第 42 卷 第 6 期 江西师范大学学报(自然科学版) Vol. 42 No. 6
2018 年 11 月 Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science) Nov. 2018

文章编号:1000-5862(2018)06-0592-04

局部分数阶微分系统的李雅普诺夫不等式研究

陆万春,漆勇方*,李良松

(萍乡学院工程与管理学院,江西 萍乡 337000)

摘要:利用局部分数阶积分,将微分方程转换成积分方程,在此基础上构造格林函数,通过研究格林函数的最大值,得到李雅普诺夫不等式.此研究结果可分析局部分数阶微分系统解的不存在区间,也可研究局部分数阶微分系统特征值问题.

关键词:局部分数阶;格林函数;边值问题;李雅普诺夫不等式

中图分类号:O 174.5 文献标志码:A DOI:10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2018.06.07

0 引言

1947 年,俄罗斯著名数学家李雅普诺夫研究了以下微分系统[1]

$$y''(t)+p(t)y(t)=0, y(a)=y(b)=0,$$

当 $t\in(a,b)$ 时,$f(x)\neq 0$,如果以上系统有非平凡解,则 $\int_a^b|p(\tau)|\mathrm{d}\tau>4/(b-a)$.

此后,越来越多的学者研究了李雅普诺夫型不等式,与此同时,李雅普诺夫不等式在实际问题中发挥着重要作用,例如在研究微分方程特征值时,经常用到李雅普诺夫型不等式的结论[2-6].

众所周知,近 10 多年来,分数阶微分系统被得到关注[7-13].当然,作为一个非常重要的研究工具,分数阶微分系统的李雅普诺夫不等式越来越受到人们重视.

2013 年,R. A. C. Ferreira[8] 研究了以下黎曼-刘维尔(Riemann-Liouville)分数阶微分系统

$$({}_aD^{\alpha}y)(t)+q(t)y(t)=0, a\leqslant t\leqslant b, 1<\alpha\leqslant 2,$$
$$y(a)=y(b)=0,$$

笔者指出,若微分系统有非平凡解[8],则 $\int_a^b|q(\tau)|\mathrm{d}\tau>\Gamma(\alpha)(4/(b-a))^{\alpha-1}$.此外,笔者还利用该不等式研究了 Mittag-Leffler 函数的零点问题.

2014 年,R. A. C. Ferreira[9] 又研究了卡普托(Caputo fractional)分数阶微分系统

$$({}_a^CD^{\alpha}y)(t)+q(t)f(t)=0, a\leqslant t\leqslant b, 1<\alpha\leqslant 2,$$
$$y(a)=y(b)=0,$$

得到了以下结论,若以上微分系统有非平凡解[9],则

$$\int_a^b|q(\tau)|\mathrm{d}\tau>\alpha^{\alpha}\Gamma(\alpha)/[(b-a)(\alpha-1)]^{\alpha-1}.$$

随后,大量的具有不同初始条件的微分系统的李雅普诺夫型不等式被研究,得到了非常丰富的研究成果.而这些系统主要是黎曼-刘维尔(Riemann-Liouville)分数阶微分系统或者是卡普托(Caputo fractional)分数阶微分系统.但上述两系统都存在一些缺陷,比如以下性质不满足

$$D_a^{\alpha}uv=vD_a^{\alpha}u+uD_a^{\alpha}v, D_a^{\alpha}(u/v)=(vD_a^{\alpha}u-uD_a^{\alpha}v)/v^2,$$
$$D^{\alpha}D^{\beta}u=D^{\alpha+\beta}u.$$

鉴于此,一些更为简单的分数阶微积分被提出,例如整合分数阶导数(conformable fractional derivative)[11] 以及局部分数阶微导数(local fractional derivative).

通过近几年的发展,局部分数阶微积分得到了

收稿日期:2018-02-11

基金项目:国家自然科学基金(11661065),江西省教育厅科技课题(GJJ151264,GJJ161265)和萍乡市科技计划(2017GY005)资助项目.

作者简介:陆万春(1978-),男,江西信丰人,副教授,主要从事复分析研究.E-mail:luwanchun540@163.com

通信作者:漆勇方(1984-),男,江西萍乡人,讲师,主要从事微分方程研究.E-mail:qiyongf2007@163.com

很好地发展，也被当做一个非常重要的工具来解决一些实际问题[7,10,12-13]. 但是，到目前为止，局部分数阶微分系统的李雅普诺夫型不等式尚未得到研究.

本文主要研究以下系统的李雅普诺夫型不等式

$$\begin{cases} \mathrm{d}^\alpha g(t)/\mathrm{d}t^\alpha + p(t)g(t) = 0, a < t < b, \\ g(a) = g(b) = 0, \end{cases}$$

其主要目的是构造李雅普诺夫型不等式，并且将该结论运用到一些实际问题中，比如局部分数阶微分系统的特征值问题和具有初值条件的微分系统的解的不存在区间问题.

