第 43 卷 第 1 期
2019 年 1 月
江西师范大学学报(自然科学版)
Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science)
Vol. 43 No. 1
Jan. 2019

文章编号:1000-5862(2019)01-0022-06

# 密码 rpp 半群的若干特征

王 莹[1],郭俊颖[2],吴灏驰[3],郭小江[1*]

(1. 江西师范大学数学与信息科学学院,江西 南昌 330022;2. 江西师范大学科技学院,江西 南昌 330027;
3. 南昌大学管理学院,江西 南昌 330031)

**摘要:** 密码 rpp 半群是关系 $\overline{H}$ 为同余的强 rpp 半群,这类半群是密码群在 rpp 半群理论中的推广. 该文给出了这类半群的一些新特征.

**关键词:** 超 rpp 半群; 完全 $J^{(\ell)}$-单半群; 密码 rpp 半群; Rees 矩阵半群

**中图分类号:** O 152.7 **文献标志码:** A **DOI:** 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2019.01.04

## 0 引言

称半群 $S$ 为右主投射半群(简称 rpp 半群),如果 $\forall a\in S$,作为 $S^1$-系,$S^1a$ 总是投射的. 左主投射半群(lpp 半群)可对偶地定义. 若 $S$ 既为 rpp 半群又为 lpp 半群,则称半群 $S$ 为富足半群(abundant semigroup). 显然,正则半群为富足半群.

完全正则半群是半群理论中的一类重要半群,因此半群论学者尝试着推广完全正则半群,先后定义了超富足半群[1]、强 rpp 半群[2]、超 rpp 半群[3]等. 超 rpp 半群无疑是在 rpp 半群中最接近完全正则半群的一类半群. 关于超 rpp 半群的研究可参见文献[2-6].

密码群(cryptogroup)是一类重要完全正则半群,关于这类半群有许多很好的结果[7]. 作为密码群在 rpp 半群中的推广,郭小江等[8]定义了密码 rpp 半群(cryptic rpp semigroup),并给出了密码 rpp 半群的结构. 之后,研究了密码 rpp 半群若干子类: 纯正密码 rpp 半群(orthocryptic rpp semigroup)[9]、正规密码 rpp 半群(normal cryptic rpp semigroup)[10-11]. 本文继续研究密码 rpp 半群,将给出这类半群的一些新特征.

## 1 若干准备

本文将采用文献[12]的术语和记号. 令 $S$ 为半群,定义: 对于 $a,b\in S$,

$$aL^*b\Leftrightarrow \mathrm{Ker}\,a_\ell=\mathrm{Ker}\,b_\ell,\ aR^*b\Leftrightarrow \mathrm{Ker}\,a_r=\mathrm{Ker}\,b_r,$$

$$D^*=L^*\cup R^*,\ H^*=L^*\cap R^*,\ aJ^*b\Leftrightarrow J^*(a)=J^*(b),$$

其中 $\mathrm{Ker}\,\varphi=\{(x,y)\in S\times S\mid \varphi(x)=\varphi(y)\}$,$a_\ell(a_r)$ 为 $S^1$ 的内自左(右)平移,$J^*(a)$ 为包含 $a$ 被 $L^*$-渗透和 $R^*$-渗透的最小理想,即 $J^*(a)$ 可以表示为一些 $L^*$-类和一些 $R^*$-类的并. 明显地,$L^*$ 为右同余,$R^*$ 为左同余.

**引理 1**[1] 令 $S$ 为半群,$a,e^2=e\in S$,则 $aL^*e$ 当且仅当 $a=ae$ 且 $\forall x,y\in S^1$,$ax=ay$ 蕴含着 $ex=ey$.

为研究 rpp 半群,郭聿琦等[2]糅合 Green 关系 $R$ 和 Green$^*$ 关系 $L^*$,定义了 Green$(\ell)$-关系: 对于 $a,b\in S$,规定

$$aL^{(\ell)}b\Leftrightarrow \mathrm{Ker}\,a_\ell=\mathrm{Ker}\,b_\ell,\text{i.e. }L^{(\ell)}=L^*;\ aR^{(\ell)}b\Leftrightarrow$$

$$\mathrm{Im}\,a_\ell=\mathrm{Im}\,b_\ell,\text{i.e. }R^{(\ell)}=R;\ D^{(\ell)}=L^{(\ell)}\cup R^{(\ell)},$$

$$H^{(\ell)}=L^{(\ell)}\cap R^{(\ell)},\ aJ^{(\ell)}b\Leftrightarrow J^{(\ell)}(a)=J^{(\ell)}(b),$$

其中 $\mathrm{Im}\,a_\ell(\mathrm{Im}\,b_\ell)$ 为 $a_\ell(b_\ell)$ 的像; $J^{(\ell)}(a)$ 为包含 $a$ 的被 $L^{(\ell)}$-渗透的最小理想.

**引理 2**[13] 令 $S$ 为半群,则 $D^{(\ell)}=L^{(\ell)}\circ R^{(\ell)}=L^{(\ell)}$. 而且一个 $D^{(\ell)}$-类至多包含一个正则 $D$-类.

称 rpp 半群 $S$ 为强的,如果 $\forall a\in S$,都存在唯一幂等元 $a^\diamond$,使得 $a^\diamond L^{(\ell)}a$ 且 $a^\diamond a=a$. 对偶地,定义强 lpp 半群(strongly lpp semigroup).

令 $S$ 为强 rpp 半群,$a,b\in S$,定义 $a\overline{R}b\Leftrightarrow a^\diamond Rb^\diamond$ 且 $\overline{H}=\overline{R}\cap L^{(\ell)}$. 不难发现,$a\overline{H}b$ 当且仅当 $a^\diamond=b^\diamond$. 郭小江等[13]指出: 强 rpp 半群的正则元都是完全正则的. 这意味着完全正则半群恰为强 rpp 正则半群.

收稿日期:2018-09-20

基金项目:国家自然科学基金(11761034,116610420)和江西省自然科学基金(2016BAB201018)资助项目.

通信作者:郭小江(1967-),男,江西宜春人,教授,博士,博士生导师,主要从事半群代数理论的研究. E-mail: xjguo@jxnu.edu.cn

**引理 3**[13]　令 $S$ 为强 rpp 半群，$x,y \in S$，若 $xD^{(\ell)}y$，则 $xy \in \overline{R}_x \cap L_y^{(\ell)}$，其中 $\overline{R}_x(L_x^{(\ell)})$ 为 $S$ 的包含 $x$ 的 $\overline{R}$–类($L^{(\ell)}$–类).

值得指出: 对于一般的强 rpp 半群来说，$\overline{R}$ 不一定是左同余[13]. 因此，称强 rpp 半群 $S$ 为超 rpp 半群，如果 $\overline{R}$ 为 $S$ 上的左同余.

