第 43 卷 第 1 期　　江西师范大学学报(自然科学版)　　Vol. 43 No. 1
2019 年 1 月　　Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science)　　Jan. 2019

文章编号:1000-5862(2019)01-0028-03

局部紧正则 Locale 的紧正则反射

李雨珈,孙向荣*
(南京邮电大学理学院,江苏 南京　210023)

摘要:关于如何给出 locale 的紧正则反射构造一直是 locale 理论中最重要研究课题,通过给出补紧元的定义,进而给出局部紧正则 locale 的紧正则反射的一个构造性描述,并保证了局部紧正则定义在 locale 上和在拓扑空间上的一致性. 同时证明了若 A 是局部紧 locale,则 $C_R(A)$(由 A 的所有理想组成的理想格 $I_{dl}(A)$ 的子 frame)是紧正则 locale;并对于局部紧正则 locale A,$C_R(A)$ 是 A 的紧正则反射,并给出了具体的反射关系图.

关键词:局部紧正则 locale;紧正则反射;局部紧 locale
中图分类号:O 153.1;O 189.1　　文献标志码:A　　DOI:10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2019.01.05

0　引言

B. Banaschewsk 等[1] 和 P. T. Johnston[2] 通过引入理想格的子格这一概念,给出 locale 的完全正则紧反射的刻画,并证明了正则紧反射的存在性,在假设选择公理的前提下,locale 的完全正则紧反射和紧正则反射是等价的;但不以选择公理为前提,2 者并不等价. 为了研究 locale 的紧正则反射,贺伟[3] 通过引入一种 2 元关系“$\lhd$”,对 locale 的紧正则反射进行了构造性的描述. 随后又报道了一篇关于局部紧正则 locale 的正则紧化的研究通讯[4],但在文献[4]中关于局部紧正则 locale 的正则紧化的构造以及证明均没有描述. 本文通过引入“补紧元”的定义来给出局部紧正则 locale 的紧正则反射构造的具体描述和相关结论.

1　预备知识

先回顾有关 locale 的一些基础定义和相关结论. 更多的术语和符号均可参见文献[5].

称 L 为一个 frame 或者 locale(亦称为完备 Heyting 代数),若 L 是完备格,并满足无穷分配律 $a \wedge (\vee S) = \vee\{a \wedge s: s \in S\}$,$\forall a \in L, S \subseteq L$.

称 locale A 为紧的,若 $\vee\{a_i: i \in L\} = 1$,则存在有限子集 $L' \subseteq L$,使 $\vee\{a_i: i \in L'\} = 1$.

称 $a < b$,若 $\exists c \in A$,使得 $b \vee c = 1$ 且 $a \wedge c = 0$;称 locale A 是正则的,若 $\forall a \in A$,都有 $a = \vee\{b \in A: b < a\}$.

称 $a << b$,若存在集族$\{c_q \in A \mid q \in [0,1] \cap Q\}$ 使 $c_p < c_q$,$p < q$,$a \leqslant c_0$,$c_1 \leqslant b$;称 locale A 是完全正则的,若 $\forall a \in A$,都有 $a = \vee\{b \in A: b << a\}$.

记 locale A 的正则理想构成的集合为 $C_R(A)$,且 $\Downarrow a = \{x \in A \mid x < a\}$.

2　主要结论

定义 1[6]　设 A 是一个 locale,$a \in A$,称 a 是补紧元,若 $\forall b_i \in A$,有 $a \vee (\vee b_i) = 1$,则存在一个有限集 F 使得 $a \vee (\vee\{b_i, i \in F\}) = 1$.

定义 2　设 A 是局部紧正则 locale,若 $\forall a \vee b = 1$,存在补紧元 c,且 $a > c$,使得 $c \vee b = 1$.

若 A 是局部紧正则 locale,则其谱空间 $P(A)$ 是局部紧正则空间. 反之,若 X 是局部紧正则空间,则由其所有开集构成的 locale $O(X)$ 是局部紧正 locale[7-9].

引理 1　设 A 是一个 locale,$a, b, c \in A$,则有

收稿日期:2018-05-23
基金项目:国家自然科学基金(10926104)资助项目.
通信作者:孙向荣(1976-),男,江苏南京人,副教授,博士,主要从事格上拓扑学和 Locale 理论研究. E-mail:sunxr@njupt.edu.cn

(i) 当 $a \prec b$ 时,$\neg b \prec \neg a$;

(ii) 当 $a \prec b, a \prec c$ 时,$a \prec b \wedge c$;

(iii) 当 $a \prec c, b \prec d$ 时,$a \wedge b \prec c \wedge d$.

