文章编号:1000-5862(2018)06-0587-05

有限对数级亚纯函数与整函数的复合

涂　金[1]**,彭淑凤**[1]**,饶冬飞**[2]

(1. 江西师范大学数学与信息科学学院,江西 南昌 330022;2. 豫章师范学院数学与计算机学院,江西 南昌 330103)

摘要: 利用值分布理论,对复合函数 $f(g(z))$ 的增长性、零点收敛指数和极点收敛指数进行了研究,其中 $f(z)$ 为有限对数级整函数或者亚纯函数,$g(z)$ 为有限级整函数,所得结果丰富和完善了已有的结果.

关键词: 整函数;亚纯函数;级;有限对数级;对数零点收敛指数

中图分类号: O 174.52　　**文献标志码:** A　　**DOI:** 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2018.06.06

0　引言与结果

本文使用大家熟悉的亚纯函数值分布理论的标准记号[1-2]. 用 $T(r,f)$ 表示亚纯函数 $f(z)$ 的特征函数,$M(r,f)$ 表示整函数 $f(z)$ 在圆周上 $|z|=r$ 的最大模,用 $n(r,1/f)$($N(r,1/f)$)表示亚纯函数 $f(z)$ 在圆周 $|z|<r$ 内的零点(积分)计数函数,用 $n(r,f)$($N(r,f)$)表示亚纯函数 $f(z)$ 在圆周 $|z|<r$ 内的极点(积分)计数函数. 对于充分大的 $r\in(0,+\infty)$,令 $\log_1 r=\log r$,且 $\log_{i+1} r=\log(\log_i r)$,$i\in\mathbf{N}$. 下面给出整函数增长级和零点收敛指数的一些定义.

定义1[1-2]　整函数 $f(z)$ 的级和下级分别定义为

$$\rho(f)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log T(r,f)}{\log r}=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log_2 M(r,f)}{\log r},\tag{1}$$

$$\mu(f)=\underline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log T(r,f)}{\log r}=\underline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log_2 M(r,f)}{\log r}.\tag{2}$$

亚纯函数 $f(z)$ 的级和下级也分别可用(1)式和(2)式的第1个等式来定义.

定义2[3-4]　整函数 $f(z)$ 的对数增长级和对数下级分别定义为

$$\rho_{\log}(f)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log T(r,f)}{\log\log r}=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log_2 M(r,f)}{\log\log r},\tag{3}$$

$$\mu_{\log}(f)=\underline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log T(r,f)}{\log\log r}=\underline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log_2 M(r,f)}{\log\log r}.\tag{4}$$

亚纯函数 $f(z)$ 的对数级和对数下级也分别可用(3)式和(4)式的第1个等式来定义.

定义3[1-2]　亚纯函数 $f(z)$ 的零点收敛指数和极点收敛指数分别定义为

$$\lambda(f)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log N(r,1/f)}{\log r}=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log n(r,1/f)}{\log r},$$

$$\lambda(1/f)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log N(r,f)}{\log r}=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log n(r,f)}{\log r}.$$

定义4[4]　亚纯函数 $f(z)$ 由积分计数函数 $N(r,1/f)$ 定义的对数零点收敛指数和下对数零点收敛指数分别为

$$\lambda_{\log}(f)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log N(r,1/f)}{\log\log r},$$

$$\underline{\lambda}_{\log}(f)=\underline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log N(r,1/f)}{\log\log r}.$$

定义5[5]　亚纯函数 $f(z)$ 由计数函数 $n(r,1/f)$ 定义的对数零点收敛指数和下对数零点收敛指数分别为

$$\lambda_{\log}^{n}(f)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log n(r,1/f)}{\log\log r},$$

$$\underline{\lambda}_{\log}^{n}(f)=\underline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log n(r,1/f)}{\log\log r}.$$

定义6　亚纯函数 $f(z)$ 的对数极点收敛指数和下对数极点收敛指数分别定义为

$$\lambda_{\log}(1/f)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log N(r,f)}{\log\log r},$$

$$\underline{\lambda}_{\log}(1/f)=\underline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log N(r,f)}{\log\log r}.$$

收稿日期: 2018-06-25

基金项目: 国家自然科学基金(11561031),江西省自然科学基金(20161BAB201020,20132BAB211002)和江西省教育厅基金(GJJ151331)资助项目.

