文章编号: 1000-5862(2019)02-0184-04

带有非齐次 Dirichlet 条件的 Helmholtz 方程柯西问题的傅里叶方法

任丽婷,熊向团*

(西北师范大学数学与统计学院,甘肃 兰州 730070)

摘要: 由于带有非齐次 Dirichlet 条件的 Helmholtz 方程柯西问题的解不连续依赖于数据,所以该问题是严重的不适定问题. 利用傅里叶方法给出了该问题在无限条状区域上的正则化近似解,并相应给出了先验与后验的正则化参数选取规则及近似解与精确解的收敛误差估计.

关键词: 不适定问题; Helmholtz 方程柯西问题; 傅里叶方法; Dirichlet 条件; 误差估计

中图分类号: O 242.2 **文献标志码:** A **DOI:** 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2019.02.12

0 引言

在过去几十年中,带有非齐次 Dirichlet 条件的 Helmholtz 方程在物理中有着广泛应用,它已经运用于一些逆传导问题[1-2],然而这个问题是不适定的,为了解决该解的连续依赖性,需要一种有效且易于使用的数值近似方法,目前已经提出了许多数值近似方法来解决该问题. 如 Fu Chuli 等[3]给出了傅里叶正则化方法,Qian Ailin 等[4]用逆拟的正则化方法求解 Helmholt1z 方程的柯西问题,Qin Haihua 等[5]运用修正的吉洪诺夫正则化方法,Xiong Xiangtuan 等[6]给出了谱方法求解该问题. 但是,这些结果主要集中于正则化参数的先验选取及收敛误差估计,然而,在正则化参数先验选取规则中,其先验界往往难以估计,针对这种不足,笔者使用一种新的非标准的先验界[7],提出带有非齐次 Dirichlet 条件的 Helmholtz 方程柯西问题,并结合文献[8]得到正则化参数先验和后验的选取规则及其收敛误差估计.

考虑在 $\mathbf{R}^{n+1}$ 上的带状区域内的 Helmholtz 方程:

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) + k^2 u(x,y) = 0, x \in (0,1), y \in \mathbf{R}^n, \\ u(0,y) = g(y), \quad y \in \mathbf{R}^n, \\ u_x(0,y) = 0, \quad y \in \mathbf{R}^n, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \sum_{j=1}^{n} \partial^2/\partial y_j^2$ 是 $n+1$ 维拉普拉斯算子.

由傅里叶变换得到问题(1)的解为

$$\hat{u}(x,\xi) = \cosh(x\sqrt{|\xi|^2 - k^2})\hat{g}(\xi),$$

它等价于

$$u(x,y) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int_{\mathbf{R}^n} e^{iy\xi}\cosh(x\sqrt{|\xi|^2 - k^2})\hat{g}(\xi)\,d\xi,$$

其中 $\hat{u}(x,\xi)$ 是 $u(x,\xi)$ 关于变量 $y \in \mathbf{R}^n$ 的傅里叶变换,当 $|\xi| \to \infty$ 时,因子 $\cosh(x\sqrt{|\xi|^2 - k^2})$ 呈指数型增长,实际测量数据 $g(y)$ 的一个小小的扰动就会引起解有较大变化,因此这个问题是严重不适定问题. 故本文给出了一种新的傅里叶正则化方法,使其解变得稳定.

1 先验参数选择和误差估计

假设精确数据 $g(y)$ 和测量数据 $g^\delta(y)$ 都属于 $L^2(\mathbf{R}^n)$,且满足

$$\| g(\cdot) - g^\delta(\cdot) \| \le \delta, \tag{2}$$

其中 $\|\cdot\|$ 为 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 上的范数,$\delta > 0$ 为噪音水平,由 Parseval 等式得 $\|g\| = \|\hat{g}\|$. 对于不适定问题在精确解上作一些先验假设是有必要的,否则,正则化近似解的收敛速度可能任意慢[9]. 为了容易得到收敛误差估计,假设一种新的非标准先验界

$$\left(\int_{|\xi|^2 \ge k} |\hat{g}(\xi) e^{\sqrt{|\xi|^2 - k^2}}|^2 (1 + |\xi|^2)^p d\xi\right)^{1/2} \le E, \tag{3}$$

收稿日期: 2018-10-28

基金项目: 国家自然科学基金(11661072)和西北师范大学科学计算创新团队课题(NWNU-LKQN-17-5)资助项目.

