

文章编号: 1000-5862(2018)06-0644-04

修正 Mathieu 方程的数值求解方法

陈 浩

(江西教育传媒集团,江西 南昌 330038)

摘要: 针对圆极化强激光与无自旋等离子体相互作用中得到的修正 Mathieu 方程,提出一种数值求解方法,并将计算结果与 WKB 近似结果进行对比,分析了该方程所反映的物理过程的稳定性问题。

关键词: 相对论量子力学; 修正 Mathieu 方程; WKB 近似

中图分类号: O 411.2 文献标志码: A DOI: 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2018.06.17

0 引言

近年来,随着激光技术的发展,强激光与量子等离子体的相互作用逐渐引起人们广泛的关注^[1-8]。2016 年, S. M. Mahajan 等^[9]在研究圆极化强激光与无自旋等离子体相互作用过程中,得到了一个修正的 Mathieu 方程。Mathieu 方程是特殊的线性 2 阶微分方程,它在物理及工程领域有许多重要的应用^[10-16]。但因其中包含三角函数,而无法求得 Mathieu 方程精确的解析解。对标准的 Mathieu 方程,自提出以来,人们发展了多种近似求解方法,如分阶展开求解法^[17]、变形参数法^[18]、Runge-Kutta 法^[19]等。分阶展开法的主要思路是先将方程的解用椭圆函数展开,然后分阶求解展开系数^[17];变形参数法是将方程的解写成指数形式,同时将指数中的参数写成方程系数的级数形式,再讨论满足不同条件下解的物理意义^[18]。这 2 种方法原则上能够比较全面的讨论 Mathieu 方程的性质,但过程繁冗。Runge-Kutta 法虽然在过程上比较简洁,但对初始条件有特别的要求^[19]。

针对 Mahajan 等得到的修正 Mathieu 方程,本文提出一种数值求解方法,并将数值计算结果与 WKB 近似结果进行对比,初步分析了该方程所反映的物理过程的稳定性问题。

1 方程的提出

无自旋带电粒子与电磁场相互作用的粒子波函

数满足克莱因-高登(K-G)方程^[9]

$$(\mathrm{i}\partial_{\mu} + qA_{\mu})(\mathrm{i}\partial^{\mu} + qA^{\mu})\psi = m^2\psi, \quad (1)$$

其中 q 和 m 分别为带电粒子的带电量和质量, A^{μ} 为电磁场的 4 维势矢量。这里采用了自然单位制,即 $\hbar = c = 1$, 其中 \hbar 和 c 分别是普朗克常数和真空中的光速。

设电磁波沿 z 轴方向传播,在圆极化电磁波中,粒子波函数可写成 $\psi(x, y, z, t) = e^{i(K_x x + K_y y)} \varphi(z, t)$, 其中 K_x 和 K_y 分别为 x 和 y 方向的波数。采用坐标变换 $\zeta = \omega t - kz$ 和 $\rho = kt - \omega z$, 其中 ω 和 k 为圆极化电磁波的频率和波数,并将波函数形式拓展为 $\psi(x, y, z, t) = e^{i(K_x x + K_y y)} e^{K_{\rho} \rho} \varphi(\zeta)$, 则(1)式可演化为^[9]

$$\mathrm{d}^2\varphi/\mathrm{d}\zeta^2 + (\mu + \lambda \cos \zeta)\varphi = 0, \quad (2)$$

其中 $\mu = K_{\rho}^2 + (m^2 + q^2 A^2 + K_x^2 + K_y^2)/(\omega^2 - k^2)$, $\lambda = (2qA \sqrt{K_x^2 + K_y^2})/(\omega^2 - k^2)$, A 为电磁波的矢势大小。

方程(2)在形式上与 Mathieu 方程类似,但与 Mathieu 方程标准形式有所不同,这里称其为修正 Mathieu 方程。

2 WKB 近似

通过 WKB 近似,可得方程(2)的解为

$$\varphi = \frac{C}{(\mu + \lambda \cos \zeta)^{1/4}} \exp(\pm i \int \sqrt{(\mu + \lambda \cos \zeta)} \mathrm{d}\zeta),$$

其中 C 为积分常数,可通过归一化来确定。该结果表明,粒子波函数在 $\mu > \lambda$ 时是稳定的,而当 $\mu < \lambda$ 时是不稳定的。在 $\mu \sim \lambda$ 图上,稳定区域和不稳定区域

收稿日期: 2018-04-12

基金项目: 国家自然科学基金(11064005, 5461020)和江西省教育厅科学技术研究(GJJ170642)资助项目。

作者简介: 陈 浩(1975-),男,江西高安人,副编审,主要从事理论物理学及物理教育的研究。E-mail: 113442963@qq.com

如图1所示,这2个区域的分界线为 $\mu = \lambda$.