作者简介: 涂　金(1979-),男,江西鹰潭人,副教授,博士,主要从事复分析研究. E-mail: tujin2008@sina.com

注1 若亚纯函数$f(z)$满足$0<\rho(f)=\mu(f)<\infty$,则$f(z)$是正则增长的.由定义2可知,非常数亚纯函数$f(z)$的对数增长级满足$\rho_{\log}(f)\geqslant\mu_{\log}(f)\geqslant 1$.若亚纯函数$f(z)$的对数增长级满足$\rho_{\log}(f)>1$,则$f(z)$为超越;若亚纯函数$f(z)$的对数增长级满足$\rho_{\log}(f)<\infty$,则$f(z)$的增长级为0.反之,若亚纯函数$f(z)$的增长级为0,则$f(z)$的对数增长级可能满足$\rho_{\log}(f)=\infty$,例如亚纯函数$f(z)$满足$T(r,f)=e^{(\log r)^{\alpha}}$,$0<\alpha<1$,则有$\rho(f)=0$,但是$\rho_{\log}(f)=\infty$.若亚纯函数$f(z)$满足$1\leqslant\rho_{\log}(f)=\mu_{\log}(f)<\infty$,则$f(z)$也是正则增长的.多项式或有理函数的增长级满足$\rho_{\log}(f)=\mu_{\log}(f)=1$,$f(z)$为正则增长.

注2 若亚纯函数$f(z)$没有零点,则$\lambda_{\log}(f)=0$.若亚纯函数$f(z)$只有有限个零点,则$\lambda_{\log}(f)=1$;若$\lambda_{\log}(f)>1$,则亚纯函数$f(z)$有无穷多个零点.反之,若亚纯函数$f(z)$有无穷多个零点,则$\lambda_{\log}(f)=1$也可能成立.例如设亚纯函数$f(z)$满足$n(r,1/f)=\ln\ln r$,$r>e$,则$f(z)$有无穷多个零点,但是通过计算易得$\lambda_{\log}(f)=1$,$\lambda_{\log}^{n}(f)=0$.多项式或有理函数满足$\lambda_{\log}(f)=\underline{\lambda}_{\log}(f)=1$.另外由定义3可知,由$N(r,1/f)$和$n(r,1/f)$定义的零点收敛指数是相等的,但是由文献[5]定理3.1可知,由$N(r,1/f)$和$n(r,1/f)$定义的对数零点收敛指数满足关系式$\lambda_{\log}(f)=\lambda_{\log}^{n}(f)+1$,$\underline{\lambda}_{\log}(f)=\underline{\lambda}_{\log}^{n}(f)+1$.

亚纯(整)函数$f(z)$与整函数$g(z)$的复合一直是复分析的研究重点之一,过去几十年已经有很丰富的研究结果[6-17].对于有限级亚纯(整)函数$f(z)$与整函数$g(z)$的复合$f(g(z))$的增长性以及零点,早期的一个结果是G. Polay首先给出的.

定理A[6] 设$f(z)$与$g(z)$为整函数,且$f(g)$为有限级(下级),则只可能有2种情形:

(i) g为一多项式,f为有限级(下级);

(ii) g不是一多项式,但为有限级(下级),而f的级(下级)为0.

当$f(z)$为亚纯函数,$g(z)$为整函数时,A. Edrei等得到下面2个结果.

定理B[9] 设$f(z)$为亚纯函数,其级大于0,$g(z)$为超越整函数,则$f(g)$的级为无穷.

定理C[9] 设$f(z)$为整函数,其零点收敛指数大于0,$g(z)$为超越整函数,则$f(g)$的零点收敛指数为无穷.

由于最近几年对数增长级在复微分方程中应用比较多,自然想到对数增长级的亚纯(整)函数和有限级整函数的复合,其实在这之前就已经有人研究过对数级亚纯函数(整函数)与有限级整函数的复合[8,13-14].

在文献[8]定理2的基础上,本文研究了有限对数级整(亚纯)函数$f(z)$与有限级整函数$g(z)$复合函数$f(g(z))$的增长级、零点和极点,得到以下一些结果.