通信作者: 熊向团(1977-),男,湖北武汉人,副教授,博士,博士生导师,主要从事微分方程数值解研究. e-mail: xiongxt@gmail.com

其中 $E>0$ 是固定的常数，$p>0$.

引理 1[10] 当 $|\xi|\geqslant k$ 时，$\forall x\in(0,1)$，有
$$\cosh(x\sqrt{|\xi|^2-k^2})\leqslant e^{x\sqrt{|\xi|^2-k^2}}.$$

证 $\cosh(x\sqrt{|\xi|^2-k^2}) = \left(e^{x\sqrt{|\xi|^2-k^2}} + e^{-x\sqrt{|\xi|^2-k^2}}\right)/2 \leqslant e^{x\sqrt{|\xi|^2-k^2}}$.

引理 2 当 $|\xi|<k$ 时，$\forall x\in(0,1)$，有
$$\cosh(x\sqrt{|\xi|^2-k^2}) = \cos(x\sqrt{k^2-|\xi|^2}).$$

证 $\cosh(x\sqrt{|\xi|^2-k^2}) = \mathrm{i}\cos(x\sqrt{|\xi|^2-k^2}) = \cos(x\sqrt{k^2-|\xi|^2})$.

定义正则化函数
$$\rho_{\xi_{\max}} = \begin{cases}1, & |\xi|\leqslant\xi_{\max},\\ 0, & |\xi|>\xi_{\max},\end{cases}$$
$u^\delta_{\xi_{\max}}(x,y)$ 是问题(1)带有噪音数据的正则化近似解
$$u^\delta_{\xi_{\max}}(x,y) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int_{\mathbf{R}^n} e^{iy\xi}\cosh(x\sqrt{|\xi|^2-k^2})\cdot \hat{g}^\delta(\xi)\rho_{\xi_{\max}}\mathrm{d}\xi,$$
其中 $\xi_{\max}$ 为正则化参数，或者它等价于
$$\hat{u}^\delta_{\xi_{\max}}(x,\xi) = \cosh(x\sqrt{|\xi|^2-k^2})\hat{g}^\delta(\xi)\rho_{\xi_{\max}}.$$

定理 1 设 $u(x,y)$ 是在精确数据 $g(y)$ 下的解，$u^\delta_{\xi_{\max}}(x,y)$ 是在测量数据 $g^\delta(y)$ 下的正则化近似解，满足噪音水平(2)和先验条件(3)，取 $\xi_{\max}=\sqrt{\ln^2(E/\delta(\ln(E/\delta))^{-p})+k^2}$，假设 $\xi_{\max}\geqslant k$，有下列误差估计:
$$\|u(x,\cdot)-u^\delta_{\xi_{\max}}(x,\cdot)\|\leqslant E^x\delta^{1-x}(\ln(E/\delta))^{-px}(2+o(1)),\ \delta\to0.$$

