

文章编号: 1000-5862(2018)06-0604-06

# 双侧增加的分段线性不连续映射的 边界碰撞分岔

许宏飞, 李群宏\*, 宁 敏, 商梦媛

(广西大学数学与信息科学学院, 广西南宁 530004)

摘要: 利用 Leonov 方法研究了一类左右 2 侧都增加的分段线性不连续映射的动力学行为. 通过调节系统的重要参数  $l$ , 借助理论分析和数值仿真发现映射存在周期数成等差数列增长的加周期现象, 也存在混沌和发散现象; 通过推导周期轨道的边界碰撞分岔曲线, 确定了稳定周期轨道区域. 根据高复杂度水平周期轨道的边界碰撞分岔曲线, 结合双参数分岔图, 解释了加周期现象和周期叠加现象.

关键词: 边界碰撞分岔; 加周期现象; 周期叠加现象; 高复杂度水平周期轨道

中图分类号: O 317; O 193 文献标志码: A DOI: 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2018.06.10

## 0 引言

近年来, 随着对分段光滑系统理论研究的不断深入, 有关分段光滑映射在物理科学和工程方面的应用涌现出大量的结果<sup>[1-5]</sup>, 且分段光滑映射在经济模型中也有广泛应用<sup>[6-8]</sup>.

非光滑系统(连续和不连续)的特征是: 由于在系统参数变化时导致周期解碰撞某些不变集诱发边界碰撞分岔现象. 由于边界碰撞分岔是一种全局分岔<sup>[8]</sup>, 因此分析周期解与不变集的碰撞分岔并不简单. 边界碰撞分岔(BCB)最早是由 H. Nusse 等<sup>[9]</sup>提出的, 之后被学者们一直沿用至今. 分段连续映射和分段不连续映射都可能发生边界碰撞分岔, 且分段连续映射的研究成果已经很丰富<sup>[9-11]</sup>, 但到目前为止, 对于分段不连续映射即使是线性的也只有部分结果<sup>[12-13]</sup>. L. Gardin 等<sup>[14]</sup>应用 Leonov 的方法研究了分段光滑映射高复杂度水平周期轨道的结构, 使得人们对更高周期的周期轨道的结构有了更深入地了解. 秦志英等<sup>[15]</sup>讨论了分段非线性不连续映射的周期  $n$  解的边界碰撞分岔. 文献[16-18]对如下映射或其变形进行了讨论:

$$x_{n+1} = \begin{cases} ax_n + \mu, & x_n < 0, \\ bx_n + \mu + l, & x_n > 0. \end{cases} \quad (1)$$

文献[16]对参数  $l = 0, 1$  (分别对应连续和不连续情形) 提出 2 种数值方法来分析映射(1)的多波段混沌吸引子; 文献[17]分析了映射(1)的混沌区域的整体结构, 解释了周期轨道的共存现象; 文献[18]将  $a, b$  的参数空间划分为多个子区域, 分析了参数  $a, b$  在各个子区域内, 映射(1)周期轨道的存在性、稳定性以及混沌的存在性.

## 1 数学模型

首先将映射(1)转换为下列分段不连续线性映射的形式, 即

$$x' = T(x) = \begin{cases} f(x) = ax + \mu, & x \leq 0, \\ g(x) = bx + \mu + l, & x > 0. \end{cases} \quad (2)$$

这里  $x'$  表示映射的值, 而不是  $x$  的导数. 当  $l = 0$  时, 映射(2)为分段连续映射. 研究的参数空间记为  $P = \{(a, b, \mu, l) \mid 0 < a < 1, b > 1, \mu > 0, l < 0\}$ .

不连续点  $x = 0$  将状态空间分割为 2 个区域:  $S_1 = \{x \mid x \leq 0\}$ ,  $S_2 = \{x \mid x > 0\}$ . 当  $(a, b, \mu, l) \in P$  时,  $df(x)/dx = a > 0$ ,  $dg(x)/dx = b > 1$ , 则映射(2)中

收稿日期: 2018-01-20

基金项目: 国家自然科学基金(11372077), 广西自然科学基金(2013GXNSFAA019017)和广西青年科学基金(2014GXNSFBA118024)资助项目.

通信作者: 李群宏(1964-), 男, 广西扶绥人, 教授, 博士, 博士生导师, 主要从事常微分方程定性理论和非线性动力学理论与应用研究. E-mail: liqh@gxu.edu.cn

$f(x)$ 、 $g(x)$  都为单调递增函数. 因此映射(2) 为双侧增加的分段不连续映射.