**引理 4**[3]　令 $S$ 为强 rpp 半群，则以下各款等价:

(i) $S$ 为超 rpp 半群;

(ii) $\forall a \in S, J^{(\ell)}(a) = Sa^{\diamond}S$;

(iii) $J^{(\ell)}|_{E(S)} = J|_{E(S)}$，其中 $E(S)$ 为 $S$ 的幂等元素;

(iv) $J^{(\ell)} = D^{(\ell)}$;

(v) $D^{(\ell)}$ 为半格同余.

**引理 5**[14]　超 rpp 半群的所有正则元构成完全正则子半群.

令 $I,\Lambda$ 为非空集合，$M$ 为幺半群. 假设 $P = (p_{\lambda i})$ 是元为 $M$ 的单位 $\Lambda \times I$ 矩阵. 记 $T = I \times M \times \Lambda$，定义 $T$ 上的运算: $(i,x,\lambda)(j,b,u) = (i,xp\lambda,u)$. 关于上面的运算，$T$ 构成半群，称之为 $M$ 上以 $M$ 为夹心矩阵的 Rees 矩阵半群，并记为 $\mathscr{M}(M,I,\Lambda;P)$. 而且，当 $M$ 为左消去幺半群时，$\mathscr{M}(M,I,\Lambda;P)$ 是 $D^{(\ell)}$–单强 rpp 半群[13]. 称半群 $S$ 为完全 $J^{(\ell)}$–单半群，如果 $S$ 同构于某个左消去幺半群上的 Rees 矩阵半群[4]. 据文献[13]，半群为完全 $J^{(\ell)}$–单半群当且仅当它是 $D^{(\ell)}$–单的强 rpp 半群.

**引理 6**[13]　令 $M$ 为左消去幺半群. 对于 $(i,a,\lambda),(j,b,u) \in \mathscr{M}(M,I,\Lambda;P)$，总有

(i) $(i,a,\lambda)\overline{R}(j,b,u)$ 当且仅当 $i = j$;

(ii) $(i,a,\lambda)L^{(\ell)}(j,b,u)$ 当且仅当 $\lambda = u$;

(iii) $(i,a,\lambda)\overline{H}(j,b,u)$ 当且仅当 $i = j$ 且 $\lambda = u$;

(iv) $(i,a,\lambda)^{\diamond} = (i,p_{\lambda i}^{-1},\lambda)$.

郭小江等[13] 证明: 强 rpp 半群的每一个 $D^{(\ell)}$–类都是一个完全 $J^{(\ell)}$–单半群. 换句话说，强 rpp 半群都是一些完全 $J^{(\ell)}$–单半群的并. 引理 7 源自文献[3]，它给出了超 rpp 半群的构造.

**引理 7**[3]　半群 $S$ 为超 rpp 半群当且仅当它为一些完全 $J^{(\ell)}$–单半群 $S_\alpha(\alpha \in Y)$ 的半格，且 $L_S^{(\ell)} = L_{S_\alpha}^{(\ell)}$ 对于所有的 $\alpha \in Y$.

称强 rpp 半群 $S$ 为左(右) 密码 rpp 半群，如果 $\overline{H}$ 为左(右) 同余. 据 $\overline{H}$ 的定义，易见: $\forall a,b \in S, aHb$ 当且仅当 $a\overline{H}b$. 因此对于超 rpp 半群 $S$，若 $S$ 为密码 rpp 半群，则 $\mathrm{Reg}(S)$ ($S$ 的所有正则元组成的集合) 构成密码群[7].

**引理 8**[8]　令 $S$ 为强 rpp 半群，则称 $S$ 为左(右) 密码 rpp 半群当且仅当 $\forall a,b \in S$，$(ab)^{\diamond} = (ab^{\diamond})^{\diamond}((ab)^{\diamond} = (a^{\diamond}b)^{\diamond})$，$(ab)^{\diamond} = (a^{\diamond}b^{\diamond})^{\diamond}$.

**引理 9**　完全 $J^{(\ell)}$–单半群是密码 rpp 半群.

**证**　据引理 6(iii) 易得结论成立.

此外，由文献[8] 知，密码 rpp 半群总是超 rpp 半群. 易见，对于密码 rpp 半群 $S$，$S/\overline{H}$ 为带. 因此称 $S$ 为 $\rho$ 密码 rpp 半群，若 $S/\overline{H}$ 为具有性质 $\rho$ 的带. 若 $S/\overline{H}$ 为正则带，则称 $S$ 为正则密码 rpp 半群.

**引理 10**　令 $S$ 为超 rpp 半群，若 $S$ 为 $\rho$ 密码 rpp 半群，则 $\mathrm{Reg}(S)$ 是 $\rho$ 密码群.

**证**　注意到，$(a,a^{\diamond}) \in \overline{H}$. 容易知道，$S/\overline{H} = \mathrm{Reg}(S)/H$. 其余证明显然.

## 2　主要结果

为简化表述，总假设 $S$ 为超 rpp 半群，且 $S = (Y; S_\alpha)$ 是由 $D^{(\ell)}$ 确定的半格分解. 进一步，对于 $\alpha \in Y$，设 $S_\alpha = \mathscr{M}(M_\alpha,I_\alpha,\Lambda_\alpha;\boldsymbol{P}_\alpha)$.

**引理 11**　对于 $\alpha,\beta \in Y$，若 $\alpha \geqslant \beta$，$a \in S_\alpha$，$b \in S_\beta$，则 $bL^{(\ell)}ab$ 且 $b\overline{R}ba$.

**证**　显然，$ab \in S_\beta$，于是 $(ab)^{\diamond}a, b \in S_\beta$. 据引理 3，$ab = (ab)^{\diamond}a \cdot b \in L_b^{(\lambda)}$，即 $abL^{(\ell)}b$. 另一方面，由于 $ba = b \cdot a(ba)^{\diamond}$ 和 $b, a(ba)^{\diamond} \in S_\beta$，再据引理 3，有 $ba\overline{R}b$.

**引理 12**　令 $S$ 为密码 rpp 半群. $\forall x,y,z \in S$，则有

(i) $x^{\diamond}(yx)^{\diamond} = (x^{\diamond}yx)^{\diamond} = (xy)^{\diamond}x^{\diamond} = (xyx^{\diamond})^{\diamond}$;

(ii) $x(yx)^{\diamond} = (xy)^{\diamond}x$.

**证**　(i) 由 $S$ 为密码 rpp 半群知 $\overline{H}$ 是 $S$ 上的同余，于是 $x^{\diamond}(yx)^{\diamond}\overline{H}x^{\diamond}yx\overline{H}(x^{\diamond}yx)^{\diamond}\overline{H}xyx\overline{H}xyx^{\diamond} \cdot \overline{H}(xyx^{\diamond})^{\diamond}\overline{H}(xy)^{\diamond}x^{\diamond}$. 因此 $x^{\diamond}(yx)^{\diamond}H(x^{\diamond}yx)^{\diamond} \cdot H(xyx^{\diamond})^{\diamond}H(xy)^{\diamond}x^{\diamond}$. 但 $(x^{\diamond}yx)^{\diamond}$，$(xyx^{\diamond})^{\diamond}$ 都是幂等元，从而 $(x^{\diamond}yx)^{\diamond} = (xyx^{\diamond})^{\diamond} = (xyx)^{\diamond}$.