1　基本概念和引理

下面介绍局部分数阶连续、局部分数阶导数以及局部分数阶积分等概念. 此外，一些将被应用的关于局部分数阶微积分的引理也将被提及到.

定义 1[14]　$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，当 $|t - t_0| < \delta$ 时，若以下不等式都成立

$$|g(t) - g(t_0)| < \varepsilon^\alpha,$$

则称 $g(t)$ 在 $t = t_0$ 处局部分数阶连续; 若 $g(t)$ 在 (a,b) 内任何一点都局部分数阶连续，则称 $g(t)$ 在区间 (a,b) 上局部分数阶连续，记作 $g(t) \in C_\alpha(a,b)$.

定义 2[15]　若 $g(t) \in C_\alpha(a,b)$，则 $g(t)$ 在 $t = t_0$ 处的导数定义为

$$\left.\frac{\mathrm{d}^\alpha g(t)}{\mathrm{d}t^\alpha}\right|_{t=t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{\Delta^\alpha(g(t) - g(t_0))}{(t - t_0)^\alpha},$$

其中 $\Delta^\alpha(g(t) - g(t_0)) \cong \Gamma(1+\alpha)(g(t) - g(t_0))$，$\left.\frac{\mathrm{d}^\alpha g(t)}{\mathrm{d}t^\alpha}\right|_{t=t_0}$ 也记作 $g^{(\alpha)}(t_0)$.

定义 3[15]　假设 $g(t) \in C_\alpha(a,b)$，$g(t)$ 在 (a, b) 上的局部分数阶积分定义为

$$ {}_aI_b^{(\alpha)} g(t) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_a^b g(t)(\mathrm{d}t)^\alpha = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} g(t_i)(\Delta t_i)^\alpha,$$

其中 $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i, \Delta t = \max\{\Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3, \cdots\}$，$[\tau_i, \tau_{i+1}]$ 是 $[a,b]$ 的子区间，且 $\tau_0 = a, \tau_n = b$.

引理 1[14]　以下具有边值条件的局部分数阶微分方程可写成积分

$$\mathrm{d}^\alpha g(t) / \mathrm{d}t^\alpha = f(t,g), a < t < b,$$

$$g(a) = g(b) = 0,$$

其积分形式是

$$g(t) = g(a) + \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}[g(b) - g(a)] + \frac{1}{\Gamma^2(1+\alpha)}\int_a^b H(t,\tau) f(\tau,g)(\mathrm{d}\tau)^\alpha,$$

其中

$$H(t,\tau) = \begin{cases} \dfrac{(b-t)^\alpha(\tau-a)^\alpha}{(b-a)^\alpha}, a \leqslant \tau \leqslant t \leqslant b, \\ \dfrac{(b-\tau)^\alpha(t-a)^\alpha}{(b-a)^\alpha}, a \leqslant t \leqslant \tau \leqslant b. \end{cases}$$

引理 2[14]　在局部分数阶领域，以下积分成立

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^c 1(\mathrm{d}x)^{(\alpha)} = \frac{(c-a)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}.$$

2　主要结果

将借助文献[14]的结论，得到局部分数阶微分系统的李雅普诺夫型不等式.

定理 1　假设 $b > t > a$，则以下具有边值条件的微分系统

$$\mathrm{d}^\alpha g(t) / \mathrm{d}t^\alpha = p(t)g(t), a < t < b,$$

$$g(a) = g(b) = 0$$

有解(其中 $1 < \alpha \leqslant 2$)，其解为

$$g(t) = \frac{1}{\Gamma^2(1+\alpha)}\int_a^b H(t,\tau) p(\tau) g(\tau)(\mathrm{d}\tau)^\alpha,$$

其中

$$H(t,\tau) = \begin{cases} \dfrac{(b-t)^\alpha(\tau-a)^\alpha}{(b-a)^\alpha}, a \leqslant \tau \leqslant t \leqslant b, \\ \dfrac{(b-\tau)^\alpha(t-a)^\alpha}{(b-a)^\alpha}, a \leqslant t \leqslant \tau \leqslant b. \end{cases}$$

证　根据引理 1，容易得到方程 $\mathrm{d}^\alpha g(t) / \mathrm{d}t^\alpha + p(t)g(t) = 0$ 的另一个形式

$$g(t) = g(a) + \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}[g(b) - g(a)] + \frac{1}{\Gamma^2(1+\alpha)}\int_a^b H(t,\tau) p(\tau) g(\tau)(\mathrm{d}\tau)^\alpha.$$

考虑已知条件 $g(a) = g(b) = 0$，不难看出，原微分系统有以下解

$$g(t) = \frac{1}{\Gamma^2(1+\alpha)}\int_a^b H(t,\tau) p(\tau) g(\tau)(\mathrm{d}\tau)^\alpha.$$

定理 2　函数 $H(t,\tau)$ 满足以下性质

(i) 当 $a \leqslant t,\tau \leqslant b$ 时，$H(t,\tau) \geqslant 0$;

(ii) $\max\limits_{t \in [a,b]} H(t,\tau) = H(\tau,\tau)$，$\tau \in [a,b]$;

(iii) $H(\tau,\tau)$ 有最大解，最大解为 $\max\limits_{\tau \in [a,b]} H(\tau,\tau) = H((a+b)/2,(a+b)/2) = ((b-a)/4)^\alpha$.