本文针对映射(2) 的不连续因素  $l$  展开讨论. 通过数值仿真发现当  $l$  由 0 开始减小时, 映射(2) 出现周期窗口规律性排列、混沌和发散现象. 理论分析映射(2) 的迭代特性和规律, 发现可能存在  $L^k R$  序列的周期轨道. 推导周期轨道的边界碰撞分岔曲线, 得到稳定周期轨道的参数区域. 借助高复杂度水平周期轨道的边界碰撞分岔分析和双参数分岔图, 解释映射(2) 出现的特殊现象.

## 2 理论分析与数值仿真验证

通过对映射(2) 的迭代特性进行分析, 得到 3 个结论.

**定理 1** 当  $(a, b, \mu, l) \in P$ ,  $\mu < -l$  时, 映射(2) 在  $S_2$  区域中有不稳定的不动点  $x_R^* = (\mu + l)/(1 - b)$ , 且映射(2) 的迭代点在  $(0, x_R^*]$  内单调递减, 在  $(0, +\infty)$  和  $(x_R^*, +\infty)$  内单调递增; 当  $(a, b, \mu, l) \in P$ ,  $\mu \geq -l$  时, 映射(2) 在整个相空间中没有不动点, 且映射(2) 的迭代点在整个状态空间内单调递增.

**推论 1** 当  $(a, b, \mu, l) \in P$  时, 在  $S_1$  和  $S_2$  区域中映射(2) 都不存在周期轨道.

**定理 2** 当  $(a, b, \mu, l) \in P$ ,  $l \leq -b\mu$  时, 映射(2) 有不变吸引区间  $[\mu + l, \mu]$ .

观察映射(2) 的分岔图 1, 在直线  $x = 0$  上下两侧都存在迭代点, 这说明没有任何周期轨道完全处于  $S_1$  区域或  $S_2$  区域, 即验证了推论 1 的正确性. 选取与图 1 相同的参数  $\mu = 0.2$ ,  $b = 1.5$ . 根据定理 2 知, 在  $l \leq -0.3$  区域内映射(2) 有不变吸引区间, 即

在图 1 中, 映射(2) 的分岔结构夹在直线  $x = \mu$  和直线  $x = \mu + l$  之间.

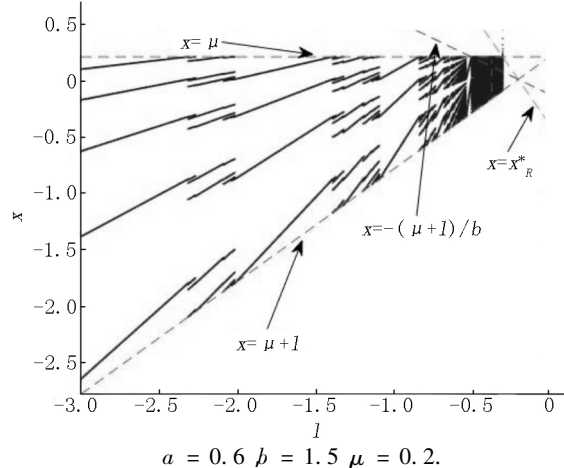


图 1 映射(2) 的分岔图

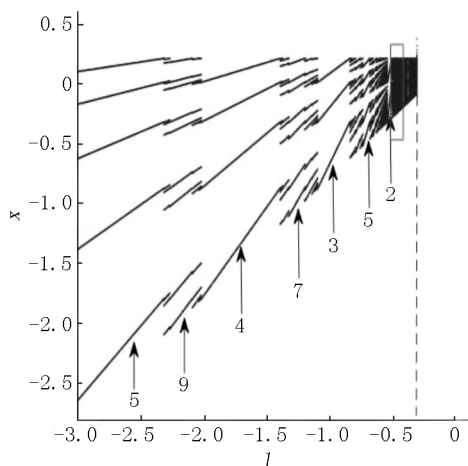
**定理 3** 当  $(a, b, \mu, l) \in P$ ,  $\mu < -l$  时,  $x_0$  为初始迭代点, 有

(i) 若  $0 < x_0 \leq -(\mu + l)/b$ , 则  $x_0$  在  $S_2$  区域经过 1 次迭代立即进入  $S_1$  区域;