证 根据 Parseval 等式[11]，三角不等式和引理 1 得
$$\|u(x,\cdot)-u^\delta_{\xi_{\max}}(x,\cdot)\| = \|\hat u(x,\cdot)-\hat u^\delta_{\xi_{\max}}(x,\cdot)\|\leqslant\|\hat u(x,\cdot)-\hat u_{\xi_{\max}}(x,\cdot)\|+\|\hat u_{\xi_{\max}}(x,\cdot)-\hat u^\delta_{\xi_{\max}}(x,\cdot)\| = I_1+I_2.$$
$$I_1 = \|\hat u(x,\cdot)-\hat u_{\xi_{\max}}(x,\cdot)\| = \|\cosh(x\sqrt{|\xi|^2-k^2})\hat g(\xi)-\cosh(x\sqrt{|\xi|^2-k^2})\cdot\hat g(\xi)\rho_{\xi_{\max}}\| = \|\cosh(x\sqrt{|\xi|^2-k^2})\hat g(\xi)(1-\rho_{\xi_{\max}})\| =$$
$$\left(\int_{|\xi|\geqslant\xi_{\max}}\left|\cosh(x\sqrt{|\xi|^2-k^2})\hat g(\xi)\right|^2\mathrm{d}\xi\right)^{1/2}\leqslant\left(\int_{|\xi|\geqslant\xi_{\max}}\left|\frac{e^{x\sqrt{|\xi|^2-k^2}}}{e^{\sqrt{|\xi|^2-k^2}}}e^{\sqrt{|\xi|^2-k^2}}\hat g(\xi)\right|^2\mathrm{d}\xi\right)^{1/2}=$$
$$\left(\int_{|\xi|\geqslant\xi_{\max}}\left|e^{(x-1)\sqrt{|\xi|^2-k^2}}e^{\sqrt{|\xi|^2-k^2}}\hat g(\xi)\right|^2\mathrm{d}\xi\right)^{1/2}\leqslant$$
$$\sup_{|\xi|\geqslant\xi_{\max}}e^{(x-1)\sqrt{|\xi|^2-k^2}}\left(\int_{|\xi|>\xi_{\max}}\left|e^{\sqrt{|\xi|^2-k^2}}\hat g(\xi)\right|^2(1+|\xi|^2)^p(1+|\xi|^2)^{-p}\mathrm{d}\xi\right)^{1/2}\leqslant e^{(x-1)\sqrt{\xi_{\max}^2-k^2}}\cdot$$
$$\left(\int_{|\xi|\geqslant\xi_{\max}}\left|e^{\sqrt{|\xi|^2-k^2}}\hat g(\xi)\right|^2(1+|\xi|^2)^p(1+|\xi|^2)^{-p}\mathrm{d}\xi\right)^{1/2}.$$

根据先验界(3)可知
$$I_1\leqslant e^{(x-1)\sqrt{\xi_{\max}^2-k^2}}E\xi_{\max}^{-p}\leqslant e^{(x-1)\sqrt{\xi_{\max}^2-k^2}}E(\sqrt{\xi_{\max}^2-k^2})^{-p}.$$

由 $\xi_{\max}=\sqrt{\ln^2(E/\delta(\ln(E/\delta))^{-p})+k^2}$ 得 $e^{(x-1)\sqrt{\xi_{\max}^2-k^2}}=E^{x-1}\delta^{1-x}(\ln(E/\delta))^{-p(x-1)}$，$\delta\to0$. 从而 $(\sqrt{\xi_{\max}^2-k^2})^{-p}=(1+o(1))(\ln(E/\delta))^{-p}$，$\delta\to0$.
$$I_1\leqslant E^x\delta^{1-x}(\ln(E/\delta))^{-p(x-1)}(1+o(1))\cdot(\ln(E/\delta))^{-p}=E^x\delta^{1-x}(\ln(E/\delta))^{-px}(1+o(1)),\ \delta\to0.\tag{4}$$

又
$$I_2=\|\hat u_{\xi_{\max}}(x,\cdot)-\hat u^\delta_{\xi_{\max}}(x,\cdot)\|=\|\cosh(x\sqrt{|\xi|^2-k^2})\rho_{\xi_{\max}}(\hat g(\xi)-\hat g^\delta(\xi))\|=\left(\int_{|\xi|\leqslant\xi_{\max}}|\cosh(x\sqrt{|\xi|^2-k^2})(\hat g(\xi)-\hat g^\delta(\xi))|^2\mathrm{d}\xi\right)^{1/2}.$$