定理1 设$f(z)$是有限对数级整函数,$g(z)$为有限级整函数,则

$$\mu_{\log}(f)\mu(g)\leqslant\mu(f(g))\leqslant\min\begin{cases}\rho_{\log}(f)\mu(g)\\\mu_{\log}(f)\rho(g)\end{cases}\leqslant$$

$$\max\begin{cases}\rho_{\log}(f)\mu(g)\\\mu_{\log}(f)\rho(g)\end{cases}\leqslant\rho(f(g))\leqslant\rho_{\log}(f)\rho(g).$$

推论1 若整函数$f(z)$为正则增长或者$g(z)$为正则增长,则有$\rho(f(g))=\rho_{\log}(f)\rho(g)$,$\mu(f(g))=\mu_{\log}(f)\mu(g)$;若$f(z)$和$g(z)$均为正则增长,则$f(g(z))$也为正则增长,且有$\mu(f(g))=\rho(f(g))=\rho_{\log}(f)\rho(g)$;若$f(g(z))$为正则增长,则有$\rho_{\log}(f)\mu(g)=\mu_{\log}(f)\rho(g)$.

推论2 当$f(z)$是无穷对数级整函数时,定理1的结论也成立,(i) 若$\rho_{\log}(f)=\infty$,且$g(z)$为有限级整函数满足$\mu(g)>0$,则$\rho(f(g))=\infty$;(ii) 若$\mu_{\log}(f)=\infty$,且$\mu(g)>0$,则$\mu(f(g))=\infty$.

注3 推论2说明定理A中第2种情形的逆命题不一定成立,虽然$g(z)$为有限级,满足$\mu(g)>0$,但当$\rho_{\log}(f)=\infty$或者$\mu_{\log}(f)=\infty$时,则有$\rho(f(g))=\infty$或者$\mu(f(g))=\infty$.

定理2 设$f(z)$是有限对数级亚纯函数,$g(z)$为有限级整函数,则

$$\mu(f(g))\leqslant\min\begin{cases}\rho_{\log}(f)\mu(g)\\\mu_{\log}(f)\rho(g)\end{cases}\leqslant$$

$$\max\begin{cases}\rho_{\log}(f)\mu(g)\\\mu_{\log}(f)\rho(g)\end{cases}\leqslant\rho(f(g))\leqslant\rho_{\log}(f)\rho(g).$$

注4 当$f(z)$为亚纯函数、$g(z)$为整函数时,由于引理2缺乏引理1中夹逼的结果,所以结论$\mu_{\log}(f)\mu(g)\leqslant\mu(f(g))$在没有特殊条件下一般是不成立的.

定理2的结果也推广了文献[13]中定理3的结果.把定理1推广到零点的情形,则有以下结果.

定理3 设$f(z)$为超越亚纯函数且对数零点收敛指数为有限,$g(z)$为有限级整函数,则

$$\underline{\lambda}_{\log}(f)\mu(g)\leqslant\underline{\lambda}(f(g))\leqslant\min\begin{cases}\lambda_{\log}(f)\mu(g)\\\underline{\lambda}_{\log}(f)\rho(g)\end{cases}\leqslant$$

$$\max\begin{cases}\lambda_{\log}(f)\mu(g)\\ \underline{\lambda}_{\log}(f)\rho(g)\end{cases} \leqslant \lambda(f(g)) \leqslant \lambda_{\log}(f)\rho(g).$$

推论 3　设 $f(z)$, $g(z)$ 满足定理 3 中的假设,若超越亚纯函数 $f(z)$ 满足 $\lambda_{\log}(f) = \underline{\lambda}_{\log}(f)$ 或者整函数 $g(z)$ 为正则增长,则有 $\lambda(f(g)) = \lambda_{\log}(f)\rho(g)$, $\underline{\lambda}(f(g)) = \underline{\lambda}_{\log}(f)\mu(g)$. 若超越整亚纯函数 $f(z)$ 满足 $\lambda_{\log}(f) = \underline{\lambda}_{\log}(f)$ 且整函数 $g(z)$ 为正则增长,则有 $\underline{\lambda}(f(g)) = \lambda(f(g)) = \lambda_{\log}(f)\cdot\rho(g)$. 由 Picard 定理和 Nevanlinna 第 2 基本定理容易得到以下结果.