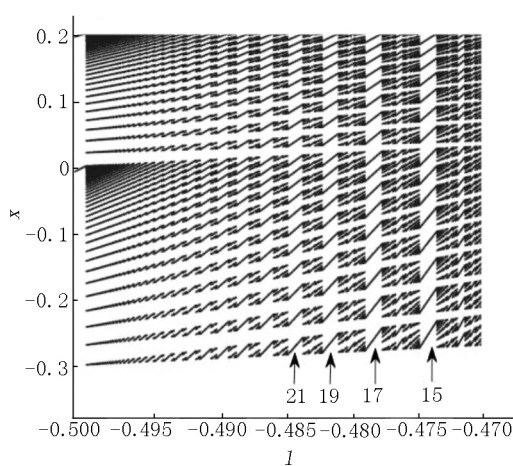
(ii) 若  $-(\mu + l)/b < x_0 < x_R^*$ , 则  $x_0$  在  $S_2$  区域至少经过 2 次迭代进入  $S_1$  区域;

(iii) 若  $x_0 \geq x_R^*$ , 则由  $x_0$  出发的迭代序列永远不会进入到  $S_1$  区域.

在图 2(a) 中, 在  $l \in (-3.0, -0.5)$  区间内观察到 2 类周期轨道: 周期数以 1 为公差和以 2 为公差成等差数列增长的周期轨道, 且随着参数  $l$  的减小, 周期 2 和周期 3 轨道之间存在周期 5 轨道, 周期 3 和周期 4 轨道之间夹着周期 7 轨道, 周期 4 和周期 5 轨道之间夹着周期 9 轨道. 观察图 2(a) 中方框部分的放大图, 即图 2(b), 在  $l \in (-0.50, -0.47)$  内, 存在周期数以公差为 2 的等差数列增长的周期轨道.



(a)  $-3.0 \leq l < 0$



(b)  $-0.50 \leq l < -0.47$

$a = 0.6$ ,  $b = 1.5$ ,  $\mu = 0.2$ ,  $x_0 = 0.5$ .

图 2 映射(2) 关于  $l$  的分岔图

### 3 $L^k R$ 序列周期轨道

由定理 3 知,当满足  $(a \neq \mu \neq l) \in P$   $\mu < -l$  和  $0 < x_0 \leq -(\mu + l)/b$  时  $x_0$  在  $S_2$  区域经过 1 次迭代立即进入  $S_1$  区域,可能形成在映射 (2) 的右侧迭代 1 次左侧迭代多次的周期轨道.若用  $R$  表示线性函数  $g(x)$  迭代 1 次,用  $L^k$  表示线性函数  $f(x)$  迭代  $k$  次,则该周期  $k+1$  解的符号序列记为  $L^k R$ . 周期轨道  $L^k R$  满足  $f^k \circ g(x_0) = x_0$ . 其迭代表式为

$$x_{k+1} = f^k \circ g(x_0) = a^k b x_0 + (1 - a^{k+1})\mu / (1 - a) + a^k l. \quad (3)$$

由 (3) 式得到迭代点  $x_0$  的表达式为

$$x_0 = (a^k l + \mu(1 - a^{k+1}) / (1 - a)) / (1 - a^k b), \quad (4)$$

再由 (4) 式知周期  $k+1$  解的确定,关键在于求解周期点.当周期  $k+1$  解的周期点“碰撞”边界时,即  $x_0 = 0$  或  $x_k = 0$ ,映射 (2) 将发生边界碰撞分岔.为了叙述方便,引入下面的记号:  $B_{L^k R}^l$  ( $B_{L^k R}^r$ ) 为周期点从左(右)边与不连续边界  $x = 0$  发生碰撞.

因此,可以得到  $L^k R$  序列的边界曲线为

$$B_{L^k R}^r: \mu = a^k(1 - a)l / (a^{k+1} - 1), \quad (5)$$

$$B_{L^k R}^l: \mu = -a^{k-1}l / (a^{k-1}b + (1 - a^k) / (1 - a)). \quad (6)$$

所以  $L^k R$  序列周期轨道的参数区域为

$$a^k(1 - a)l / (a^{k+1} - 1) \leq \mu \leq -a^{k-1}l / (a^{k-1}b + (1 - a^k) / (1 - a)). \quad (7)$$

事实上,在这个区域内  $L^k R$  序列周期轨道是稳定的.因为  $0 < x_0 \leq -(\mu + l)/b$  结合 (4) 式可得

$$\begin{cases} \mu < a^k(1 - a)l / (a^{k+1} - 1), \\ a^k b > 1, \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} \mu > a^k(1 - a)l / (a^{k+1} - 1), \\ a^k b < 1. \end{cases}$$

因此 (7) 式代表的区域,有  $\lambda(L^k R) = a^k b < 1$ .  $L^k R$  序列周期轨道的特征值在单位圆内,所以  $L^k R$  序列的边界曲线就是  $L^k R$  序列稳定周期轨道区域的边界曲线.

