\pi,$$

从而 $\sigma(f)\leqslant 1$. 假设 $\sigma(f)<1$,由引理6 可知,对于 $1\leqslant i<j\leqslant 3$,

$$T(r,P(f))=T(r,f(z)^n+q(z)(f(z+\eta))^{(m)})=S(r,e^{(\alpha_i-\alpha_j)z}),$$

再由方程(1) 和引理2 可得 $\beta_1=\beta_2=\beta_3=0$,与定理2 的条件矛盾. 从而 $\sigma(f)=1$ 得证.

下面证明 $\lambda(f)=1$.

已知 $\lambda(f)\leqslant\sigma(f)=1$. 假设 $\lambda(f)<1$,由 Hadamard 定理,$f(z)$ 可表示为 $f(z)=Q(z)e^{cz}$,其中 c 是非零常数,$Q(z)$ 是级小于1 的整函数. 由引理6 可知,对于 $1\leqslant i<j\leqslant 3$,

$$T(r,Q(z))=S(r,e^{(\alpha_i-\alpha_j)z}),$$

$$T(r,Q(z+\eta))=S(r,e^{(\alpha_i-\alpha_j)z}).\tag{25}$$

将 $f(z)=Q(z)e^{cz}$ 代入方程(1),可得

$$Q(z)^ne^{ncz}+q(z)(Q(z+\eta)e^{c\eta}e^{cz})^{(m)}=\beta_1e^{\alpha_1 z}+\beta_2e^{\alpha_2 z}+\beta_3e^{\alpha_3 z}.\tag{26}$$

令 $(Q(z+\eta)e^{c\eta}e^{cz})^{(m)}=e^{c\eta}R(z+\eta)e^{cz}$,其中 $R(z+\eta)$ 为 $Q(z+\eta)$ 及其导数的多项式,易知 $R(z+\eta)$ 是级小于1 的整函数. 因为 $\alpha_i(i=1,2,3)$ 互不相等,所以可由(25) 式、(26) 式及引理2 推出 β_1,β_2,β_3 中至少有一个为0,与已知条件矛盾. 即证 $\lambda(f)=1$.

3 参考文献

[1] 杨乐. 值分布论及其新研究 [M]. 北京: 科学出版社,1982.

[2] Hayman W K. Meromorphic functions [M]. Oxford: Clarendon Press,1964.

[3] Chen Zongxuan. Complex differences and difference equations [M]. Beijing: Science Press,2014.

[4] 陈宗煊,黄志波. 复域差分和差分方程的研究 [J]. 华南师范大学学报: 自然科学版,2013,45(6):26-33.

[5] Chen Zongxuan,Yang Chungchun. On entire solutions of certain type of differential-difference equations [J]. Taiwanese Journal of Mathematics,2014,18(3):677-685.

[6] Gromak V,Laine I,Shimomura S. Painleve diferential equations in the complex plane [M]. Berlin,New York:

Waiter de Gruyter,2002.

[7] Laine I. Nevanlinna theory and complex differential equations [M]. Berlin: Walter de Gruyter,1993.

[8] 吴丽镐,杨春侠. 一类微差分方程亚纯解的性质 [J]. 南昌大学学报: 理科版,2017,41(4):316-323.

[9] 张建军,徐新萍,廖良文. 非线性复微分方程的亚纯解 [J]. 中国科学: 数学,2017,47(8):919-932.

[10] Li Ping,Yang Chungchun. On the nonexistence of entire solutions of a certain type of nonlinear differential equations [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,2006,320(2):827-835.

[11] Zhang Jie,Liao Liangwen. On entire solutions of a certain type of nonlinear differential and difference equations [J]. Taiwanese Journal of Mathematics,2011,15(5):2145-2157.

[12] Liao Liangwen,Yang Chungchun,Zhang Jianjun. On meromorphic solutions of certain type of non-linear differential equations [J]. Ann Acad Sci Fenn Math,2013,38(2):581-593.

[13] Laine I,Yang Chungchun. Clunnie theorems for difference and q-difference polynomials [J]. London Math Soc,2007,76(3):556-566.

[14] Gross F. Factorization of meromorphic functions [M]. Washington D C: U S Government Printing Office,1972.

[15] Halburd R,Korhonen R,Toghe K. Holomorphic curves with shift-invariant hyper-plane preimages [J]. Transactions of the American Mathematical Society,2014,366(8):4267-4298.

[16] Yang Chungchun,Yi Hongxun. Uniqueness theory of meromorphic functions [M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group,2003.

[17] Zhang Ranran,Chen Zongxuan. Fixed points of meromorphic functions and of their differences,divided differences and shifts [J]. Acta Mathematica Sinica: English Series,2016,32(10):1189-1202.

The Properties of Entire Solutions of a Certain Type of Differential-Difference Equations

WU Lihao

(School of Computer Engineering,Guangzhou College of South China University of Technology,
Guangzhou Guangdong 510800,China)

Abstract: By using the value distribution theory,the existence,growth and exponent of convergence of zeros of entire solutions of a certain type of differential-difference equations of the form $f(z)^n + P(f) = \beta_1 e^{\alpha_1 z} + \beta_2 e^{\alpha_2 z} + \beta_3 e^{\alpha_3 z}$ are considered,where $\alpha_i,\beta_i (i = 1,2,3)$ are constants. $P(f)$ denotes an algebraic differential-difference polynomial in $f(z)$ of degree one. And some known results obtained most recently are improved.

Key words: differential-difference equations; entire functions; exponent of convergence

(责任编辑: 王金莲)