推论 4　设 $f(z)$ 为有理函数,至少具有 2 个不同的零点, $g(z)$ 为超越整函数,则有 $\mu(g) = \underline{\lambda}(f(g)) \leqslant \lambda(f(g)) = \rho(g)$.

注 5　当 $g(z)$ 为多项式时,定理 3 结果也成立,因为 $\mu(g) = \rho(g) = 0$,结果变成 $\underline{\lambda}(f(g)) = \lambda(f(g)) = 0$. 在推论 4 中,有理函数 $f(z)$ 至少具有 2 个不相同的零点是必要条件,例如当 $f(z)$ 为多项式时, $f(z) = z^n$, $g(z) = e^z$, $f(g(z)) = e^{nz}$,满足 $\lambda_{\log}(f) = \underline{\lambda}_{\log}(f) = 1$, $\rho(g) = \mu(g) = 1$,但 $\lambda(f(g)) = 0 \neq 1$.

定理 4　设亚纯函数 $f(z)$ 满足 $\lambda_{\log}(f) = \infty$, $g(z)$ 为有限级整函数,满足 $\mu(g) > 0$,则 $f(g)$ 的零点收敛指数为无穷.

定理 5　设 $f(z)$ 为亚纯函数,且对数极点收敛指数为有限, $g(z)$ 为有限级整函数,则

$$\underline{\lambda}_{\log}(1/f)\mu(g) \leqslant \underline{\lambda}(1/f(g)) \leqslant$$
$$\min\begin{cases}\lambda_{\log}(1/f)\mu(g)\\ \underline{\lambda}_{\log}(1/f)\rho(g)\end{cases} \leqslant \max\begin{cases}\lambda_{\log}(1/f)\mu(g)\\ \underline{\lambda}_{\log}(1/f)\rho(g)\end{cases} \leqslant$$
$$\lambda(1/f(g)) \leqslant \lambda_{\log}(1/f)\rho(g).$$

推论 5　设 $f(z)$ 为有理函数,至少具有 2 个不同的极点, $g(z)$ 为超越整函数,则有

$$\mu(g) = \underline{\lambda}(1/f(g)) \leqslant \lambda(1/f(g)) = \rho(g).$$

1　引理

引理 1[7]　设 $f(z)$, $g(z)$ 为整函数,满足 $g(0) = 0$. 对任意的 $0 < \alpha < 1$,当 $r > 0$ 时,有

$$M(C(\alpha)M(\alpha r,g),f) \leqslant M(r,f(g)) \leqslant M(M(r,g),f),$$

其中 $C(\alpha) = (1-\alpha)^2/(4\alpha)$.

引理 2[10]　设 $f(z)$ 为亚纯函数, $g(z)$ 为整函数,当 r 充分大时,有

$$T(r,f(g)) \leqslant (1+o(1))T(r,f)T(M(r,g),f)/\log M(r,g) \leqslant 2T(M(r,g),f).$$

引理 3[9]　设 $g(z)$ 为有限级超越整函数,当 $|w| > |g(0)|$ 时,通过 $|w| = M(t,g)$ 确定 $t = t(|w|)$,则 $\forall \xi > 0$,当 $|w| > K(g,\xi)$ 时,方程 $g(z) = w$ 在 $|z| < t^{1+\xi}$ 至少有 1 个解.

2　定理的证明

定理 1 的证明　由引理 1 以及整函数对数级的定义 2 可得, $\forall \varepsilon > 0$ 以及充分大的 $r > r_0$,

$$\log_2 M(r,f(g)) \leqslant \log_2 M(M(r,g),f) \leqslant (\rho_{\log}(f)+\varepsilon)\log_2 M(r,g). \tag{5}$$

(5) 式两边同除以 $\log r$ 取上极限可得

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\log_2 M(r,f(g))/\log r \leqslant (\rho_{\log}(f)+\varepsilon)\overline{\lim_{r\to\infty}}\log_2 M(r,g)/\log r.$$