根据 (5) 式和 (6) 式  $k$  由 1 取到 7 的  $L^k R$  序列稳定周期轨道区域如图 3(a) 所示,其中  $B_{L^k R}^r$  与  $B_{L^k R}^l$  曲线之间为稳定的  $k+1$  周期轨道区域.在得到边界碰撞曲线后,由 (7) 式将  $l$  解出来,就得到  $L^k R$  序列周期轨道关于分岔参数  $l$  的范围为

$$\frac{a^{k+1} - 1}{a^k(1 - a)}\mu \leq l \leq -\frac{a^{k-1}b + (1 - a^k) / (1 - a)}{a^{k-1}}\mu. \quad (8)$$

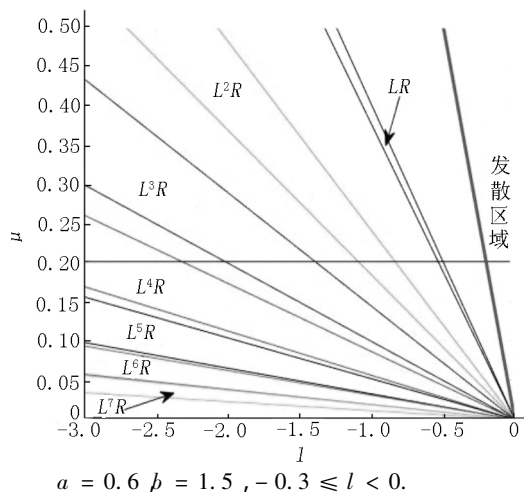
在图 3(a) 中直线  $\mu = 0.2$  被  $L^k R$  序列的边界曲线所截得的线段对应  $l$  的区间为图 2(a) 分岔图中相应  $k+1$  周期轨道  $l$  的范围.由 (8) 式可以得到:

(i) 当  $k = 1$  时,对应周期  $LR$  轨道的范围为  $-0.5333 \leq l \leq -0.5000$ ;

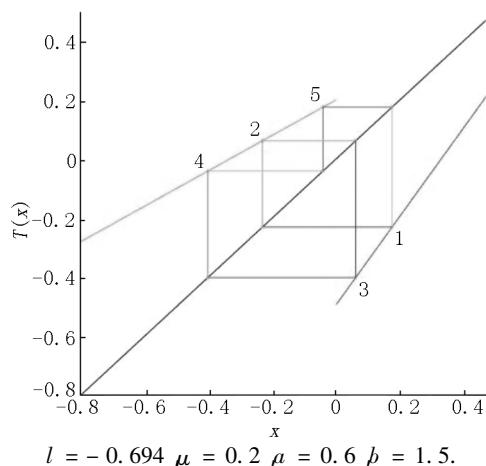
(ii) 当  $k = 2$  时,对应周期  $L^2 R$  轨道的范围为  $-1.0889 \leq l \leq -0.8333$ ;

(iii) 当  $k = 3$  时,对应周期  $L^3 R$  轨道的范围为  $-2.0148 \leq l \leq -1.3889$ .

这与图 2(a) 中相应  $k+1$  周期轨道关于  $l$  的范围完全吻合.由此表明,在不求周期解的情况下,通过边界碰撞分岔条件得到的稳定周期轨道参数区域,与数值仿真得到的结果一致,这也验证了分岔条件的正确性.



(a) 映射 (2)  $L^k R$  序列周期性区域



(b) 映射 (2) 周期轨道结构图

图 3  $L^k R$  序列周期轨道图

根据图 3(a), 选取  $LR$  与  $L^2R$  周期轨道之间的参数  $l = -0.694$   $\mu = 0.2$   $a = 0.6$   $b = 1.5$ , 映射 (2) 的周期轨道如图 3(b) 所示. 由图 3(b) 可以看到周期 2 轨道  $LR$  和周期 3 轨道  $L^2R$  中间的周期 5 轨道的结构特点为: 在  $f(x)$  上迭代 3 次, 在  $g(x)$  上迭代 2 次. 采用前面的记号, 该周期 5 轨道的序列为  $RLRLL$ .