证 (i) 显然,当 $a \leqslant t,\tau \leqslant b$ 时,$H(t,\tau) \geqslant 0$.

(ii) 为了证明第 2 个性质,先定义 2 个函数 h_1 和 h_2,

$$h_1 = (b-t)^{\alpha}(\tau-a)^{\alpha}/(b-a)^{\alpha}, a \leqslant \tau \leqslant t \leqslant b,$$

$$h_2 = (b-\tau)^{\alpha}(t-a)^{\alpha}/(b-a)^{\alpha}, a \leqslant t \leqslant \tau \leqslant b.$$

(a) 将 τ 固定,对函数 h_1 求导,

$$\mathrm{d}h_1(t,\tau)/\mathrm{d}t = -\alpha(b-t)^{\alpha-1}(\tau-a)^{\alpha}/(b-a)^{\alpha} \leqslant 0.$$

因此 $h_1(\tau,\tau) \geqslant h_1(\tau,t) \geqslant 0$.

(b) 同理,很容易得到 $h_2(\tau,\tau) \geqslant h_2(\tau,t) \geqslant 0$.

由(a)和(b)可知 $H(t,\tau)$ 满足

$$\max_{t \in [a,b]} H(t,\tau) = H(\tau,\tau) = (b-\tau)^{\alpha}(\tau-a)^{\alpha}/(b-a)^{\alpha}.$$

(iii) 接下来研究函数 $H(\tau,\tau) = (b-\tau)^{\alpha}(\tau-a)^{\alpha}/(b-a)^{\alpha}$ 的最大值

$$\mathrm{d}H(\tau,\tau)/\mathrm{d}\tau = \alpha[(b-\tau)(\tau-a)]^{\alpha-1}[-2\tau+(a+b)]/(b-a)^{\alpha}.$$

不难看出,$\tau = (a+b)/2$ 是函数 $H(\tau,\tau)$ 的极大值点,因此

$$\max_{\tau \in [a,b]} H(\tau,\tau) = H((a+b)/2,(a+b)/2) = ((b-a)/4)^{\alpha}.$$

定理 3 以下具有边值条件的局部分数阶微分系统存在解

$$\mathrm{d}^{\alpha}g(t)/\mathrm{d}t^{\alpha} = p(t)g(t), a < t < b,$$

$$g(a) = g(b) = 0,$$

且满足

$$\int_a^b |p(\tau)|(\mathrm{d}\tau)^{\alpha} \geqslant \Gamma^2(1+\alpha)(4/(b-a))^{\alpha},$$

其中 $1 < \alpha \leqslant 2$.

证 利用定理 1 的结论,很容易得到以上微分系统有以下形式的解

$$g(t) = \Gamma^2(1+\alpha)\int_a^b H(t,\tau)p(\tau)g(\tau)(\mathrm{d}\tau)^{\alpha},$$

其中 $H(t,\tau)$ 在定理 1 已经给出. 因此

$$|g(t)| = \frac{1}{\Gamma^2(1+\alpha)}\int_a^b |H(t,\tau)||p(\tau)|(\mathrm{d}\tau)^{\alpha}\|g(\tau)\|,$$

其中 $\|g(\tau)\| = \max_{t\in(a,b)}\{|g(t)|\}$. 再利用定理 2,容易得到以下不等式

$$1 \leqslant \frac{1}{\Gamma^2(1+\alpha)}\left(\frac{b-a}{4}\right)^{\alpha}\int_a^b |p(\tau)|(\mathrm{d}\tau)^{\alpha},$$

因此

$$\int_a^b |p(\tau)|(\mathrm{d}\tau)^{\alpha} \geqslant \Gamma^2(1+\alpha)(4/(b-a))^{\alpha},$$

定理 3 得证.

例 1 若 λ 是以下局部分数阶微分系统的特征值(其中 $1 < \alpha \leqslant 2$)

$$\mathrm{d}^{\alpha}g(t)/\mathrm{d}t^{\alpha} = \lambda g(t), a < t < b, \quad (1)$$

$$g(a) = g(b) = 0, \quad (2)$$

则 $|\lambda| \geqslant \Gamma^2(1+\alpha)(4/(b-a))^{\alpha}/(b-a)^{\alpha}$.

