文章编号:1000-5862(2018)06-0596-04

关于有限群 p-幂零性的刻画

潘红飞[1],刘 秀[2]

(1. 淮阴师范学院数学科学学院,江苏 淮安 223300;2. 昭通学院数学与统计学院,云南 昭通 657000)

摘要:设 $T(G)$ 和 $k(G)$ 分别为有限群 G 的复特征标次数和与共轭类数,且设 p 是素数,若 $|G|/T(G)<2p/(p+1)$ 或 $|G|/k(G)<4p/(p+3)$,则 G 是 p-幂零群.

关键词:特征标次数和;共轭类;p-幂零性

中图分类号:O 152 文献标志码:A DOI:10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2018.06.08

0 引言

本文出现的群 G 均为有限阶的. 为了叙述方便,给出文中出现的相关定义. 令 $G'=\langle [a,b] \mid a,b\in G\rangle$ 为 G 的换位子群(也称导子群),这里 $[a,b]=a^{-1}b^{-1}ab$ 为元素 a,b 的换位子. 归纳定义群 G 的 n 阶换位子群为

$$G^{(0)}=G,G^{(n)}=(G^{(n-1)})'.$$

称群 G 为可解群,若存在正整数 n,使得 $G^{(n)}=1$.

对于 G 的子群列

$$G=G_0\geqslant G_1\geqslant G_2\geqslant\cdots\geqslant G_s=1,\qquad(1)$$

若对所有的 $i=1,2,\cdots,s$,有 $G_i\lhd G$(G_i 是 G 的正规子群),则称(1)式为 G 的一个正规群列;若对所有的 $i=1,2,\cdots,s-1$,有 $G_{i+1}\lhd G_i$,则称(1)式为 G 的一个次正规群列;若每个 G_i 是真包含在 G_{i-1} 中的 G 的极大正规子群,则称(1)式为 G 的主群列;若每个 G_i 是 G_{i-1} 的极大正规子群,则称(1)式为 G 的合成群列. 关于可解群的刻画,也有从合成群列和主群列给出的等价刻画,即

(i) 群 G 可解当且仅当 G 的合成因子都是素数阶循环群;

(ii) 群 G 可解当且仅当 G 的主因子都是素数幂阶的初等交换群.

称群 G 为 p-可解群,若存在 G 的一个正规群列(1),使得 G_i/G_{i+1} 为 p-群或 p'-群;称群 G 为超可解群,若 G 的每个主因子都是循环群;称群 G 为 p-超可解,若 G 的每个主因子为 p 阶循环群或 p'-群.

称群列 $G=K_1\geqslant K_2\geqslant\cdots\geqslant K_{s+1}=1$ 为 G 的中心群列,若 $[K_i,G]\leqslant K_{i+1},i=1,2,\cdots,s$. 幂零群是通过中心群列来定义的,即若群 G 有中心群列,则称 G 为幂零群. 称群 G 为 p-幂零群,若对于 G 的任意 Sylow-子群 P,有正规补子群 N 使得 $G=PN$.

设 $I_{rr}(G)$ 为群 G 的复不可约特征标的集合,令 $T(G)$ 为群 G 的所有不可约特征标次数和,即 $T(G)=\sum_{\chi\in I_{rr}(G)}\chi(1)$. 特征标次数和的研究已经引起了很多学者的兴趣. 比如,对于平均不可约特征标次数 $a_{cd}(G)=T(G)/|I_{rr}(G)|$,K. Magaard 等[1] 证明了若 $a_{cd}(G)\leqslant 2$,则 G 可解,且他们进一步猜想:若 $a_{cd}(G)\leqslant 3$,则 G 可解. I. M. Isaacs 等[2] 证明了这个猜想,且有一系列关于可解群的结论,即

(i) 若 $a_{cd}(G)\leqslant 3$,则 G 可解;

(ii) 若 $a_{cd}(G)\leqslant 3/2$,则 G 超可解;

(iii) 若 $a_{cd}\leqslant 4/3$,则 G 幂零;

(iv) 设 G 为奇阶群,若 $a_{cd}(G)\leqslant 27/11$,则 G 超可解;

(v) 设 G 为奇阶群,若 $a_{cd}(G)\leqslant 3p/(p+2)$,则 G 幂零,这里 p 是 $|G|$ 的最小素因子.