#### 4 高复杂度水平周期轨道

根据文献 [19], 映射 (2) 的 2 分支经过复合形成的新映射的周期轨道, 被称为映射 (2) 的高复杂度水平周期轨道. 第 1 复杂度水平周期轨道包含 2 类:  $\sum_{1,1} = \{L^k R\}_{k=1}^\infty$  和  $\sum_{2,1} = \{LR^k\}_{k=1}^\infty$ , 对于其中的  $\sum_{m,n}$ ,  $n$  代表  $n$  复杂度水平,  $m$  代表  $n$  复杂度水平的第  $m$  类, 且任意的  $n$  复杂度水平周期轨道有  $2^n$  类. 为了清楚地分类, 引入  $\kappa_p^L$  和  $\kappa_p^R$  为

$$\kappa_p^L = \begin{cases} L \rightarrow LR^p, \\ R \rightarrow RLR^p, \end{cases} \quad \kappa_p^R = \begin{cases} L \rightarrow L^p RL, \\ R \rightarrow L^p R, \end{cases}$$

$\kappa_p^L$  表示用  $LR^p$  换掉原序列中的  $L$ , 用  $RLR^p$  换掉原序列中的  $R$ ;  $\kappa_p^R$  表示用  $L^p RL$  换掉原序列中的  $L$ , 用  $L^p R$  换掉原序列中的  $R$ ; 第 2 复杂的水平周期轨道可由  $\kappa_p^L$  和  $\kappa_p^R$  对  $\sum_{1,1}$  和  $\sum_{2,1}$  作用得到, 所以第 2 复杂度水平有 4 类, 分别为

$$\begin{aligned} \sum_{1,2} &= \kappa_p^L(\sum_{1,1}) = \{(RLR^p)(LR^p)^k\}_{k,p=1}^\infty, \\ \sum_{2,2} &= \kappa_p^L(\sum_{2,1}) = \{(LR^p)(RLR^p)^k\}_{k,p=1}^\infty, \\ \sum_{3,2} &= \kappa_p^R(\sum_{1,1}) = \{(L^p R)(L^p RL)^k\}_{k,p=1}^\infty, \\ \sum_{4,2} &= \kappa_p^R(\sum_{2,1}) = \{(L^p RL)(L^p R)^k\}_{k,p=1}^\infty. \end{aligned}$$

以  $\sum_{1,2}$  为例,  $\sum_{1,2}$  相当于以  $g^p \circ f \circ g(x)$  为右分支, 以  $g^p \circ f(x)$  为左分支构成新映射的  $L^k R$  序列周期轨道. 该新映射的第 1 复杂度水平周期轨道是原映射的第 2 复杂度水平周期轨道, 这些周期轨道的边界可由相应的边界碰撞分岔曲线确定.

在第 3 节中对  $\sum_{1,1}$  的周期轨道进行了讨论, 其第 2 复杂度水平对应的周期轨道的序列应为  $\kappa_p^R(\sum_{1,1})$  和  $\kappa_p^L(\sum_{2,1})$ , 即考虑  $(L^p RL)(L^p R)^k$  和  $(L^p R)(L^p RL)^k$  序列的周期轨道. 由上面的知识讨论一个新映射的边界碰撞分岔.

$$x' = F(x) = \begin{cases} F_L = f^p \circ g \circ f(x) = A_L x + B_L, & x \leq 0, \\ F_R = f^p \circ g(x) = A_R x + B_R, & x > 0. \end{cases}$$

$$\text{其中 } A_L = a^{p+1}b, A_R = a^p b, B_L = a^p b\mu + a^p l + \mu(1 - a^{p+1})/(1-a), B_R = a^p l + \mu(1 - a^{p+1})/(1-a).$$

做与 (3) 式类似的迭代过程可得,  $(L^p RL)(L^p R)^k$  序列周期轨道稳定区域的边界曲线为

$$B_{(L^p RL)(L^p R)^k}^l: \mu = -l/((1 - a^{p+1})/(1-a)a^p) + bA_R^k(1 - A_R)/(1 - A_R^{k+1}), \quad (9)$$

$$B_{(L^p RL)(L^p R)^k}^r: \mu = l/(A_R^k b/((1 - A_R^k A_L - (1 - A_R^{k+1})/(1 - A_R)) - (1 - a^{p+1})/(1-a)a^p)). \quad (10)$$

同理可得  $(L^p R)(L^p RL)^k$  序列周期轨道稳定区域的边界曲线为

$$B_{(L^p R)(L^p RL)^k}^r: \mu = -l/((1 - a^{p+1})/(1-a)a^p) + b(1 - A_L^k)/(1 - A_L^{k+1}), \quad (11)$$

$$B_{(L^p R)(L^p RL)^k}^l: \mu = -l/((1 - a^{p+1})/(1-a)a^p) + b((1 - A_L A_R - (1 - A_L^k)/(1 - A_L))/(1 - A_L^k A_R - (1 - A_L^{k+1})/(1 - A_L))). \quad (12)$$

做与 (8) 式类似的推导, 就得到  $(L^p RL)(L^p R)^k$  和  $(L^p R)(L^p RL)^k$  序列周期轨道关于分岔参数  $l$  的范围.