证　(i) 由 $a \prec b$ 知,$\exists c \in A$,使得 $b \vee c = 1$, $a \wedge c = 0$. 又由于 $\neg a > c$,$\neg a \vee b = 1$ 且 $\neg b \wedge b = 0$,所以 $\neg b \prec \neg a$.

(ii) 由 $a \prec b, a \prec c$ 知,$\exists d, e \in A$,使得 $a \wedge d = a \wedge e = 0$,$b \vee d = c \vee e = 1$. 从而可得 $(b \wedge c) \vee (d \vee e) = (b \vee d \vee e) \wedge (c \vee d \vee e) = 1$,$a \wedge (d \vee e) = (a \wedge d) \vee (a \wedge e) = 0$.

综上可得 $a \prec b \wedge c$.

(iii) 由 $a \prec c, b \prec d$ 知,$\exists e, f \in A$,使得 $a \wedge e = 0$,$c \vee e = 1$,$b \wedge f = 0$,$d \vee f = 1$. 由 $(a \wedge b) \wedge e = 0$,$c \vee e = 1$ 可得 $a \wedge b \prec c$. 类似地,又由 $(a \wedge b) \wedge f = 0$,$d \vee f = 1$ 可得 $a \wedge b \prec d$. 由引理 1(ii) 可得 $a \wedge b \prec c \wedge d$.

引理 2　locale A 是局部紧正则 locale,$\forall a, b \in A$,若 $a \prec b$,则 $\exists c \in A$,使得 $a \prec c \prec b$.

证　假设 $a \prec b$,易知 $\neg a \vee b = 1$. 因为 A 是局部紧 locale,由定义 2 知,存在补紧元 d 满足 $\neg a > d$,并且 $d \vee b = 1$. 又由 locale A 是正则的,由正则的定义可以得到 $d \vee (\vee \{b_i \mid b_i \prec b\}) = 1$,$d \vee (\vee \{b_i \mid b_i \prec b, i \in F\}) = 1$,$F$ 是有限集.

令 $\vee \{b_i \mid b_i \prec b, i \in F\} = c$,$F$ 是有限集. 由引理 1(ii) 得 $c \prec b$. 显然,$\neg a \vee c = 1$. 故 $a \prec c \prec b$.

引理 3　$C_R(A)$ 是 $I_{dl}(A)$ 的子 frame.

证　假设 X 和 Y 是 A 的正则理想,则 $X \wedge Y = X \cap Y$[10-13]. $\forall a \in X \wedge Y$,可以找到 $b \in X$ 和 $c \in Y$ 使得 $a \prec b, a \prec c$. 由引理 1(ii) 有 $a \prec b \wedge c \in X \cap Y = X$,所以 $X \wedge Y \in C_R(A)$. 同理,由引理 1 可以证明 $C_R(A)$ 在 $I_{dl}(A)$ 中是 2 元且封闭的. 显然,$C_R(A)$ 中定向并是集合的并[14-16]. 因此,$C_R(A)$ 对有限交和任意并封闭.

定理 1　若 A 是局部紧 locale,则 $C_R(A)$ 是紧正则 locale.

证　由引理 3 知,$C_R(A)$ 的紧性显然. 接下来证明 $C_R(A)$ 的正则性. 假设 $a \prec b$,由引理 2 知,$\exists x, y, z$,使得 $a \prec x \prec y \prec z \prec b$,且 $a \wedge \neg x \leqslant a \wedge \neg a = 0$.

另一方面,$\Downarrow a \wedge \Downarrow(\neg x) = \Downarrow a \cap \Downarrow(\neg x) = \{0\}$. 由引理 2 可得 $\neg b \prec \neg z \prec \neg y \prec \neg x \prec \neg a$,故 $\neg y \in \Downarrow(\neg x)$. 同时由 $z \in \Downarrow b$,$\neg y \vee z = 1$ 有 $\Downarrow(\neg x) \vee \Downarrow b = \downarrow \{m \vee n \mid m \in \Downarrow(\neg c), n \in \Downarrow b\} = A$,即 $\Downarrow a \prec \Downarrow b$. $\forall I \in C_R(A)$ 且 $a \in I$,可以找到 $b \in A$ 使 $a \prec b$ 并且 $\Downarrow a \prec \Downarrow b \leqslant I$,即 $\Downarrow a \prec I$,故 $I = \bigcup (\downarrow a \mid a \in I) = \vee \{\Downarrow a \mid a \in I\}$. 所以 $C_R(A)$ 是正则的.

定理 2　若 A 是局部紧正则 locale,$C_R(A)$ 是 A 的紧正则反射.