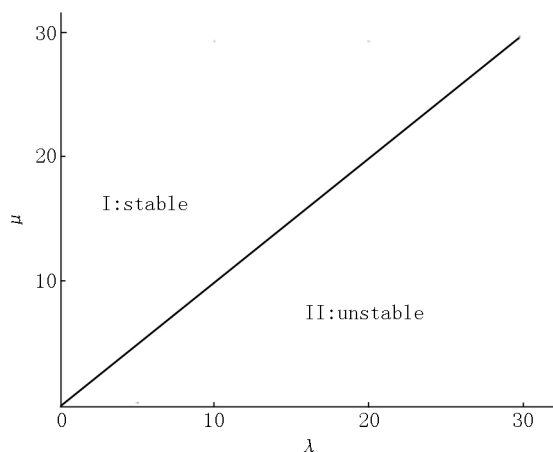


图1 WKB近似下,修正 Mathieu 方程解的稳定和不稳定区域图

3 数值求解方法

考虑到方程(2)中余弦函数的周期性,这里将解的形式写为

$$\varphi(\zeta, \lambda) = e^{s\zeta i} \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j e^{j\zeta i} + e^{-s\zeta i} \sum_{j=-\infty}^{\infty} d_j e^{-j\zeta i} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j e^{(j+s)\zeta i} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} d_j e^{-(j+s)\zeta i}, \quad (3)$$

其中 s 为复数,当其虚部等于0时,该解反映的物理过程是稳定的,反之,是不稳定的; j 为整数, c_j 和 d_j 为待定系数.将(3)式代入(2)式并利用 $\cos \zeta = (e^{i\zeta} + e^{-i\zeta})/2$ 可得 $-\sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j(j+s)^2 e^{(j+s)\zeta i} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} d_j(j+s)^2 e^{-(j+s)\zeta i} + (\mu + \frac{\lambda}{2}(e^{i\zeta} + e^{-i\zeta}))(\sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j e^{(j+s)\zeta i} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} d_j e^{-(j+s)\zeta i}) = 0$.

对比指数项的系数,容易得到各系数满足如下关系

$$-c_j(j+s)^2 + \mu c_j + \frac{\lambda}{2}(c_{j-1} + c_{j+1}) = 0, \quad (4)$$

$$-d_j(j+s)^2 + \mu d_j + \frac{\lambda}{2}(d_{j-1} + d_{j+1}) = 0. \quad (5)$$

比较(4)式和(5)式可知, c_j 和 d_j 满足相同的递推关系,故这2组系数最多只相差一常数.因此,方程的解可简化为

$$\varphi(\zeta, \lambda) = A e^{s\zeta i} \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j e^{j\zeta i} + B e^{-s\zeta i} \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j e^{-j\zeta i}, \quad (6)$$

其中 A 和 B 为常数,可由归一化条件得到.

令 $\alpha_j = (\mu - (j+s)^2)/(\lambda/2)$,则(4)式可化为 $c_{j-1} + \alpha_j c_j + c_{j+1} = 0$. (7)

该方程组有解的条件是系数行列式等于0,即

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ \cdots & 1 & \alpha_{-2} & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 1 & \alpha_{-1} & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 1 & \alpha_0 & 1 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha_1 & 1 & \cdots \\ \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \end{vmatrix} = 0. \quad (8)$$

由于 j 的取值范围是 $-\infty < j < \infty$,所以该行列式是无穷阶行列式.

由(7)式可得

$$\alpha_j = -\left(\frac{1}{c_j/c_{j-1}} + \frac{c_{j+1}}{c_j}\right) = \frac{\mu - (j+s)^2}{\lambda/2}. \quad (9)$$

由级数展开的收敛性可知:当 $j \rightarrow \infty$ 时, $c_j/c_{j-1} \rightarrow 0$;当 $j \rightarrow -\infty$ 时, $c_j/c_{j+1} \rightarrow 0$.作为近似,可作如下截断: $j = k$ 时,令 $c_{j+1} = 0$, (7)式简化为 $c_{j-1} + \alpha_j c_j = 0$; $j = -k$ 时,令 $c_{j-1} = 0$, (7)式简化为 $\alpha_j c_j + c_{j+1} = 0$.只要 k 足够大,截断后的结果可以无限接近精确解.由此,无穷阶行列式(8)简化为如下有限阶行列式

$$\begin{vmatrix} \alpha_{-k} & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \alpha_{-k+1} & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \alpha_{k-1} & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \alpha_k \end{vmatrix} = 0. \quad (10)$$

将(9)式代入(10)式,进行数值求解,可得到满足该条件的 μ 的本征值.再由(7)式可得各系数的值,代入(6)式即得方程的解.