根据 (9) 式和 (10) 式, 当  $k, p$  取 1, 2, 3, 4 时,  $(L^p RL)(L^p R)^k$  序列稳定周期轨道区域如图 4(a) 所示, 可以看到, 当  $p = 1$  时,  $k$  每增加 1, 新周期轨道周期数增加 2; 当  $p = 2$  时,  $k$  每增加 1, 新周期轨道周期数增加 3. 当  $k = 1$  时,  $p$  每增加 1, 新周期轨道周期数增加 2; 当  $k = 2$  时,  $p$  每增加 1, 新周期轨道周期数增加 3. 以此类推, 对于  $L^k R$  高复杂度水平的周期轨道, 还可能得到以公差为  $n$  ( $n \in \mathbf{N}^+$ ) 的等差数列增长的周期轨道序列. 这种周期数的增长方式是由周期轨道的叠加形成的.

固定  $k = 1$ , 当  $p$  取 0, 1, 2 时的  $RL^p(LRL^p)^k$  序列稳定周期轨道区域如图 4(b) 所示. 可以看到  $L^2RLR$  序列轨道区域夹在  $LR$  序列轨道区域和  $L^2R$  序列轨道区域之间, 这相当于以  $L^2R$  为左分支,  $LR$  为右分支的新映射, 左右各迭代 1 次形成的周期轨道. 可以认为  $RL^{p+1}RL^p$  序列周期轨道是  $RL^p$  序列周期轨道与  $RL^{p+1}$  序列周期轨道叠加而成的轨道, 且  $RL^{p+1}RL^p$  序列周期轨道一定夹在  $RL^p$  序列周期轨道与  $RL^{p+1}$  序列周期轨道之间.