另一方面，因为 $yx = yxx^{\diamond}$，所以 $(yx)^{\diamond} = (yx)^{\diamond}x^{\diamond}$，进而 $x^{\diamond}(yx)^{\diamond}$ 为幂等元. 故 $x^{\diamond}(yx)^{\diamond} = (x^{\diamond}yx)^{\diamond}$.

注意到，$(xy)^{\diamond} = (x^{\diamond}y^{\diamond})^{\diamond}$，再利用文献[7] 可以得到 $x^{\diamond}(yx)^{\diamond} = x^{\diamond}(y^{\diamond}x^{\diamond})^{\diamond} = (x^{\diamond}y^{\diamond})^{\diamond}x^{\diamond} = (xy)^{\diamond}x^{\diamond}$ 且为幂等元.

(ii) 因为 $x^{\diamond}(yx)^{\diamond}\overline{H}x(yx)^{\diamond}\overline{H}xyx\overline{H}(xy)^{\diamond}x\overline{H}(xy)^{\diamond} \cdot x\overline{H}(xyx)^{\diamond}$，所以 $x(yx)^{\diamond} = (xyx)^{\diamond}x(yx)^{\diamond} = (xyx)^{\diamond} \cdot x \cdot x^{\diamond}(yx)^{\diamond} = (xyx)^{\diamond} \cdot x \cdot (xyx)^{\diamond} = (xy)^{\diamond}x^{\diamond} \cdot x \cdot (xyx)^{\diamond} = (xy)^{\diamond}x$.

现在可以给出完全 $J^{(\ell)}$–单半群的一些特征.

**定理 1**　令 $S$ 为超 rpp 半群，则以下各款等价:

(i) $S$ 为 $J^{(\ell)}$-单半群;

(ii) $\forall a,b\in S,a=a(ba)^{\diamond}$;

(iii) $\forall a,b\in S,a=(ab)^{\diamond}a$;

(iv) $\forall a,b,c\in S,(ac)^{\diamond}=a^{\diamond}(bc)^{\diamond}$;

(v) $\forall a,b,c\in S,(ac)^{\diamond}=(ab)^{\diamond}c^{\diamond}$.

**证** 这里仅证明(i)⇒(ii)⇒(iii)⇒(i),因为(i)⇒(iv)⇒(v)⇒(i)可以类似得到.

(i)⇒(ii) 令 $S$ 为 $J^{(\ell)}$-单半群,进一步设 $S=\mathscr{M}(M,I,\Lambda;P)$,其中 $M$ 为左消去幺半群,对于 $(x,i,\lambda),(y,j,u),(z,k,\kappa)\in S$,有

$$[(x,i,\lambda)(z,k,\kappa)]^{\diamond}=(xp_{\lambda k}y,i,\kappa)^{\diamond}=(p_{\kappa i}^{-1},i,\kappa)=(xp_{\lambda j}yp_{\mu k}z,i,\kappa)^{\diamond}=[(x,i,\lambda)(y,j,\mu)(z,k,\kappa)]^{\diamond}.$$

据引理9,$S$ 为密码 rpp 半群,再利用引理12,

$$[(x,i,\lambda)(y,j,u)(z,k,\kappa)]^{\diamond}=[(x,i,\lambda)(y,j,u)]^{\diamond}(z,k,\kappa)^{\diamond}.$$

因此(ii)成立.

(ii)⇒(iii) 据(ii),有 $a^{\diamond}=(aa^{\diamond})^{\diamond}=(ab)^{\diamond}(a^{\diamond})^{\diamond}=(ab)^{\diamond}a^{\diamond}$. 因此 $a=a^{\diamond}a=(ab)^{\diamond}a^{\diamond}a=(ab)^{\diamond}a$.

(iii)⇒(i) 仅需证:$|Y|=1$. 对于 $a\in S_{\alpha},b\in S_{\beta}$,总有 $a=(ab)^{\diamond}a$,于是 $S_{\alpha}\subseteq S_{\alpha\beta}S_{\alpha}\subseteq S_{\alpha\beta}$. 这样 $\alpha\leqslant\beta$;类似地,$\beta\leqslant\alpha$. 故 $\alpha=\beta$,即 $|Y|=1$.

令 $T$ 为半群. 称 $T$ 的左理想 $L$ 为左 $*$-理想,如果 $L=\bigcup\limits_{x\in L}L_x^*$,其中 $L_x^*$ 为包含 $x$ 的 $L^*$-类. 记 $L^*(x)$ 为包含 $x$ 的最小左 $*$-理想. J. B. Fountain[1] 证明了:对于 $a,b\in T$,$aL^*b$ 当且仅当 $L^*(a)=L^*(b)$.

对于 rpp 半群 $T$,定义 $a\leqslant_{\ell}b$,若 $L_a^*\leqslant L_b^*$(即 $L^*(a)\subseteq L^*(b)$)且存在幂等元 $f$,使得 $a=bf$.

M. V. Lawson[15] 证明了:

(i) $\leqslant_{\ell}$ 是 $T$ 上的偏序;

(ii) $a\leqslant_{\ell}b$ 当且仅当存在 $b^*\in L_b^*\cap E(T)$,都有 $a^*\in L_a^*\cap E(T)$ 使得 $a^*\omega b^*$(即 $a^*=a^*b^*=b^*a^*$)且 $a=ba^*$,其中 $E(T)$ 为 $T$ 幂等元集.

关于 rpp 半群和强 rpp 半群上的 $\leqslant_{\ell}$ 关系,参见文献[16-18].

**引理13** 令 $a,b\in S$,则 $b\leqslant_{\ell}a$ 当且仅当 $b^{\diamond}\omega a^{\diamond}$ 且 $b=ab^{\diamond}$.

**证** 仅需证必要性. 假设 $b\leqslant_{\ell}a$,则 $\exists f\in L_b^*\cap E(S)$,使得 $f\omega a^{\diamond}$ 且 $b=af$. 因此 $bb^{\diamond}=b$,进而 $f=fb^{\diamond}$,于是 $b^{\diamond}f\in E(S_{\beta})$,$b^{\diamond}fLfL^*b$. 而 $b^{\diamond}f\cdot b=b^{\diamond}fb^{\diamond}\cdot b=b^{\diamond}b=b$,利用 $S$ 为强 rpp 半群,$b^{\diamond}f=b^{\diamond}$. 故 $b=ab^{\diamond}$ 且 $b^{\diamond}a^{\diamond}=b^{\diamond}fa^{\diamond}=b^{\diamond}f=b^{\diamond}$.