A. Moreto 等[3] 进一步证明了若 $a_{cd}(G)\leqslant 16/5$,则 G 可解,此时的边界值 16/5 是最好的,不能

收稿日期:2018-05-10

基金项目:国家自然科学基金(11801208)资助项目.

作者简介:潘红飞(1985-),男,江苏淮安人,讲师,博士,主要从事有限群论研究. E-mail:hfpanha@163.com

再大.

令 $S(G)=|G|/T(G)$，$a_{cs}(G)=|G|/k(G)$，这里 $k(G)$ 为群 G 的共轭类数. H. P. Tong-Viet[4] 证明了若 $S(G)<15/4$，则 G 可解. A. Maroti 等[5] 证明了若 $a_{cs}(G)\leqslant p^2/3$，则 G 为 p-可解. 因为 $a_{cs}(G)\leqslant(S(G))^2$（见引理 1），所以当 $S(G)\leqslant p/\sqrt{3}$ 时，G 可解. 对超可解群也有一个精确地刻画：若 $S(G)<2$，则 G 超可解. 文献 [6-7] 对群 G 的非 r-可解性进行了刻画，得到了对于一个大于等于 5 的素数 r，$P_{SL}(2,r)$ 是使得 $a_{cd}(G)$，$S(G)$，$a_{cs}(G)$ 这 3 个量取得最小的非 r-可解群.

令 $a_{cd_{p'}}(G)$ 为群 G 的平均 p' 不可约特征标次数，H. N. Nguyen[8] 用 $a_{cd_{p'}}(G)$ 刻画了群 G 的 p-幂零性，即

（i）若 $a_{cd_{2'}}(G)<3/2$，则 G 为 2-幂零；

（ii）若 $a_{cd_{p'}}(G)<4/3$，则 G 为 p-幂零，这里 p 为奇素数.

M. L. Lewis[9] 给出：若 $a_{cd_{p'}}(G)<2(p+1)/(p+3)$，则群 G 为 p-幂零.

本文利用 $S(G)$ 和 $a_{cs}(G)$ 这 2 个量来刻画群 G 的 p-幂零性，即有如下主要结论.

定理 1 设 G 是群，p 是一个素数，若 $S(G)<2p/(p+1)$，则 G 为 p-幂零.

推论 1 设 G 是群，若 $S(G)<4/3$，则 G 交换.

定理 2 设 G 是群，p 是一个素数，若 $a_{cs}(G)<4p/(p+3)$，则 G 为 p-幂零.

推论 2[10] 设 G 是群，若 $a_{cs}(G)<8/5$，则 G 交换.

注 1 从文献 [4,11] 知，满足定理 1 与定理 2 条件的群 G 是可解的. 另外，若 G 是阶为 $2p$ 的二面体群，这里 p 是奇素数，则 $S(G)=2p/(p+1)$，$a_{cs}(G)=4p/(p+3)$，从而定理 1 与定理 2 中的不等式也是临界情况的取值.

文中出现的 $F(G)$ 为群 G 的 Fitting 子群，$\Phi(G)$ 为 G 的 Frattini 子群. 群 H 与 K 的换位子群是 $[H,K]=\langle[h,k]\mid h\in H,k\in K\rangle$.

1 相关引理

为证明定理，需要如下的引理.

引理 1[6,11-12] 设 G 是群，则有

（i）$(a_{cd}(G))^2\leqslant a_{cs}(G)\leqslant(S(G))^2$，且等号成立当且仅当 G 交换；

（ii）若 $H\leqslant G$，则 $S(H)\leqslant S(G)$，$a_{cs}(H)\leqslant a_{cs}(G)$；

（iii）若 $N\lhd G$，则 $a_{cs}(G/N)a_{cs}(N)\leqslant a_{cs}(G)$.