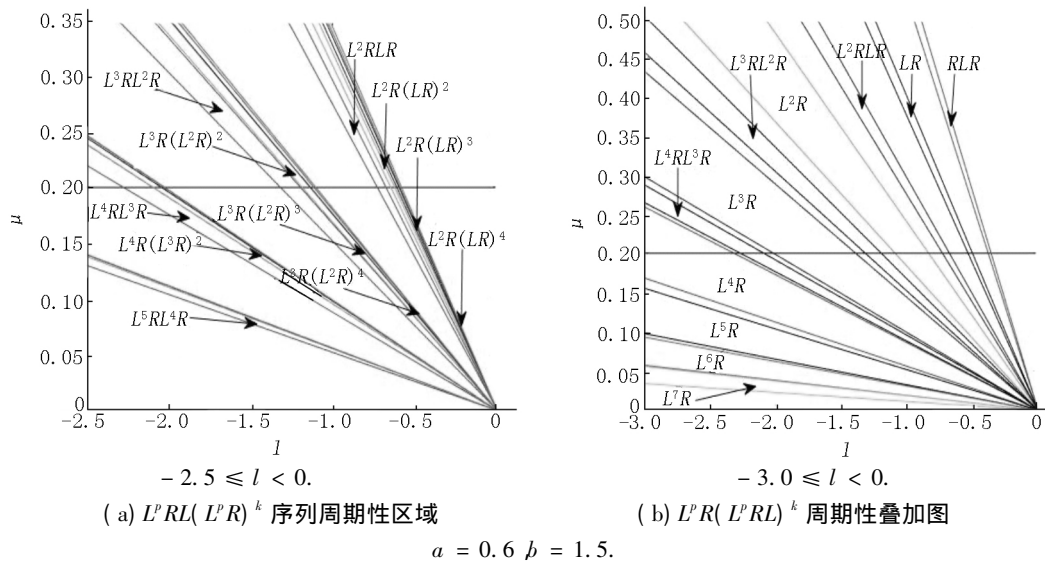


图4 序列稳定周期轨道区域

图5(a)为根据(11)式和(12)式,当 $k$ 取1, 2, 3, 4,  $p$ 取0, 1, 2时 $RL^p(L^p RL)^k$ 序列稳定周期轨道区域图. 观察可以发现 $LR(L^2 R)^2$ 序列轨道夹在 $L^2 R$ 序列轨道和 $L^2 RLR$ 序列轨道之间, $LR(L^2 R)^3$ 序列轨道夹在 $L^2 R$ 序列轨道和 $LR(L^2 R)^2$ 序列轨道之间等现象. 类似的可以得到: $L^p R(L^p RL)^k$ 序列周期轨道是 $L^p RL$ 序列周期轨道与 $L^p R(L^p RL)^{k-1}$ 序列周期轨道叠加而成的轨道. 固定 $p$ 不变, $k$ 每增加1,新周期轨道周期数增加 $p+2$ . 因此周期轨道叠加可以形成周

期数成等差数列增长的周期序列.

图5(b)是图2(b)中周期15, 17, 19轨道关于 $l$ 和 $\mu$ 的2维全局分岔图. 由图5(b)可得周期序列满足 $RRLRLR\cdots$ 结构. 这验证了定理3中满足 $x_R^* > x_0 > -(\mu + l)/b$ ,  $x_0$ 在 $S_2$ 区域至少经过2次迭代进入 $S_1$ 区域. 按照上面的方法还可以继续确定第3复杂度水平周期轨道区域的边界曲线,可以预测第3复杂度水平周期轨道区域夹在第1、第2复杂度水平周期轨道区域之间,且周期窗口更小.

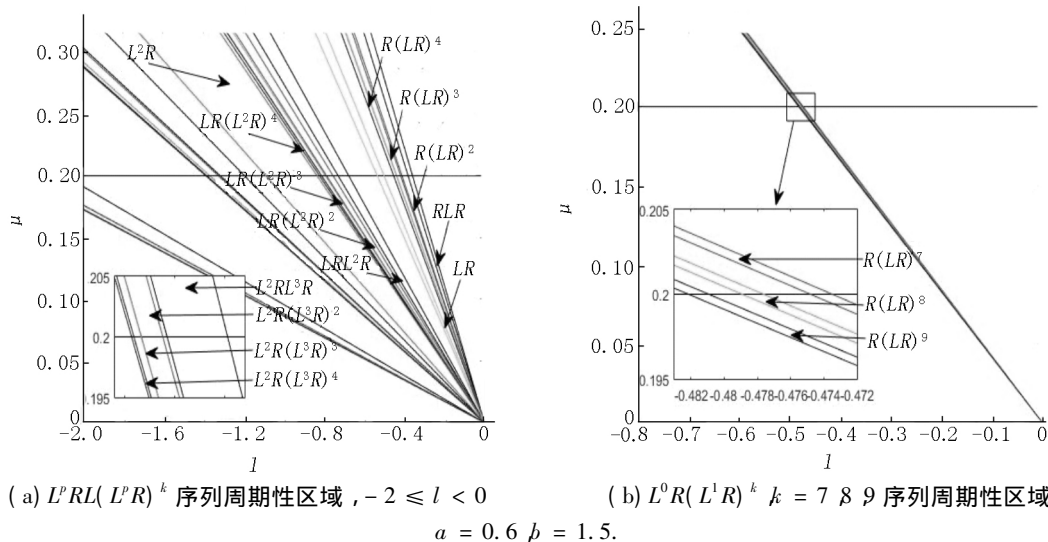


图5 序列周期性区域

## 5 结论

针对左右2边均为单调增加的线性函数的分段不连续的映射(2)展开研究. 首先理论分析了映射(2)的迭代特性,这说明在满足一定参数条件下,可能存在 $L^k R$ 序列周期轨道;其次在映射(2)的不变

吸引区间内,主要以不连续因素参数 $l$ 为研究对象,推导了 $L^k R$ 序列周期轨道及其第2复杂度水平周期轨道 $L^p RL(L^p R)^k$ 和 $L^p R(L^p RL)^k$ 边界碰撞分岔参数曲线,得到稳定周期轨道的参数区域. 最后结合理论分析与双参数分岔图可得:随着 $l$ 的减小, $LR, L^2 R, \cdots$ 序列周期轨道依次出现,导致分岔图中出现周期数以等差数列增长的周期窗口;周期轨道 $L^{k-1} R$ 和 $L^k R$

发生边界碰撞分岔会形成高复杂度周期轨道,导致分岔图中出现周期叠加现象.