注意到,$a^{\diamond}b^{\diamond}Lb^{\diamond}$ 且 $a^{\diamond}b^{\diamond}\cdot b=a^{\diamond}b=a^{\diamond}ab^{\diamond}=ab^{\diamond}=b$,再据 $S$ 为强 rpp 半群,可以得到 $a^{\diamond}b^{\diamond}=b^{\diamond}$. 因此 $b^{\diamond}\omega a^{\diamond}$.

**引理14** 令 $S$ 为左密码 rpp 半群,$\alpha,\beta\in Y$ 且 $\alpha\geqslant\beta$. 若 $a\in S_{\alpha},b\in S_{\beta}$,则 $b\leqslant_{\ell}a$ 当且仅当 $\exists c\in S_{\beta}$,使得 $b=a(ca)^{\diamond}$.

**证** 假设 $\exists c\in S_{\beta}$,使得 $b=a(ca)^{\diamond}$. 因为 $ca=ca\cdot a^{\diamond}$,所以 $(ca)^{\diamond}=(ca)^{\diamond}a^{\diamond}$,进而 $a^{\diamond}(ca)^{\diamond}\in E(S_{\beta})$ 且 $a^{\diamond}(ca)^{\diamond}\omega a^{\diamond}$. 另一方面,因为 $L^*$ 为右同余,所以 $b=a(ca)^{\diamond}L^*a^{\diamond}(ca)^{\diamond}$. 因此 $b\leqslant_{\ell}a$.

反之,设 $b\leqslant_{\ell}a$,则据引理13,$b^{\diamond}\omega a^{\diamond}$ 且 $b=ab^{\diamond}$. 而 $S$ 为左密码 rpp 半群,于是 $b^{\diamond}=(b^{\diamond})^{\diamond}=(b^{\diamond}a^{\diamond})^{\diamond}=(b^{\diamond}a)^{\diamond}$. $b^{\diamond}$ 为所求的 $c$.

**引理15** $\forall a,b,c\in S$,若 $b,c\leqslant_{\ell}a$,$b\bar{H}c$,则 $b=c$.

**证** 据假设,$b^{\diamond}=c^{\diamond}$,再据引理13,有 $b=ab^{\diamond}=ac^{\diamond}=c$.

**定理2** 令 $S$ 为超 rpp 半群,则以下各款等价:

(i) $S$ 为左密码 rpp 半群;

(ii) $\forall\alpha,\beta\in Y$,若 $\alpha\geqslant\beta,a\in S_{\alpha},b\in S_{\beta}$,则 $a^{\diamond}(ba^{\diamond})^{\diamond}L^{(\ell)}a(ba)^{\diamond}$;

(iii) $\forall\alpha,\beta\in Y$,若 $\alpha\geqslant\beta,a\in S_{\alpha},b\in S_{\beta}$,则 $b\leqslant_{\ell}a$ 蕴含着 $bL^{(\ell)}a(ba)^{\diamond}$.

**证** (i)⇒(ii) 假设 $S$ 为左密码 rpp 半群. 注意到,$a^{\diamond}(ba)^{\diamond}$,$(ba)^{\diamond}$ 在同一个完全 $J^{(\ell)}$-单半群,于是 $a^{\diamond}(ba)^{\diamond}L^*(ba)^{\diamond}$. 据引理8,$a^{\diamond}(ba^{\diamond})^{\diamond}=a^{\diamond}(ba)^{\diamond}L^{(\ell)}(ba)^{\diamond}L^{(\ell)}a(ba)^{\diamond}$.

(ii)⇒(iii) 据引理13,$b^{\diamond}\omega a^{\diamond}$ 且 $b=ab^{\diamond}$. 注意到,$a^{\diamond}(ba^{\diamond})^{\diamond}$,$a(ba^{\diamond})^{\diamond}$ 在同一个完全 $J^{(\ell)}$-单半群,易知,$a^{\diamond}(ba^{\diamond})^{\diamond}L^*a(ba^{\diamond})^{\diamond}$,现在运用(ii),

$$a(ba)^{\diamond}L^{(\ell)}a^{\diamond}(ba^{\diamond})^{\diamond}L^*a(ba^{\diamond})^{\diamond}=$$
$$a(bb^{\diamond}a^{\diamond})^{\diamond}=ab^{\diamond}=b.$$

(iii)⇒(i) 令 $a\in S_{\alpha},b\in S_{\beta}$,因为 $ab^{\diamond}=ab^{\diamond}b^{\diamond}$,所以 $(ab^{\diamond})^{\diamond}=(ab^{\diamond})^{\diamond}b^{\diamond}$,从而 $b^{\diamond}(ab^{\diamond})^{\diamond}\in E(S)$,$b^{\diamond}(ab^{\diamond})^{\diamond}\omega b^{\diamond}$. 再结合 $b(ab^{\diamond})^{\diamond}L^*b^{\diamond}(ab^{\diamond})^{\diamond}$. 因此 $b(ab^{\diamond})^{\diamond}=b\cdot b^{\diamond}(ab^{\diamond})^{\diamond}\leqslant_{\ell}b$. 利用(iii),

$$ab^{\diamond}L^{(\ell)}(ab^{\diamond})^{\diamond}L^*b(ab^{\diamond})^{\diamond}L^*b(b(ab^{\diamond})^{\diamond}b)^{\diamond}\cdot L^*(b(ab^{\diamond})^{\diamond}b)^{\diamond}L^*b(ab^{\diamond})^{\diamond}bL^{(\ell)}(ab^{\diamond})b=ab.$$

另一方面,因为 $S$ 为超 rpp 半群,所以 $\bar{R}$ 是左同余,进而 $ab\bar{R}ab^{\diamond}$. 因此 $ab^{\diamond}\bar{H}ab$,$(ab^{\diamond})^{\diamond}=(ab)^{\diamond}$. 故 $S$ 是左密码 rpp 半群.

对于 $\alpha,\beta\in Y$,$a\in S_{\alpha}$ 且 $\alpha\geqslant\beta$,定义

$$\rho_{a,\beta}=\{(x,y)\in S_{\beta}\times S_{\beta}:a(xa)^{\diamond}=a(ya)^{\diamond}\}.$$

显然,$\rho_{a,\beta}$ 是 $S_{\beta}$ 上的等价关系. 进一步,有

**命题1** 令 $S$ 为密码 rpp 半群. 若 $\alpha,\beta\in Y$,$\alpha\geqslant\beta$ 且 $a,b\in S_{\alpha}$,$c,d\in S_{\beta}$,则

(i) $\rho_{a,\beta}=\rho_{a^{\diamond},\beta}$;

(ii) $\rho_{a,\beta}$ 为 $S_{\beta}$ 上的矩形带同余,且 $\bar{H}(S_{\beta})\subseteq\rho_{a,\beta}$;

(iii) $c\rho_{a,\beta}=d\rho_{a,\beta}$ 当且仅当 $(aca)^\diamond=(ada)^\diamond$.