引理 2 设群 A 忠实不可约作用在一个阶为 p^a 的初等交换群 F 上，令 $G=AF$，若 A 交换，则有 $S(G)\geqslant 2p/(p+1)$；若 A 非交换，则 $S(G)\geqslant 2$.

证 若 A 交换，则由文献 [13] 知 A 循环. 从而 $\forall\lambda\in I_{rr}(F)-1_F$，有 $I_G(\lambda)=1$. 故 A 作用在 $I_{rr}(F)-1_F$ 上的每个轨道长为 $|A|$. 所以 $\lambda^G\in I_{rr}(F)$，由文献 [14] 知

$$T(G)=\sum_{\chi\in I_{rr}(G)}\chi(1)=\sum_{\chi\in I_{rr}(A)}\chi(1)+|A|(|F|-1)/|A|=|A|+p^a-1,$$

故有

$$S(G)=|G|/T(G)=|A|p^a/(|A|+p^a-1)\geqslant 2p^a/(p^a+1)\geqslant 2p/(p+1).$$

若 A 非交换，由文献 [9] 和引理 1 得 $S(G)\geqslant a_{cd}(G)\geqslant 2$.

若非平凡群 H 无不动点作用在非平凡群 N 上，则半直积 $G=H\ltimes N$ 是 Frobenius 群（简称 F-群），其中 H 和 N 分别称为 G 的 F-补和 F-核.

引理 3 设 p 是素数，N 是一个交换 p-群，$G=NH$ 是一个 Frobenius 群，F-核为 N，F-补 H 是素数阶，则 $a_{cs}(G)\geqslant 4p/(p+3)$.

证 设 $|H|=h$，$|N|=p^a$. 由文献 [14] 知

$$k(G)=k(H)+(p^a-1)/h=h+(p^a-1)/h.$$

所以

$$a_{cs}(G)=|G|/k(G)=hp^a/[h+(p^a-1)/h]=h^2p^a/(h^2+p^a-1)\geqslant 4p^a/(p^a+3)\geqslant 4p/(p+3).$$

引理 4 设群 G 是阶为 p^a 的群，其中 p 是素数，a 是正整数，若 $S(G)<4/3$ 或 $a_{cs}(G)<8/5$，则 G 交换.

证 假设 G 不交换，且设 G 为极小阶反例，则 G 为内交换 p-群. 由文献 [15] 知，G 有一个阶为 p^{a-1} 的极大交换正规子群且 $|G'|=p$. 根据文献 [16]，G 的非线性不可约特征标次数为 p，从而其个数为 $(p^a-p^{a-1})/p^2$. 故有

$$T(G)=p^{a-1}+(p^a-p^{a-1})p/p^2=(2p^a-p^{a-1})/p.$$

所以

$$S(G)=|G|/T(G)=p^2/(2p-1)\geqslant 4/3,$$

$$a_{cs}(G)=|G|/k(G)=p^a/[p^{a-1}+(p^a-p^{a-1})/p^2]=p^3/(p^2+p-1)\geqslant 8/5,$$

矛盾.

2 定理及其推论的证明

定理 1 的证明 若 G 不是 p-幂零群,设 G 为极小阶反例,则 $G'>1$. 令 N 是 G 的包含在 G' 中的极小正规子群,则 N 是初等交换的.

因为 $S(G)=|G|/(T(G))<2p/(p+1)$,所以

$$|G|<\frac{2p}{p+1}T(G)\Leftrightarrow\sum_{\chi\in I_{rr}(G)}\chi(1)^2<\frac{2p}{p+1}\sum_{\chi\in I_{rr}(G)}\chi(1)\Leftrightarrow$$

$$\sum_{\chi\in I_{rr}(G)}\left(\chi(1)^2-\frac{2p}{p+1}\chi(1)\right)<0\Leftrightarrow\sum_{\chi\in I_{rr}(G),\chi(1)\geqslant 2}\left(\chi(1)^2-\frac{2p}{p+1}\chi(1)\right)<\sum_{\chi\in I_{rr}(G),\chi(1)=1}\left(\frac{2p}{p+1}\chi(1)-\chi(1)^2\right)\Leftrightarrow$$

$$\sum_{\chi\in I_{rr}(G),\chi(1)\geqslant 2}\left(\chi(1)^2-\frac{2p}{p+1}\chi(1)\right)<\sum_{\chi\in I_{rr}(G/N),\chi(1)=1}\left(\frac{2p}{p+1}\chi(1)-\chi(1)^2\right).$$