## 6 参考文献

- [1] Makrooni R, Abbasi N, Pourbarat M, et al. Robust unbounded chaotic attractors in 1D discontinuous maps [J]. *Chaos Solitons and Fractals* 2015, 77: 310-318.
- [2] Avrutin V, Dutta P, Schanz M, et al. Influence of a square-root singularity on the behavior of piecewise smooth maps [J]. *Nonlinearity* 2010, 23(2): 445-463.
- [3] 沙金, 包伯成, 许建平, 等. 脉冲序列控制电流断续模式 Buck 变换器的动力学建模与边界碰撞分岔 [J]. *物理学报* 2012, 61(12): 53-65.
- [4] Gardini L, Tramontana F. Border collision bifurcation curves and their classification in a family of 1D discontinuous maps [J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2011, 44(4): 248-259.
- [5] 杨科利. 一类可变禁区的不连续系统的加周期分岔 [J]. *物理学报* 2015, 64(12): 91-97.
- [6] Puu T, Sushko I. *Oligopoly dynamics, models and tools* [M]. New York: Springer-Verlag 2002.
- [7] Puu T, Sushko I. *Business cycle dynamics, models and tools* [M]. New York: Springer Verlag 2006.
- [8] Tramontana F, Gardini L. Border collision bifurcations in discontinuous one-dimensional linear-hyperbolic maps [J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 2011, 16(3): 1414-1423.
- [9] Nusse H, Yorke J. Border-collision bifurcations including period two to period three for piecewise smooth systems [J]. *Physica D Nonlinear Phenomena* 1992, 57(1/2): 39-57.
- [10] Maistrenko Y, Maistrenko V, Vikul S, et al. Bifurcations of attracting cycles from time-delayed Chua's circuit [J]. *Int J Bifurcat Chaos* 1995, 5(3): 653-671.
- [11] Maistrenko Y, Maistrenko V, Vikul S. On period-adding sequences of attracting cycles in piecewise linear maps [J]. *Chaos Solitons Fractals* 1998, 9(1): 67-75.
- [12] Avrutin V, Schanz M. On multi-parametric bifurcations in a scalar piecewise-linear map [J]. *Nonlinearity* 2006, 19(3): 531-552.
- [13] Avrutin V, Schanz M, Banerjee S. Codimension-3 bifurcations: explanation of the complex 1-2- and 3d bifurcation structures in nonsmooth maps [J]. *Phys Rev E Stat Nonlin Soft Matter Phys* 2007, 75: 066205.
- [14] Gardini L, Tramontana F, Avrutin V, et al. Border-collision bifurcations in 1D piecewise-linear maps and Leonov's approach [J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos* 2010, 20(10): 3085-3104.
- [15] 秦志英, 李群宏. 一类非光滑映射的边界碰撞分岔 [J]. *力学学报* 2013, 45(1): 25-29.
- [16] Avrutin V, Eckstein B, Schanz M. On detection of multi-band chaotic attractors [J]. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical Physical and Engineering Sciences*, 2007, 463(2081): 1339-1358.
- [17] Avrutin V, Schanz M, Schenke B. Coexistence of the band-count-adding and bandcount-increment scenarios [J]. *Discrete Dynamics in Nature and Society* 2011(2011): 701-716.
- [18] Jain P, Banerjee S. Border-collision bifurcations in one-dimensional discontinuous maps [J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos* 2011, 13(11): 3341-3351.
- [19] Avrutin V, Sushko A, Tramontanac F. Bifurcation structure in a bimodal piecewise linear business cycle model [J]. *Dem Working Papers* 2014, 2014: 1-12.

## The Border-Collision Bifurcation in a Class of Discontinuous Maps with Two Linear Increasing Branches

XU Hongfei, LI Qunhong\*, NING Min, SHANG Mengyuan

(College of Mathematics and Information Sciences, Guangxi University, Nanning Guangxi 530004, China)

**Abstract:** Using theoretical analysis and numerical simulation, dynamic behavior of a class of discontinuous one-dimensional maps which are made of two linear increasing branches is considered by Leonov method. By modulating an important parameter of the map  $l$ , it is found that there exist the period adding sequences with period increasing of the arithmetic sequence, as well as chaos and divergence in the considered system. The boundaries of the stability region of the periodic orbits are determined by the border collision bifurcation curves of the periodic solutions. With the border collision bifurcation diagrams of periodic orbits of higher complexity levels, the phenomenon of period adding and period superposition are explained.

**Key words:** border collision bifurcation; period adding phenomenon; superposition of periodic orbit; periodic orbit of higher complexity level

(责任编辑: 曾剑锋)