**证**　(i) 若 $(x,y)\in\rho_{a,\beta}$，则 $a(xa)^\diamond=a(ya)^\diamond$，进而 $a^\diamond(xa)^\diamond=a^\diamond(ya)^\diamond$. 考虑到 $S$ 为密码 rpp 半群，可得

$a^\diamond(xa^\diamond)^\diamond=a^\diamond(x^\diamond a^\diamond)^\diamond=a^\diamond(xa^\diamond)^\diamond=a^\diamond(xa)^\diamond=a^\diamond(ya)^\diamond=a^\diamond(ya^\diamond)^\diamond$.

于是 $(x,y)\in\rho_{a^\diamond,\beta}$ 从而 $\rho_{a,\beta}\subseteq\rho_{a^\diamond,\beta}$.

反过来，若 $(u,v)\in\rho_{a^\diamond,\beta}$，则 $a^\diamond(ua^\diamond)^\diamond=a^\diamond(va^\diamond)^\diamond$，进一步，有

$a(ua)^\diamond=a\cdot a^\diamond(ua)^\diamond=a\cdot a^\diamond(u^\diamond a^\diamond)^\diamond=a\cdot a^\diamond(ua^\diamond)^\diamond=a\cdot a^\diamond(va^\diamond)^\diamond=a(v^\diamond a^\diamond)^\diamond=a(va)^\diamond$.

进而 $(u,v)\in\rho_{a,\beta}$. 于是 $\rho_{a^\diamond,\beta}\subseteq\rho_{a,\beta}$.

(ii) 令 $u\in S_\beta$，$(c,d)\in\rho_{a,\beta}$. 据引理 11，$u\bar{R}uacaL^* ca$，进而 $uca\bar{H}uaca$，这是因为 $u,ua,ca\in S_\beta$ 且 $S_\beta$ 是 Rees 矩阵半群. 于是 $(uca)^\diamond=(uaca)^\diamond=(ua(ca)^\diamond)^\diamond$. 从而 $a(uca)^\diamond=a(ua(ca)^\diamond)^\diamond=a(ua(da)^\diamond)^\diamond=a(uda)^\diamond$. 从而 $(uc,ud)\in\rho_{a,\beta}$. 对偶地，$(cu,du)\in\rho_{a,\beta}$，因此 $\rho_{a,\beta}$ 是 $S_\beta$ 上的同余.

考虑到 $S_\beta$ 是左消去幺半群上的 Rees 矩阵半群. 对于 $c,d\in S_\beta$，有 $cdc\bar{H}c$. 于是，$cdca\bar{H}ca$. 从而 $a(cdca)^\diamond=a(ca)^\diamond$，进而 $(cdc,c)\in\rho_{a,\beta}$. 因此 $\rho_{a,\beta}$ 是 $S_\beta$ 上的矩形带同余. 现令 $x,y\in S_\beta$，$(x,y)\in\bar{H}$. 因为 $S$ 为密码 rpp 半群，所以 $(xa,ya)\in\bar{H}$，进而 $(xa)^\diamond=(ya)^\diamond$. 显然，$a(xa)^\diamond=a(ya)^\diamond$，即 $(x,y)\in\rho_{a,\beta}$. 故 $\bar{H}\subseteq\rho_{a,\beta}$.

(iii) 因为 $aL^* a^\diamond$，有 $a(xa)^\diamond=a(ya)^\diamond$ 当且仅当 $a^\diamond(xa)^\diamond=a^\diamond(ya)^\diamond$ 当且仅当 $(a^\diamond xa)^\diamond=(a^\diamond ya)^\diamond$（由引理 12）当且仅当 $(axa)^\diamond=(aya)^\diamond$（因为 $S$ 是密码的）.

**推论 1**　令 $S$ 为超 rpp 半群. 若 $\bar{R}(S_\beta)\subseteq\rho_{a^\diamond,\beta}$，$\forall\alpha,\beta\in Y$，$\alpha\geqslant\beta$ 且 $a\in S_\alpha$，则 $S$ 为左密码 rpp 半群.

**证**　令 $\alpha,\beta\in Y$，$\alpha\geqslant\beta$. 对于 $a\in S_\alpha$，$b\in S_\beta$，由于 $\bar{R}$ 是左同余，有 $ba^\diamond\bar{R}ba$，进而 $ba^\diamond\rho_{a^\diamond,\beta}ba$. 利用引理 11，$a^\diamond(ba^\diamond)^\diamond=a^\diamond((ba^\diamond)a^\diamond)^\diamond=a^\diamond((ba)\cdot a^\diamond)^\diamond=a^\diamond(ba)^\diamond L^{(\ell)}a(ba)^\diamond$，再利用定理 2，$S$ 为左密码 rpp 半群.

**定理 3**　令 $S$ 为超 rpp 半群，则以下各款等价：

(i) $S$ 为密码 rpp 半群；

(ii) $\forall\alpha,\beta\in Y$，若 $\alpha\geqslant\beta$，$a\in S_\alpha$，$b\in S_\beta$，则 $(b,a(ba)^\diamond)\in\rho_{a^\diamond,\beta}$；

(iii) $\forall\alpha,\beta\in Y$，若 $\alpha\geqslant\beta$，$a\in S_\alpha$，$b\in S_\beta$，则 $a^\diamond(ba^\diamond)^\diamond=(a(ba)^\diamond)^\diamond$；

(iv) $\forall\alpha,\beta\in Y$，若 $\alpha\geqslant\beta$，$a\in S_\alpha$，$b\in S_\beta$，则 $b\leqslant_\ell a$ 蕴含着 $b=a(ba)^\diamond$；

(v) $S$ 是左密码 rpp 半群.

**证**　(i)⇒(ii)　$\forall\alpha,\beta\in Y$，若 $\alpha\geqslant\beta$，$a\in S_\alpha$，$b\in S_\beta$，利用引理 12，有

$a^\diamond((a(ba)^\diamond)a^\diamond)^\diamond=(a^\diamond(a(ba)^\diamond))^\diamond a^\diamond=(a(ba)^\diamond)^\diamond a^\diamond=((ab)^\diamond a)^\diamond a^\diamond=(ab)^\diamond a^\diamond a^\diamond=(ab)^\diamond a^\diamond=a^\diamond(ba)^\diamond=a^\diamond(ba^\diamond)^\diamond$，

即 $(b,a(ba)^\diamond)\in\rho_{a^\diamond,\beta}$.