注意到 $I_{rr}(G)(G/N)\subseteq I_{rr}(G)$,有

$$\sum_{\chi\in I_{rr}(G/N),\chi(1)\geqslant 2}\left(\chi(1)^2-\frac{2p}{p+1}\chi(1)\right)<\sum_{\chi\in I_{rr}(G/N),\chi(1)=1}\left(\frac{2p}{p+1}\chi(1)-\chi(1)^2\right),$$

即有

$$T(G/N)>(p+1)|G/N|/(2p),$$

从而 $S(G/N)<2p/(p+1)$. 由归纳假设知,G/N 有正规 p-补 K/N. 若 N 是 p'-群,则 K 为 G 的正规 p-补,矛盾. 故 N 为初等交换 p-群. 令 K_1 为 K 的 Hall p-补子群,则 K_1 也为 G 的 Hall p-补子群. 由 Frattini 论断有

$$G=KN_G(K_1)=NK_1N_G(K_1)=NN_G(K_1).$$

设 $H=N_G(K_1)$,若 $G=H$,则 K_1 为 G 的正规 p-补,矛盾. 因此可设 $H<G$. 从而有 $G=NH$ 且 $N\cap H<N$. 注意到 $N\cap H$ 为 G 的正规子群,由 N 是 G 的极小正规子群知 $N\cap H=1$. 若 $N\subseteq Z(G)$,则 $K=N\times K_1$. 故 K_1 为 G 的正规子群,矛盾. 故可设 $N\not\subseteq Z(G)$. 由 N 的极小性知 $[N,G]=N$. 此时 N 是一个忠实不可约 H-模. 若 H 交换,则由引理 2 知 $2p/(p+1)\leqslant S(G)<2p(p+1)$,矛盾. 若 H 非交换,则由引理 2 知,$2\leqslant S(G)<2p/(p+1)$,矛盾. 定理 1 证毕.

推论 1 的证明 设 p 为 $|G|$ 的任意素因子,则 $S(G)<4/3\leqslant 2p/(p+1)$,由定理 1 知 G 为幂零群. 又由引理 1(ii) 知对于 G 的 Sylow p-子群 P,有 $S(P)<4/3$,故由引理 4 知 P 交换,由 p 的任意性知 G 交换.

定理 2 的证明 根据引理 1,定理 2 的条件对 G 的子群与商群遗传,设 G 为极小阶反例.

(i) $\Phi(G)=1$. 否则 $G/\Phi(G)$ 是 p-幂零的,从而 G 为 p-幂零,矛盾.

(ii) $F(G)$ 是 G 的极小正规子群. 显然,$F(G)=V_1\times V_2\times\cdots\times V_s$,这里 $V_i(i=1,2,\cdots,s)$ 是 G 的极小正规子群. 若 $s\geqslant 2$,则

$$G\cong G/(V_i\cap V_j)\leqslant G/V_i\times G/V_j,i\neq j,$$

G 是 p-幂零的,矛盾.

(iii) G 为 Frobenius 群. 众所周知,$F(G)$ 是一个初等交换 p-群. 而且 $F(G)$ 在 G 中有补子群 A. 若 A 为 p-群,则 G 为 p-群,由引理 4 的证明知 G 交换,矛盾. 故 A 不是 p-群,从而 A 为素数 q 阶的循环群,$q\neq p$. 否则,在 A 中取 p'-元 x 使得 $\langle x\rangle<A$,则 $\langle x\rangle F(G)=\langle x\rangle\times F(G)$,所以 $x\in C_G(F(G))\leqslant F(G)$,矛盾. 设 $A=\langle x\rangle$,则 $\langle x\rangle$ 互素作用在 $F(G)$ 上,有 $F(G)=C_{F(G)}(\langle x\rangle)\times[F(G),\langle x\rangle]$. 显然,

$$[F(G),\langle x\rangle]\lhd\langle F(G),\langle x\rangle\rangle=G.$$

若 $[F(G),\langle x\rangle]=1$,则 $F(G)=C_{F(G)}(\langle x\rangle)$,$x\in C_G(F(G))\leqslant F(G)$,矛盾. 所以

$$[F(G),\langle x\rangle]=F(G),C_{F(G)}(\langle x\rangle)=1,$$

故 G 是 Frobenius 群且 F-核为 $F(G)$,F-补为 A,而且 A 是素数阶循环群.