由引理 1 和引理 2 得
$$I_2=\left(\int_{|\xi|<k}|\cos(x\sqrt{k^2-|\xi|^2})(\hat g(\xi)-\hat g^\delta(\xi))|^2\mathrm{d}\xi\right)^{1/2}+\left(\int_{k\leqslant|\xi|\leqslant\xi_{\max}}|\cosh(x\sqrt{|\xi|^2-k^2})(\hat g(\xi)-\hat g^\delta(\xi))|^2\mathrm{d}\xi\right)^{1/2}=$$
$$\left(\int_{|\xi|<k}|\hat g(\xi)-\hat g^\delta(\xi)|^2\mathrm{d}\xi\right)^{1/2}+\left(\int_{k\leqslant|\xi|\leqslant\xi_{\max}}|e^{x\sqrt{|\xi|^2-k^2}}(\hat g(\xi)-\hat g^\delta(\xi))|^2\mathrm{d}\xi\right)^{1/2}\leqslant\delta+$$
$$\sup_{k\leqslant|\xi|\leqslant\xi_{\max}}e^{x\sqrt{|\xi|^2-k^2}}\delta\leqslant\delta+e^{x\sqrt{\xi_{\max}^2-k^2}}\delta\leqslant e^{x\sqrt{\xi_{\max}^2-k^2}}\delta,\ \delta\to0.$$

由 $\xi_{\max}=\sqrt{\ln^2(E/\delta(\ln(E/\delta))^{-p})+k^2}$ 得 $e^{x\sqrt{\xi_{\max}^2-k^2}}=E^x\delta^{-x}(\ln(E/\delta))^{-px}$，$\delta\to0$. 从而
$$I_2\leqslant E^x\delta^{1-x}(\ln(E/\delta))^{-px},\ \delta\to0.\tag{5}$$

联合(4)式和(5)式得
$$\|u(x,\cdot)-u^\delta_{\xi_{\max}}(x,\cdot)\|\leqslant E^x\delta^{1-x}(\ln(E/\delta))^{-px}(1+o(1))+E^x\delta^{1-x}(\ln(E/\delta))^{-px}\leqslant E^x\delta^{1-x}(\ln(E/\delta))^{-px}(2+o(1)),\ \delta\to0.$$

2 后验参数选择和误差估计

根据偏差原理来选择正则化参数，这里 $\tau>1$ 是一个常数，设 $\xi_{\max}$ 为下述方程的解[12]:
$$\|(1-\rho_{\xi_{\max}})\hat g^\delta(\xi)\|=\tau\delta.\tag{6}$$

引理 3[8] 当 $0<\tau\delta<\|\hat g^\delta\|$ 时，$\xi_{\max}$ 是正则化参数，有下列性质成立:

(i) $\|(1-\rho_{\xi_{\max}})\hat g^\delta(\xi)\|$ 为连续函数;

(ii) $\|(1-\rho_{\xi_{\max}})\hat g^\delta(\xi)\|$ 为递减函数;

(iii) $\lim_{\xi_{\max}\to\infty}\|(1-\rho_{\xi_{\max}})\hat{g}^{\delta}(\xi)\|=0$;

(iv) $\lim_{\xi_{\max}\to 0}\|(1-\rho_{\xi_{\max}})\hat{g}^{\delta}(\xi)\|=\|\hat{g}^{\delta}(\xi)\|=\|g^{\delta}(\xi)\|$.

注 1 由引理 3 可知,(6) 式的解存在且唯一.