(ii)⇒(iii)　设 $\alpha,\beta\in Y$，$\alpha\geqslant\beta$. 令 $a\in S_\alpha$，$b\in S_\beta$. 由于 $ba=baa^\diamond$，有 $(ba)^\diamond=(ba)^\diamond a^\diamond$，进而 $a(ba)^\diamond=a(ba)^\diamond a^\diamond$，从而 $(a(ba)^\diamond)^\diamond=(a(ba)^\diamond)^\diamond a^\diamond$. 利用文献[7]，

$a^\diamond((a(ba)^\diamond)a^\diamond)^\diamond=(a^\diamond a(ba)^\diamond)^\diamond a^\diamond=(a(ba)^\diamond)^\diamond a^\diamond=(a(ba)^\diamond)^\diamond$.

因此，据(ii)可得 $a^\diamond(ba^\diamond)^\diamond=a^\diamond((a(ba)^\diamond)\cdot a^\diamond)^\diamond=(a(ba)^\diamond)^\diamond$.

(iii)⇒(iv)　设 $\alpha,\beta\in Y$，且 $\alpha\geqslant\beta$. 令 $a\in S_\alpha$，$b\in S_\beta$，且 $b\leqslant_\ell a$. 由 $ba=baa^\diamond$ 知 $(ba)^\diamond=(ba)^\diamond a^\diamond$，于是 $a^\diamond(ba)^\diamond\in E(S)$ 且 $a^\diamond(ba)^\diamond wa^\diamond$. 再据引理 11，$b^\diamond\bar{R}b\bar{R}ba$，进而 $b^\diamond R(ba)^\diamond$，由此 $b(ba)^\diamond=(ba)^\diamond$. 进一步利用引理 13，$b^\diamond wa^\diamond$ 且 $b=ab^\diamond$，据(iii)，

$b^\diamond=a^\diamond b^\diamond=a^\diamond(bb^\diamond a^\diamond)^\diamond=a^\diamond(ba^\diamond)^\diamond=(a(ba)^\diamond)^\diamond L^* a(ba)^\diamond=L^* a^\diamond(ba)^\diamond$，

从而 $b^\diamond=b^\diamond a^\diamond(ba)^\diamond=b^\diamond(ba)^\diamond=(ba)^\diamond$，故 $b=ab^\diamond=a(ba)^\diamond$.

(iv)⇒(v)　可由定理 2 直接得到.

(v)⇒(i)　假设 $S$ 为左密码 rpp 半群. $\forall x,y\in S$，有 $(xy)^\diamond=(xy^\diamond)^\diamond$. 据引理 8，还需证明 $(xy^\diamond)^\diamond=(x^\diamond y^\diamond)^\diamond$.

注意到 $x^\diamond y^\diamond=x^\diamond x^\diamond\cdot y^\diamond$，以及 $S$ 的所有正则元构成 $S$ 的完全正则半群，于是 $x^\diamond(x^\diamond y^\diamond)^\diamond=(x^\diamond y^\diamond)^\diamond$，从而 $(x^\diamond y^\diamond)^\diamond x^\diamond\in E(S)$，$(x^\diamond y^\diamond)^\diamond wx^\diamond$，进而 $a=x(x^\diamond y^\diamond)^\diamond x\leqslant_\ell x$. 利用引理 13，$a^\diamond wx^\diamond$ 且 $xa^\diamond=a=x(x^\diamond y^\diamond)^\diamond x^\diamond$. 由第 2 个等式可推出，$a^\diamond=x^\diamond a^\diamond=x^\diamond(x^\diamond y^\diamond)^\diamond x^\diamond=(x^\diamond y^\diamond)^\diamond x^\diamond$. 从而据引理 11，

$(x^\diamond y^\diamond)^\diamond\bar{R}a^\diamond\bar{R}a\bar{R}ay^\diamond=x(x^\diamond y^\diamond)^\diamond x^\diamond y^\diamond=xx^\diamond y^\diamond=xy^\diamond$.

但 $L^*$ 为右同余，于是 $xy^\diamond L^* x^\diamond y^\diamond$. 因此 $xy^\diamond\bar{H}x^\diamond y^\diamond$，进而 $(xy^\diamond)^\diamond=(x^\diamond y^\diamond)^\diamond$.

基于定理 3，下面的问题是很自然的，但目前还不能回答它.

**问题 1**　对于超 rpp 半群 $S$，若 $S$ 是右密码 rpp 半群，则 $S$ 是否是密码 rpp 半群?

现在给出正则密码 rpp 半群的一个性质.

**命题2** 令 $S$ 为超 rpp 半群,若 $S$ 为正则密码 rpp 半群,则 $S$ 满足 $(axya)^{\diamond}=(axaya)^{\diamond}$.

**证** 若 $S$ 为正则密码 rpp 半群,则 $(xy)^{\diamond}=(x^{\diamond}y^{\diamond})^{\diamond}$. 据文献[7],

$$(axya)^{\diamond}=(a^{\diamond}x^{\diamond}y^{\diamond}a^{\diamond})^{\diamond}=$$
$$(a^{\diamond}x^{\diamond}a^{\diamond}y^{\diamond}a^{\diamond})^{\diamond}=(axaya)^{\diamond},$$

这是因为 $\mathrm{Reg}(S)$ 是正则密码群.

比较文献[7],下面问题很自然.

**问题2** 对于超 rpp 半群 $S$,若 $S$ 满足 $(axya)^{\diamond}=(axaya)^{\diamond}$,则 $S$ 是否是密码 rpp 半群?

**定理4** 令 $S$ 为超 rpp 半群,则以下 2 款等价:

(i) $S$ 为正则密码 rpp 半群;(ii) $L^{(\ell)}$ 和 $\overline{R}$ 都是同余.

**证** (i)⇒(ii) 若 $S$ 为正则密码 rpp 半群,则据引理 10,$\mathrm{Reg}(S)$ 是正则密码群,于是由文献[7],$L,R$ 都是同余. 令 $x,y,u,v\in S$,如果 $x\overline{R}y,u\overline{R}v$,那么

$$xu\overline{R}(xu)^{\diamond}=(x^{\diamond}u^{\diamond})^{\diamond}Rx^{\diamond}u^{\diamond}Ry^{\diamond}v^{\diamond}=$$
$$R(y^{\diamond}v^{\diamond})^{\diamond}=(yv)^{\diamond}=\overline{R}yv.$$

因此 $\overline{R}$ 是同余;类似地,$L^{(\ell)}$ 是同余.

(ii)⇒(i) 由假设,$\overline{H}=L^{(\ell)}\cap\overline{R}$ 是 $S$ 上的同余,于是 $S$ 为密码 rpp 半群. 据引理 11,$yaL^{(\ell)}aya$,$ax\overline{R}axa$,进而 $axya(L^{(\ell)}\cap\overline{R})axaya$,从而 $S/\overline{H}$ 是正则带. 故 $S$ 为正则密码 rpp 半群.