由定义 1 可得 $\rho(f(g)) \leqslant \rho_{\log}(f)\rho(g)$. 另一方面,由引理 1,令 $\alpha = 1/2$ 和对数下级的定义可得 $\forall \varepsilon > 0$ 以及充分大的 $r > r_0$,

$$\log_2 M(r,f(g)) \geqslant \log_2 M(M(r/2,g)/8,f) \geqslant (\mu_{\log}(f)-\varepsilon)\log_2[M(r/2,g)/8], \tag{6}$$

(6) 式两边同除以 $\log r$ 并取下极限可得

$$\mu(f(g)) \geqslant \mu_{\log}(f)\mu(g).$$

下证 $\rho(f(g)) \geqslant \max\{\rho_{\log}(f)\mu(g),\mu_{\log}(f)\rho(g)\}$. 由增长级的定义可得存在 1 列 $\{r_n\}_{n=1}^{\infty} \to \infty$ (注意下面定理证明过程出现的点列 $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ 每次出现不必相同),满足 $\lim_{n\to\infty}\log_2 M(r_n,g)/\log r_n = \rho(g)$. 故由 (3) 式可得, $\forall \varepsilon > 0$ 以及充分大的 r_n,

$$\log_2 M(r_n,f(g)) \geqslant \log_2 M(M(r_n/2,g)/8,f) \geqslant (\mu_{\log}(f)-\varepsilon)\log_2[M(r_n/2,g)/8], \tag{7}$$

由 (7) 式两边同除以 $\log r_n$ 可得 $\rho(f(g)) \geqslant \mu_{\log}(f)\rho(g)$.

另一方面,由 (4) 式和对数上级的定义可得 $\forall \varepsilon > 0$ 以及存在 2 列 $\{R_n\}_{n=1}^{\infty} \to \infty$, $\{r_n\}_{n=1}^{\infty} \to \infty$,满足 $\lim_{n\to\infty}\log_2 M(R_n,f)/\log R_n = \rho_{\log}(f)$ 且 $R_n = M(r_n/2,g)/8$,有

$$\log_2 M(r_n,f(g)) \geqslant \log_2 M(M(r_n/2,g)/8,f) \geqslant (\rho_{\log}(f)-\varepsilon)\log_2[M(r_n/2,g)/8], \tag{8}$$

因此,由 (8) 式两边同除以 $\log r_n$ 并取上极限可得

$$\rho(f(g)) \geqslant \rho_{\log}(f)\mu(g).$$

下证 $\mu(f(g)) \leqslant \min\{\rho_{\log}(f)\mu(g),\mu_{\log}(f)\rho(g)\}$. 由引理 1、定义 1 和定义 2 可得, $\forall \varepsilon > 0$ 以及存在 1

列$\{r_n\}_{n=1}^{\infty}\to\infty$,满足
$$\lim_{n\to\infty}\log_2 M(r_n,g)/\log r_n=\mu(g),$$
有
$$\log_2 M(r_n,f(g))\leqslant\log_2 M(M(r_n,g),f)\leqslant(\rho_{\log}(f)+\varepsilon)\log_2 M(r_n,g)\leqslant(\rho_{\log}(f)+\varepsilon)(\mu(g)+\varepsilon)\log r_n,$$
上式两边同除以$\log r_n$并取下极限可得
$$\mu(f(g))\leqslant\rho_{\log}(f)\mu(g).$$
同理可得$\mu(f(g))\leqslant\mu_{\log}(f)\rho(g)$. 故定理1的结论成立.

定理2的证明 由引理2以及亚纯函数对数级的定义2可得,$\forall\varepsilon>0$以及充分大的$r>r_0$,
$$\log T(r,f(g))\leqslant\log 2T(M(r,g),f)\leqslant(\rho_{\log}(f)+\varepsilon)\log_2 M(r,g),$$
由引理2及定理1相同的证明方法可得
$$\rho(f(g))\leqslant\rho_{\log}(f)\rho(g).$$
由文献[3]定理4可得,当$f(z)$为亚纯函数时,结论
$$\rho(f(g))\geqslant\max\{\rho_{\log}(f)\mu(g),\mu_{\log}(f)\rho(g)\}$$
也成立. 最后类似定理1最后一段的证明方法可得
$$\mu(f(g))\leqslant\min\{\rho_{\log}(f)\mu(g),\mu_{\log}(f)\rho(g)\}.$$
故定理2得证.