根据引理 3,有 $a_{cs}(G)\geqslant 4p/(p+3)$,矛盾.

推论 2 的证明 类似推论 1 的证明.

3 结论与展望

本文利用 $|G|/T(G)$ 和 $|G|k(G)$ 这 2 个量来研究群 G 的 p-幂零性,得到了 2 个判别定理,即若 $|G|/T(G)<2p/(p+1)$ 或 $|G|/k(G)<4p/(p+3)$,则 G 是 p-幂零群. 自然地,还希望考虑利用这 2 个量怎样来刻画群 G 的 p-超可解性.

4 参考文献

[1] Magaard K,Tong-Viet H P. Character degree sums in fi-

nite nonsolvable groups [J]. Journal of Group Theory, 2011, 14(1): 53-57.

[2] Isaacs I M, Loukaki M, Moreto A. The average degree of an irreducible character of a finite group [J]. Israel Journal of Mathematics, 2013, 197(1): 55-67.

[3] Moreto A, Nguyen H N. On the average character degree of finite groups [J]. Bulletin of the London Mathematical Society, 2014, 46(3): 454-462.

[4] Tong-Viet H P. On groups with large character degree sums [J]. Archiv der Mathematik, 2012, 99(5): 401-405.

[5] Maroti A, Nguyen H N. Character degree sums of finite groups [J]. Forum Mathematicum, 2015, 27(4): 2453-2465.

[6] Qian Guohua. On the average character degree and the average class size in finite groups [J]. Journal of Algebra, 2015, 423: 1191-1212.

[7] Pan Hongfei, Li Xianhua. On the character degree sums [J]. Communications in Algebra, 2017, 45(3): 1211-1217.

[8] Nguyen H N. Characters of p'-degree and Thompson's character degree theorem [J]. Revista Matematica Iberoamericana, 2017, 33(1): 117-138.

[9] Lewis M L. Variations on average character degrees and p-nilpotence [J]. Israel Journal of Mathematics, 2016, 215(2): 749-764.

[10] Gustafson W H. What is the probability that two group elements commute [J]. American Mathematical Monthly, 1973, 80(9): 1031-1034.

[11] Guralnick R M, Robinson G R. On the commuting probability in finite groups [J]. Journal of Algebra, 2006, 300(2): 509-528.

[12] Berkovich G Y, Zhmud E M. Characters of finite groups: Part I [M]. Rhode Island: American Mathematical Society, 1997.

[13] Manz O, Wolf T R. Representations of solvable groups [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.

[14] Huppert B. Character theory of finite groups [M]. Berlin: Walter de Gruyter Company, 1998.

[15] Miller G A, Moreno H C. Non-abelian groups in which every subgroup is abelian [J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1903, 4(4): 398-404.

[16] Isaacs I M. Character theory of finite groups [M]. New York: Academic Press, 1976.

On the Characterization of the p-Nilpotent of Finite Groups

PAN Hongfei[1], LIU Xiu[2]

(1. School of Mathematical Sciences, Huaiyin Normal University, Huaian Jiangsu 223300, China;

2. School of Mathematics and Statistics, Zhaotong University, Zhaotong Yunnan 657000, China)

Abstract: Let $T(G)$ and $k(G)$ be respectively the sums of all complex irreducible character degrees and the number of conjugacy classes of a finite group G. Let p be a prime number. It is proved that if $|G|/T(G) < 2p/(p+1)$ or $|G|/k(G) < 4p/(p+3)$, then G is p-nilpotent.

Key words: character degree sums; conjugacy class; p-nilpotent

（责任编辑：曾剑锋）