容易发现,在(ii)⇒(i)证明过程中,仅用到了性质:$S$ 为密码 rpp 半群,以及 $(axya)^{\diamond}=(axaya)^{\diamond}$. 事实上,已经证明:

**推论2** 令 $S$ 为超 rpp 半群,则 $S$ 为正则密码 rpp 半群当且仅当 $S$ 为密码 rpp 半群且满足 $(axya)^{\diamond}=(axaya)^{\diamond}$.

**定理5** 半群 $S$ 为正则密码 rpp 半群当且仅当 $S$ 为密码 rpp 半群且 $\forall\alpha,\beta\in Y$,若 $\alpha\geqslant\beta$,$a,b\in S_{\alpha}$,则 $\rho_{a,\beta}=\rho_{b,\beta}$.

**证** 必要性 仅需证:$\rho_{a,\beta}=\rho_{b,\beta}$. 为此,仅证明:$\rho_{a,\beta}\subseteq\rho_{b,\beta}$,因为 $\rho_{b,\beta}\subseteq\rho_{a,\beta}$ 可以类似地得到. 若 $(x,y)\in\rho_{a,\beta}$,则据定理 4 有

$$(bxb)^{\diamond}=(b^{\diamond}x^{\diamond}b^{\diamond})^{\diamond}=((bab)^{\diamond}x^{\diamond}(bab)^{\diamond})^{\diamond}=$$
$$(babxbab)^{\diamond}=(baxab)^{\diamond}=(bayab)^{\diamond}=(byb)^{\diamond},$$

于是 $(x,y)\in\rho_{a,\beta}$. 从而 $\rho_{a,\beta}\subseteq\rho_{b,\beta}$.

充分性 仅需证:$L^{(\ell)}$ 和 $\overline{R}$ 都是 $S$ 上的同余. 令 $a,b\in S_{\alpha}$,$c\in S_{\beta}$ 且 $aL^{(\ell)}b$. 注意到,

$$(a^{\diamond}\cdot a^{\diamond}(ca^{\diamond})^{\diamond}\cdot a^{\diamond})^{\diamond}=(a^{\diamond}(ca^{\diamond})^{\diamond}\cdot a^{\diamond})^{\diamond}=(aca^{\diamond}a)^{\diamond}=(aca)^{\diamond}=(a^{\diamond}\cdot a^{\diamond}c\cdot a^{\diamond})^{\diamond},$$

则有 $(a^{\diamond}c,a^{\diamond}(ca^{\diamond})^{\diamond})\in\rho_{a^{\diamond},\alpha\beta}$. 进而

$$cbL^{(\ell)}ba^{\diamond}L^{*}(ba^{\diamond}cb)^{\diamond}=(b(a^{\diamond}(ca^{\diamond})^{\diamond})b)^{\diamond}$$

(由于 $\rho_{a^{\diamond},\alpha\beta}=\rho_{b,\alpha\beta}$) $=(ba^{\diamond}cab^{\diamond})^{\diamond}=(bca)^{\diamond}$(由于 $aL^{(\ell)}b$) $=L^{(\ell)}ca$(利用引理 11).

因此 $L^{(\ell)}$ 为 $S$ 上的同余. 类似地,可证:$\overline{R}$ 为 $S$ 上的同余.

称带 $B$ 为左(右)拟正规,如果 $B$ 满足 $axy=axay(yxa=yaxa)$;称 $B$ 为左(右)正规,如果它满足 $axy=ayx(xya=yxa)$;称 $B$ 为正规,如果它满足 $axya=ayxa$. 众所周知,$B$ 为正规带当且仅当它既为左拟正规带又为右拟正规带. 关于这几种带的相关结果,可参见文献[19].

**定理6** 令 $S$ 为超 rpp 半群,则以下各款等价:

(i) $S$ 为左拟正规密码 rpp 半群;

(ii) $L^{(\ell)}$ 为 $S$ 上的右正规带同余,且 $\overline{R}$ 是 $S$ 上的同余;

(iii) $S$ 为密码 rpp 半群,且满足 $(axy)^{\diamond}=(axay)^{\diamond}$;

(iv) $S$ 为密码 rpp 半群且 $\forall\alpha,\beta\in Y$,若 $\alpha\geqslant\beta$,$a,b\in S_{\alpha}$,则 $\overline{R}(S_{\beta})\subseteq\rho_{a,\beta}=\rho_{b,\beta}$.

**证** (i)⇒(ii) 若 $S$ 为左拟正规密码 rpp 半群,则 $S$ 为正则密码 rpp 半群,于是由定理 4,$L^{(\ell)}$,$\overline{R}$ 都是 $S$ 上的同余. $\forall a,x,y\in S$,有 $xya\overline{H}xyxaL^{*}yxa$,进而 $xyaL^{*}yxa$. 从而 $L^{*}$ 为 $S$ 上的右正规带同余.

(ii)⇒(iii) 由于 $L^{(\ell)}$,$\overline{R}$ 都是 $S$ 上的同余,容易看出,$\overline{H}=L^{*}\cap\overline{R}$ 是 $S$ 上的同余. 从而 $S$ 为密码 rpp 半群. 另外,$axyL^{*}xayL^{*}axay$,以及 $axa\overline{R}ax$,于是 $axay\overline{R}axy$. 因此 $axy(L^{*}\cap\overline{R})axay$,进而 $(axy)^{\diamond}=(axay)^{\diamond}$.

(iii)⇒(iv) 令 $x,y\in S_{\beta}$,$x\overline{R}y$. 则

$$(axa)^{\diamond}=(ay^{\diamond}xa)^{\diamond}=(ay^{\diamond}x^{\diamond}a)^{\diamond}=$$
$$(ay^{\diamond}x^{\diamond}y^{\diamond}a)^{\diamond}=(ayxya)^{\diamond}=(ay^{\diamond}a)^{\diamond}=(aya)^{\diamond},$$

进而 $(x,y)\in\rho_{a,\beta}$,从而 $\overline{R}(S_{\beta})\subseteq\rho_{a,\beta}$. 另一方面,据(iii),$S$ 为正则密码 rpp 半群,再利用定理 5,$\rho_{a,\beta}=\rho_{b,\beta}$.

(iv)⇒(i) 据定理 5,$S$ 为正则密码 rpp 半群,再利用定理 4,$L^{*}$,$\overline{R}$ 都是 $S$ 上的同余,结合 $ax\overline{R}axa$,有 $axy\overline{R}axay$. 注意到,$xay^{\diamond}\overline{R}xay^{\diamond}x$. 于是 $(xay^{\diamond},xay^{\diamond}x)\in\rho_{\gamma,\gamma}$,其中 $xay^{\diamond}\in S_{\gamma}$,从而

$$xayL^{(\ell)}y(xay^{\diamond}y)^{\diamond}=y(xay^{\diamond}axy)^{\diamond}L^{*}(xay^{\diamond}\cdot axy)^{\diamond}L^{*}xay^{\diamond}axyL^{(\ell)}axy,$$

有 $axayL^{*}xayL^{*}axy$. 因此 $axy\overline{H}axay$,于是 $S$ 为左拟正规密码 rpp 半群.