定理3的证明 由定义4可得,$\forall\varepsilon>0$以及对于充分大的r,有
$$\log N(r,1/f(g))\leqslant\log N(M(r,g),1/f)\leqslant(\lambda_{\log}(f)+\varepsilon)\log_2 M(r,g),\tag{9}$$
(9)式两边同除以$\log r$并取上极限可得
$$\lambda(f(g))\leqslant\lambda_{\log}(f)\rho(g).$$
$\forall\varepsilon>0$,由下级的定义可得存在1列$\{r_n\}_{n=1}^{\infty}\to\infty$,满足$\lim\limits_{n\to\infty}\log_2 M(r_n,g)/\log r_n=\mu(g)$,类似(9)式可得
$$\log N(r_n,1/f(g))\leqslant(\lambda_{\log}(f)+\varepsilon)\log_2 M(r_n,g)\leqslant(\lambda_{\log}(f)+\varepsilon)(\mu(g)+\varepsilon)\log r_n,\tag{10}$$
由(10)式两边同除以$\log r_n$取下极限可得
$$\underline{\lambda}(f(g))\leqslant\lambda_{\log}(f)\mu(g).$$
类似地,$\forall\varepsilon>0$,由定义3可得存在1列$\{R_n\}_{n=1}^{\infty}\to\infty$满足
$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log N(R_n,1/f)}{\log_2 R_n}=\underline{\lambda}_{\log}(f),$$
令$R_n=M(r_n,g)$,可得1列$\{r_n\}_{n=1}^{\infty}\to\infty$满足
$$\log N(r_n,1/f(g))\leqslant\log N(M(r_n,g),1/f)\leqslant(\underline{\lambda}_{\log}(f)+\varepsilon)\log_2 M(r_n,g).\tag{11}$$
由(11)式可得$\underline{\lambda}(f(g))\leqslant\underline{\lambda}_{\log}(f)\rho(g)$,故有
$$\underline{\lambda}(f(g))\leqslant\min\begin{cases}\lambda_{\log}(f)\mu(g)\\ \underline{\lambda}_{\log}(f)\rho(g)\end{cases}.$$
另一方面,由引理3可得,$\forall\xi>0$,当$|w|>K(g,\xi)$时,方程$g(z)=w$在$|z|<t^{1+\xi}$至少有一零点,则对任意充分大的r,有
$$N(r^{1+\xi},1/f(g))\geqslant N(M(r,g),1/f)+O(\log r),\tag{12}$$
由(12)式、定义4以及注2($\underline{\lambda}_{\log}(f)\geqslant1$)可得,$\forall\varepsilon>0$以及对于充分大的$r$,有
$$\log N(r^{1+\xi},1/f(g))\geqslant(\underline{\lambda}_{\log}(f)-\varepsilon)\log_2 M(r,g)\geqslant(\underline{\lambda}_{\log}(f)-\varepsilon)(\mu(g)-\varepsilon)\log r,\tag{13}$$
由(13)式可得
$$\underline{\lambda}(f(g))\geqslant\underline{\lambda}_{\log}(f)\mu(g).$$
类似地,由(8)式可得,$\forall\varepsilon>0$以及1列$\{r_n\}_{n=1}^{\infty}\to\infty$,满足$\lim\limits_{n\to\infty}\log_2 M(r_n,g)/\log r_n=\rho(g)$,有
$$\log_2 N(r_n^{1+\xi},1/f(g))\geqslant(\underline{\lambda}_{\log}(f)-\varepsilon)\log_2 M(r_n,g)\geqslant(\underline{\lambda}_{\log}(f)-\varepsilon)(\rho(g)-\varepsilon)\log r_n,\tag{14}$$
由(14)式可得$\lambda(f(g))\geqslant\underline{\lambda}_{\log}(f)\rho(g)$,并且由(12)式同理可得1列$\{r_n\}_{n=1}^{\infty}\to\infty$满足
$$\log_2 N(r_n^{1+\xi},1/f(g))\geqslant(\lambda_{\log}(f)-\varepsilon)\log_2 M(r_n,g)\geqslant(\lambda_{\log}(f)-\varepsilon)(\mu(g)-\varepsilon)\log r_n,\tag{15}$$
由(15)式可得$\lambda(f(g))\geqslant\lambda_{\log}(f)\mu(g)$,因此有
$$\lambda(f(g))\geqslant\max\begin{cases}\lambda_{\log}(f)\mu(g)\\ \underline{\lambda}_{\log}(f)\rho(g)\end{cases}.$$
故定理3结论成立.