在计算中,取 $k = 6$,计算了 $s = 0$, $\lambda = 4$ 和 $s = 0.2$, $\lambda = 8$ 这2种情况下 μ 的本征值以及2种情况下的 μ_1 所对应的系数值,见表1和表2.

为分析修正 Mathieu 方程解的稳定性,计算了 $k = 6$, s 取不同值时 μ 的本征值随 λ 变化的情况,如图2所示.

图2中的数字为 s 的取值. s 为实数的区域,如图2中 $s = 0.2$ 和 $s = 0.4$ 所在的区域,解是稳定的; s 的虚部不为0的区域,如图中 $s = 0.5 + 1.0i$ 和 $s = 0.5i$ 等所在的区域,解是不稳定的.2个区域的分界线为 $s = 0$ 和 $s = 0.5$ 时的曲线,即图2中的粗线和细线.图2中的虚点线为WKB近似的结果.从图2可看出,WKB近似解只是粗糙地给出了稳定和 unstable 区域的分界线为 $\mu = \lambda$,如图1所示,而数值计算的结果能比较精确地给出不稳定性得以发展的区域.

- [5] Mendonca J T ,Serbeto A. Effective charge of intense laser pulses in plasmas [J]. European Physical Journal D , 2017 ,71(8) : 221.
- [6] Nanda V ,Ghotra H S ,Kant N. Early and strong relativistic self-focusing of cosh-Gaussian laser beam in cold quantum plasma [J]. Optik 2018 ,156: 191-196.
- [7] Chakhmachi A ,Faridyousefi H. Stimulated backward Raman scattering of circularly polarized electromagnetic waves in magnetized quantum plasmas [J]. Optik 2018 , 159: 245-253.
- [8] Wang Yunliang ,Eliasson B. Pseudorelativistic laser-semiconductor quantum plasma interactions [J]. Physical Review E 2016 ,93(4) : 43205.
- [9] Mahajan S M ,Asenjo F A. A statistical model for relativistic quantum fluids interacting with an intense electromagnetic wave [J]. Phys Plasmas 2016 ,23(5) : 56301.
- [10] Ruby L. Application of the Mathieu equation [J]. American Journal of Physics ,1996 ,64(1) : 39-44.
- [11] Gutiérrez-Vega J C ,Rodríguez-Dagnino R M ,Meneses-Nava M A ,et al. Mathieufunctions ,avisual approach [J]. American Journal of Physics 2003 ,71(3) : 233-242.
- [12] Wu Binbin ,Diebold G J. Mathieu function solutions for photoacoustic waves in sinusoidal one-dimensional structures [J]. Phys Rev E 2012 ,86(1) : 16602.
- [13] Kidachi H ,Onogi H. Note on the stability of the nonlinear Mathieu equation [J]. Progress of Theoretical Physics , 1997 ,98(4) : 755-773.
- [14] Li Xiaohong ,Hou Jingyu ,Chen Jufeng. An analytical method for Mathieu oscillator based on method of variation of parameter [J]. Commun Nonlinear SCI ,2016 ,37(8) : 326-353.
- [15] Raja M A Z ,Manzar M A ,Shah F H. Intelligent computing for Mathieu's systems for parameter excitation ,vertically driven pendulum and dusty plasma models [J]. Appl Soft Comput ,2018 ,62(1) : 359-372.
- [16] Choudhury A G ,Guha P. Damped equations of Mathieu type [J]. Appl Math Comput 2014 ,229: 85-93.
- [17] Julio C Gutiérrez-Vega. Formal analysis of the propagation of invariantoptical fields in elliptic coordinates [EB/OL]. [2017-10-16]. <http://homepages.mty.itesm.mx/jgutierrez/>.
- [18] Whittaker E T. On the general solution of Mathieu's equation [J]. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society ,1913 ,32(1) : 75-80.
- [19] Funada T ,Wang J ,Joseph D D ,et. al. Solution of Mathieu's equation by Runge-utta integration [EB/OL]. [2017-10-16]. <http://www.aem.umn.edu/people/faculty/joseph/ViscousPotentialFlow/>

The Numerical Method for the Modified Mathieu Equation

CHEN Hao

(Jiangxi Education Media Group ,Nanchang Jiangxi 330038 ,China)

Abstract: A numerical method for the modified Mathieu equation that is obtained from the intense circular polarization laser and spinless plasmas interaction has been presented. The numerical results and the WKB results have been compared ,and the instability of the physical process indicated by the modified Mathieu equation has been analyzed.

Key words: relativity quantum mechanics; modified Mathieu equation; WKB approximation

(责任编辑: 冉小晓)