引理 4[7] 假设噪音水平(2) 和先验界(3) 成立,选取的正则化参数 $\xi_{\max}$ 满足方程(6),假设 $\xi_{\max}\geqslant k$,有如下不等式成立:

(i) $e^{\sqrt{\xi_{\max}^2-k^2}}\leqslant E/[(\tau-1)\delta](\ln[E/((\tau-1)\delta)])^{-p}(1+o(1))$, $\delta\to 0$, $p>0$;

(ii) 当 $|\xi|\geqslant\xi_{\max}$,这里 $c>1$ 是常数,则

$(\sqrt{|\xi|^2-k^2})^{-p}\leqslant(\ln(E/((\tau-1)c\delta))^{-p}(1+o(1))$, $\delta\to 0$, $p>0$.

定理 2[13] 设 $u(x,y)$ 是在精确数据 $g(y)$ 下的解,$u^{\delta}_{\xi_{\max}}(x,y)$ 是在测量数据 $g^{\delta}(y)$ 下的正则化近似解,满足先验条件(3) 式和噪音水平(2) 式,根据偏差原理(6) 式选择 $\xi_{\max}$,假设 $\xi_{\max}\geqslant k$,则可得下列误差估计

$$\|u(x,\cdot)-u^{\delta}_{\xi_{\max}}(x,\cdot)\|\leqslant(1/(\tau-1)^{x}+(\tau+1)^{1-x}+o(1))E^{x}\delta^{1-x}(\ln(E/((\tau-1)c\delta)))^{-px},\delta\to 0.$$

证 根据 Parseval 等式和三角不等式得

$$\|u(x,\cdot)-u^{\delta}_{\xi_{\max}}(x,\cdot)\|=\|\hat{u}(x,\cdot)-\hat{u}^{\delta}_{\xi_{\max}}(x,\cdot)\|\leqslant\|\hat{u}(x,\cdot)-\hat{u}_{\xi_{\max}}(x,\cdot)\|+\|\hat{u}_{\xi_{\max}}(x,\cdot)-\hat{u}^{\delta}_{\xi_{\max}}(x,\cdot)\|=I_3+I_4.$$

根据引理 1 得

$$I_3=\|\hat{u}(x,\cdot)-\hat{u}_{\xi_{\max}}(x,\cdot)\|=\|\cosh(x\sqrt{|\xi|^2-k^2})\hat{g}(\xi)-\cosh(x\sqrt{|\xi|^2-k^2})\hat{g}(\xi)\rho_{\xi_{\max}}\|=\|\cosh(x\sqrt{|\xi|^2-k^2})\hat{g}(\xi)(1-\rho_{\xi_{\max}})\|=\left(\int_{|\xi|\geqslant\xi_{\max}}|\cosh(x\sqrt{|\xi|^2-k^2})\hat{g}(\xi)|^2d\xi\right)^{1/2}\leqslant\left(\int_{|\xi|\geqslant\xi_{\max}}|e^{x\sqrt{|\xi|^2-k^2}}\hat{g}(\xi)|^2d\xi\right)^{1/2}\leqslant\left(\int_{|\xi|\geqslant\xi_{\max}}\left(|e^{\sqrt{|\xi|^2-k^2}}\hat{g}(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^{p}\right)^{x}\left((1+|\xi|^2)^{-px/(1-x)}|\hat{g}(\xi)|^2\right)^{1-x}d\xi\right)^{1/2},$$

由 Hölder 不等式[14] 得

$$I_3\leqslant\left(\int_{|\xi|\geqslant\xi_{\max}}|e^{\sqrt{|\xi|^2-k^2}}\hat{g}(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^{p}d\xi\right)^{x/2}\cdot\left(\int_{|\xi|\geqslant\xi_{\max}}(1+|\xi|^2)^{-px/(1-x)}|\hat{g}(\xi)|^2d\xi\right)^{(1-x)/2}.$$