定理4和定理5的证明 由定理3的证明过程类似可得.

3 参考文献

[1] 杨乐. 值分布理论及其新研究[M]. 北京:科学出版社,1982.

[2] 仪洪勋,杨重骏. 亚纯函数唯一性理论[M]. 北京:科学出版社,1995.

[3] Tarasyuk R I. A theorem of Valiron-Titchmarsh type for entire functions of finite logarithmic order[J].(Ukrainian) Mat Stud,1995,124(5):31-38.

[4] Chern,Peter Tien Yu. On meromorphic functions with finite logarithmic order[J]. Trans Amer Math Soc,2006,358(2):473-489.

[5] Chern,Peter Tien Yu,Kim In Su. Criteria of an entire series with finite logarithmic order[J]. Taiwanese J Math,2011,15(1):331-336.

[6] Polya G. On an integral function of an integral function

[J]. J London Math Soc，1926，1(1)：12-15.

[7] Clunie J. The composition of entire and meromorphic functions：mathematical essays dedicated to A. J. Macintyre [M]. Athens，Ohio：Ohio University Press，1970：75-92.

[8] Goldstein R. On the growth of compositions of entire and meromorphic functions [J]. J Analyse Math，1973，26(1)：169-182.

[9] Edrei A，Fuchs W H J. On the zeros of $f(g(z))$ where f and g are entire functions [J]. J Analyse Math，1964，12(1)：243-255.

[10] Bergweiler W. On the nevanlinna characteristic of a composite function [J]. Complex Variable Theory Appl，1988，10(2/3)：225-236.

[11] Zheng Jianhua，Yang Chungchun. Estimate on the number of fix-points of composite entire functions [J]. Complex Variables Theory Appl，1994，24(3/4)：301-309.

[12] 廖良文，杨重骏. 亚纯函数分解理论，动力系统和函数方程中的一些新的和未解决的老问题与猜想 [J]. 江西师范大学学报：自然科学版，2017，41(3)：242-247.

[13] 敖海龙. 整函数与亚纯函数的复合函数的增长性 [J]. 北京大学学报：自然科学版，1988，24(1)：33-46.

[14] 孙建武，孙志荣. Polya 定理的推广 [J]. 佳木斯大学学报：自然科学版，2005，23(4)：623-627.

[15] Tu Jin，Chen Zongxuan，Zheng Xiumin. Composition of entire functions with finite iterated Order [J]. J Math Anal Appl，2009，353(1)：295-304.

[16] 李效敏，仪洪勋，张学. 涉及复合亚纯函数和不动点的亚纯函数的正规族 [J]. 江西师范大学学报：自然科学版，2016，40(6)：578-586.

[17] Tanmay B. On some growth analysis of composite entire and meromorphic functions from the view point of their relative (p,q)-th type and relative (p,q)-th weak type [J]. Korean J Math，2018，26(1)：23-41.

The Composition of Meromorphic Function and Entire Function of Finite Logarithmic Order

TU Jin[1]，PENG Shufeng[1]，RAO Dongfei[2]

(1. College of Mathematics and Informatics，Jiangxi Normal University，Nanchang Jiangxi 330022，China；
2. College of Mathematics and Computer Science，Yuzhang Normal University，Nanchang Jiangxi 330103，China)

Abstract： In this paper，the growth，zeros and poles of composite function $f(g(z))$ are studied by using the value distribution theory，where $f(z)$ is a meromorphic or entire function of finite logarithmic order and $g(z)$ is entire of finite order，and some results are obtained which enrich and improve some previous results.

Key words： entire function；meromorphic functions；order；finite logarithmic order；logarithmic convergence exponent of zeros

(责任编辑：王金莲)