证　由定理 1 知 $C_R(A)$ 是正则的,现证明反射性. $\forall I \in C_R(A)$,令 $f^*(I) \vee I$. 易证 f^* 是一个 frame 同态映射,f_* 是 f^* 的右伴随,$\forall a \in A$,$f_*(a) = \Downarrow a$,显然 f_* 是局部连续映射. 假设有一个紧正则 locale B 和一个局部连续映射 $h: A \to B$. $\forall I \in C_R(B)$,令 $C_R(h)^*(I) = \{a \in A \mid (\exists b \in I)(a \leqslant h^*(b))\}$,由于 h^* 是一个 frame 同态映射,保留"$\prec$"关系. 所以 $C_R(h)^*(I)$ 是一个正则理想,关系图如图 1 所示.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f_A"] \arrow[d, "h"'] & C_R(A) \arrow[d, "C_R(h)"] \\ B \arrow[r, "f_B"] & C_R(B) \end{tikzcd}$$

图 1　同态映射的关系图

由于 B 是一个紧正则 locale,f_B 是一个同构映射. 所以 $h = f_B^{-1} C_R(A) f_A$,h 可以由 f_A 表示. 并且由文献[14]易证这个表示方式是唯一的.

推论 1[4]　每一个局部紧正则 locale 都存在一个最大的正则紧化.

推论 2[4]　locale A 是局部紧正则的当且仅当由 A 所有正则紧的格是完备格.

推论 3　在拓扑中,若 X 是局部紧正则空间,则由 X 的所有开集组成的拓扑空 $P_t(C_R(O(X)))$ 可以构成 Stone-Cech 紧化.

3　总结

本文通过定义 1 和定义 2,给出"补紧元"的定义,并对局部紧正则 locale 的紧正则反射给出一个构造性的描述,从而把拓扑空间上的局部紧正则定义推广到 locale 上,得到了拓扑空间局部紧性的一个格论刻划. 并通过这 2 个定义证明了局部紧正则 locale 的一些结论,使得局部紧正则领域上的研究有了进一步的突破.

4　参考文献

[1] Banaschewski B, Mulvey C J. Stone-Cech compactification [J]. Houston J Math, 1980, 6(3): 301-311.

[2] Johnston P T. Wallman compactification of locales [J]. Houston J Math,1984,10(2):201-206.
[3] He Wei. Compact regular reflections of locales [J]. Acta Math Sinica,1999,42(3):441-444.
[4] He Wei. Regular compactification of locally compact locles [J]. Chinese Science Bulletin,1996,41(23):2023-2024.
[5] Johnston P T. Stone spaces [M]. Cambridge: Cambridge Univ Press,1982.
[6] Sun Xiangrong,He Wei. A remark on Wallman compactification of locales [J]. Journal of Mathematical Research and Exposition,2008,28(3):605-608.
[7] Wallman H. Lattice and topological spaces [J]. Ann Math,1938,39(1):112-126.
[8] Wallman H. Lattice and bicompact spaces [J]. Proc Nat Sci USA,1937,23(3):164-165.
[9] Banaschewski B. Compactfication of frames [J]. Math Nachr,1990,149(1):105-117.
[10] Johnston P T. Almost maximal ideals [J]. Fund Math,1984,123:197-209.
[11] Maclane S. Categories for the working Mathematician [M]. New York: Springer Verlag,1971.
[12] Kou Hui,Luo Maokang. Strongly zero-dimen sional locales [J]. Acta Mathematica Sinica: English Series,2002,18(1):47-54.
[13] He Wei,Liu Yingming. Inverse limits in the category of locales [J]. Science in China,1998,41(5):476-482.
[14] He Wei,Luo Maokang. Completely regular para compact reflection of locales [J]. Science in China Series A: Mathematics,2006,49(6):820-826.
[15] 孙向荣,贺伟. 关于 Wallman 紧化的一点注记 [J]. 数学研究与评论,2008,28(3):605-608.
[16] 贺伟,张耀明. Locale 的内部与边界 [J]. 数学进展,2000,29(4):357-361.

The Compact Regular Reflection of Locally Compact Regular Locale

LI Yujia,SUN Xiangrong*
(School of Science,Nanjing University of Posts and Telecommunications,Nanjing Jiangsu 210023,China)

Abstract: About how to give a construction of the compact regular reflection for locales is the most important issue in Locale theory. By given the definition of the co-compact element,a constructive description of the compact regular reflection for locally compact regular locales will be described,it also ensures that the definition of locally compact regular in the locale and in the topological space is consistent. At the same time,it is proved that if the local A is locally compact,then $C_R(A)$ (the sub-frame of the ideal lattice composed of all ideals) is the compact regular locale,and for the locally compact regular A,$C_R(A)$ is the compact regular reflections of locale A,the specific reflection relationship is also given.

Key words: locally compact regular locales; compact regular reflection; locally compact locales

(责任编辑:曾剑锋)