证 因为 λ 是(1) ~ (2)的特征值,利用定理 3 的结论,可得

$$\int_a^b |\lambda|(\mathrm{d}\tau)^{\alpha} \geqslant \Gamma^2(1+\alpha)(4/(b-a))^{\alpha}.$$

由引理 2 知

$$\int_a^b |\lambda|(\mathrm{d}\tau)^{\alpha} = (b-a)^{\alpha}|\lambda|,$$

因此以下不等式成立

$$(b-a)^{\alpha}|\lambda| \geqslant \Gamma^2(1+\alpha)(4/(b-a))^{\alpha},$$

$$|\lambda| \geqslant \Gamma^2(1+\alpha)(4/(b-a))^{\alpha}/(b-a)^{\alpha}.$$

由以上分析可知,当 $|\lambda| < (4/(b-a))^{\alpha}\Gamma^2(1+\alpha)/(b-a)^{\alpha}$ 时,系统(1) ~ (2)无解.

3 结论

局部分数阶微积分是一个新的研究领域,很多问题有待解决,如局部分数阶微分方程解的存在唯一性问题、微分系统稳定性问题. 在这之前,局部分数阶微分系统的李雅普诺夫型不等式尚未得到研究. 本文研究了具有边值条件的局部分数阶微分方程,得到了李雅普诺夫不等式. 利用该研究结果可以分析局部分数阶微分系统解的不存在区间,也可以研究局部分数阶微分系统特征值问题. 今后,高阶局部分数阶微分系统的李雅普诺夫型不等式有待研究,且李雅普诺夫型不等式将被广泛应用.

4 参考文献

[1] Lyapunov A. Probleme general de la stabilite de mouvement [M]. Princeton: Princeton Univ Press, 1947: 259-260.

[2] Parhi N, Panigrahi S. Lyapunov-type inequality for higher order differential equations [J]. Math Slovaca, 2002, 52(1): 31-46.

[3] Tiryaki A. Recent developments of Lyapunov-type inequalities [J]. Adv Dyn Syst Appl, 2010, 5(2): 231-248.

[4] Cakmak D. Lyapunov-type integral inequalities for certain

higher order differential equations [J]. Appl Math Comput,2010,216(2):368-373.

[5] Yang Xiaojing,Luo Guiming. Lyapunov-type inequality for a class of even-order differential equations [J]. Appl Math Comput,2010,215(11):3884-3890.

[6] Zhang Qiming,He Xiaofei. Lyapunov-type inequalities for even order differential equations [J]. Appl Math Lett,2012,25(11):1830-1834.

[7] 肖水明,杨兰惠,周家兴. 分数阶流行病模型的近似解析解 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版,2015,39(5):526-530.

[8] Ferreira R A C. A Lyapunov-type inequality for a fractional boundary value problem [J]. Fract Calc Appl Anal,2013,16(4):978-984.

[9] Ferreira R A C. On a Lyapunov-type inequality and the zeros of a certain Mittag-Leffler function [J]. J Math Anal Appl,2014,412(2):1058-1063.

[10] 杨志宏,张彩霞,屈双惠,等. 异分数阶 chen 系统的动力学特性及其多元电路实现 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版,2017,41(2):133-139.

[11] Khalil R,Horani M Al,Yousef A,et al. A new definition of fractional derivative [J]. J Comput Appl Math,2014,264(5):65-70.

[12] Yang Xiaojun. A short introduction to Yang-Laplace transforms in fractal space [J]. Advances in Information Technology and Management,2012,1(2):38-43.

[13] 谢志勇,谢显华,马丽. 一类非线性分数阶微分方程反周期边值问题解的存在性 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版,2014,38(6):562-568.

[14] Yang Xiaojun. Local fractional integral equations and their applications [J]. Advances in Computer Science and its Applications,2012,1(4):234-239.

[15] Yang Xiaojun. Local fractional integral transforms [J]. Progr in Nonlinear Sci,2011,4:1-225.

The Lyapunov-Type Inequality for Local Fractional Differential Equation

LU Wanchun,QI Yongfang*,LI Liangsong

(School of Management and Engineering,Pingxiang University,Pingxiang Jiangxi 337000,China)

Abstract: The local fractional differential equation with boundary conditions is studied,and a Lyapunov-type inequality is presented. The main steps are as follows,in the first place,the local fractional differential equation is transformed into the local integral equation through the local fractional integral tool. Green´s function is established. Lyapunov-type inequality is obtained based on the simple analysis of the Green´s function. The result can be applied to study the interval where the local fractional system has no nontrivial solution. In addition,eigenvalue for local fractional system can be studied through the result.

Key words: local fractional; Green´s function; boundary value problem; Lyapunov-type inequality

(责任编辑: 王金莲)