**定理7** 令 $S$ 为超 rpp 半群,则以下各款等价:

(i) $S$ 为正规密码 rpp 半群;

(ii) $L^{*}$ 和 $\overline{R}$ 分别为 $S$ 上的右正规带同余和左正

规带同余;

(iii) $S$ 为密码 rpp 半群且满足 $(axya)^{\diamond} = (ayxa)^{\diamond}$;

(iv) $\forall \alpha,\beta \in Y$,若 $\alpha \geqslant \beta$, $a \in S_{\alpha}$,则 $\rho_{a,\beta}$ 为 $S_{\beta}$ 上的泛关系.

**证**　(i) ⇒(ii)　据定理 6,仅需证: $\forall a,x,y \in S$, $axy\overline{R}ayx$. 事实上,可以由下面的计算直接得到: $axy\overline{R}axya\overline{H}ayxa\overline{R}ayx$.

(ii) ⇒(iii)　考虑到 $\overline{R}$, $L^*$ 都是 $S$ 上的同余,有 $\overline{H} = \overline{R} \cap L^*$ 为 $S$ 上的同余,进而 $S$ 为密码 rpp 半群. 又 $L^*$ 为右正规带同余,于是 $axyaL^* xyaL^* yxaL^* \cdot ayxa$; 类似地 $axya\overline{R}ayxa$. 因此 $axya\overline{H}ayxa$,进而 $(axya)^{\diamond} = (ayxa)^{\diamond}$.

(iii) ⇒(iv)　$\forall x,y \in S_{\beta}$ 可得

$(axa)^{\diamond} = (axyx^{\diamond}a)^{\diamond} = (a(yx^{\diamond})xa)^{\diamond} = (ay^{\diamond}(yx)a)^{\diamond} = (a(yx)y^{\diamond}a)^{\diamond} = (aya)^{\diamond}$.

从而 $(x,y) \in \rho_{a,\beta}$. 因此 $\rho_{a,\beta}$ 为 $S_{\beta}$ 上的泛关系.

(iv) ⇒(i)　由(iv), $\forall a,b \in S_{\alpha}$, $\rho_{a,\beta} = \rho_{b,\beta}$. 再据定理 5, $S$ 为密码 rpp 半群. $\forall a \in S_{\alpha}$, $x \in S_{\beta}$, $y \in S_{\gamma}$,显然有 $a^{\diamond}xya^{\diamond}$, $a^{\diamond}yxa^{\diamond} \in S_{\alpha\beta\gamma}$. 于是 $(a^{\diamond}xya^{\diamond}, a^{\diamond}yxa^{\diamond}) \in \rho_{a,\alpha\beta\gamma}$. 从而 $(axya)^{\diamond} = (a \cdot a^{\diamond}xya^{\diamond} \cdot a)^{\diamond} = (a \cdot a^{\diamond}yxa^{\diamond} \cdot a)^{\diamond} = (ayxa)^{\diamond}$. 故 $S$ 为正规密码 rpp 半群.

## 3　参考文献


[1] Fountain J B. Abundant semigroups [J]. Proc London Math Soc, 1982, 44(1): 103-129.

[2] Guo Yuqi, Shum K P, Zhu Pinyu. The structure of left $C$-rpp semigroups [J]. Semigroup Forum, 1995, 50(1): 9-23.

[3] Guo Xiaojiang, Guo Yuqi, Shum K P. Super rpp semigroup [J]. Indian J Pure Appl Math, 2010, 41(3): 505-533.

[4] Guo Junying, Guo Xiaojiang, Ding Juanying. Completely simple semigroups [J]. Advances in Mathematics, 2015, 44(5): 710-718.

[5] Guo Junying, Guo Xiaojiang, Ding Juanying. Free completely simple semigroups [J]. Acta Mathematica Sinica: Engl Ser, 2015, 31(7): 1086-1096.

[6] 吴瑕,郭小江,邱小伟. 纯正超 rpp 半群 [J]. 理论数学, 2013, 3(2): 112-119.

[7] Petrich M, Reilly N R. Completely regular semigroups [M]. New York: John Wiley Sons, 1999.

[8] Guo Xiaojiang, Yang Yanping. Cryptic rpp semigroups [J]. Advances in Mathematics, 2013, 42(4): 465-474.

[9] Yang Yanping, Guo Xiaojiang. Orthocryptic rpp semigroups [J]. Int Math Forum, 2009, 42(4): 2065-2074.

[10] 邱小伟. 自然偏序和超 rpp 半群 [D]. 南昌: 江西师范大学, 2013.

[11] 郭俊颖,郭小江,叶火平. 正规密码 rpp 半群上的同余 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2017, 41(4): 360-366.

[12] Howie J M. An introduction to semigroup theory [M]. London: Academic Press, 1976.

[13] Guo Xiaojiang, Guo Yuqi, Shum K P. Rees matrix theorem for simple strongly rpp semigroups [J]. Asian-European J Math, 2008, 1(2): 215-223.

[14] 叶火平,郭俊颖,郭小江. 超 Rpp 半群的核心 [J]. 理论数学, 2016, 6(3): 172-176.

[15] Lawson M V. The natural partial orders on abundant semigroups [J]. Proc Edinburgh Math Soc, 1987, 30(2): 169-186.

[16] Guo Xiaojiang, Li Xiaoping, Shum K P. F-rpp semigroups [J]. Intern Math Forum, 2006, 1(32): 1571-1585.

[17] Guo Xiaojiang, Shum K P. The Lawson order on rpp semigroups [J]. Intern J Pure Appl Math, 2006, 29(3): 413-421.

[18] Qiu Xiaowei, Guo Xiaojiang, Shum K P. Strongly rpp semigroups endowed with some natural partial orders [J]. J Semigroup Theory Appl, 2013, 2013: Article ID 7.

[19] Petrich M. Lectures in semigroups [M]. Berlin: Akedemic-Verlag, 1977.


# Some Characterizations of Cryptic rpp Semigroups


WANG Ying[1], GUO Junying[2], WU Haochi[3], GUO Xiaojiang[1*]

(1. College of Mathematics and Informatics, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi 330022, China;
2. College of Science and Technology, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi 330027, China;
3. School of Management, Nanchang University, Nanchang Jiangxi 330031, China)



**Abstract:** Cryptic rpp semigroups are defined as strongly rpp semigroups in which $\overline{H}$ is a congruence. This kind of such semigroups is a generalization of cryptogroups in the range of rpp semigroups. Some new characterizations are obtained.



**Key words:** super rpp semigroup; completely $J^{(\ell)}$ simple semigroup; cryptic rpp semigroup; Rees matrix semigroup

(责任编辑: 曾剑锋)