由先验界(3) 和引理 4(ii) 得

$$I_3\leqslant E^{x}\left(\int_{|\xi|\geqslant\xi_{\max}}(\sqrt{|\xi|^2-k^2})^{-2px/(1-x)}|\hat{g}(\xi)|^2d\xi\right)^{(1-x)/2}\leqslant E^{x}\left(\int_{|\xi|\geqslant\xi_{\max}}((1+o(1))\ln(E/((\tau-1)c\delta)))^{-2px/(1-x)}\cdot|\hat{g}(\xi)|^2d\xi\right)^{(1-x)/2}\leqslant E^{x}(1+o(1))(\ln(E/((\tau-1)c\delta))^{-px}\left(\int_{|\xi|\geqslant\xi_{\max}}|\hat{g}(\xi)|^2d\xi\right)^{(1-x)/2}\leqslant E^{x}(1+o(1))\cdot(\ln(E/((\tau-1)c\delta)))^{-px}\|(1-\rho_{\xi_{\max}})\hat{g}(\xi)\|^{1-x},\delta\to 0,$$

根据三角不等式得

$$I_3\leqslant E^{x}(1+o(1))(\ln(E/((\tau-1)c\delta)))^{-px}\|(1-\rho_{\xi_{\max}})\hat{g}^{\delta}(\xi)+(1-\rho_{\xi_{\max}})(\hat{g}(\xi)-\hat{g}^{\delta}(\xi))\|^{1-x},\delta\to 0,$$

由噪音水平(2) 和方程(6) 得

$$I_3\leqslant E^{x}(1+o(1))(\ln(E/((\tau-1)c\delta)))^{-px}((\tau+1)\delta)^{1-x}\leqslant((\tau+1)^{1-x}+o(1))E^{x}\delta^{1-x}(\ln(E/((\tau-1)c\delta)))^{-px},\delta\to 0.\tag{7}$$

又

$$I_4=\|\hat{u}_{\xi_{\max}}(x,\cdot)-\hat{u}^{\delta}_{\xi_{\max}}(x,\cdot)\|=\|\cosh(x\sqrt{|\xi|^2-k^2})\rho_{\xi_{\max}}(\hat{g}(\xi)-\hat{g}^{\delta}(\xi))\|=\left(\int_{|\xi|\leqslant\xi_{\max}}|\cosh(x\sqrt{|\xi|^2-k^2})(\hat{g}(\xi)-\hat{g}^{\delta}(\xi))|^2d\xi\right)^{1/2}=\left(\int_{|\xi|<k}|\cosh(x\sqrt{|\xi|^2-k^2})(\hat{g}(\xi)-\hat{g}^{\delta}(\xi))|^2d\xi\right)^{1/2}+\left(\int_{k\leqslant|\xi|\leqslant\xi_{\max}}|\cosh(x\sqrt{|\xi|^2-k^2})(\hat{g}(\xi)-\hat{g}^{\delta}(\xi))|^2d\xi\right)^{1/2}=\left(\int_{|\xi|<k}|\cos(x\sqrt{k^2-|\xi|^2})(\hat{g}(\xi)-\hat{g}^{\delta}(\xi))|^2d\xi\right)^{1/2}+\left(\int_{k\leqslant|\xi|\leqslant\xi_{\max}}|\cosh(x\sqrt{|\xi|^2-k^2})(\hat{g}(\xi)-\hat{g}^{\delta}(\xi))|^2d\xi\right)^{1/2}.$$

由引理 1 和引理 2 得

$$I_4\leqslant\left(\int_{|\xi|<k}|\hat{g}(\xi)-\hat{g}^{\delta}(\xi)|^2d\xi\right)^{1/2}+\left(\int_{k\leqslant|\xi|\leqslant\xi_{\max}}|e^{x\sqrt{|\xi|^2-k^2}}(\hat{g}(\xi)-\hat{g}^{\delta}(\xi))|^2d\xi\right)^{1/2},$$

由噪音水平(2) 得

$$I_4\leqslant\delta+\sup_{k\leqslant|\xi|\leqslant\xi_{\max}}e^{x\sqrt{|\xi|^2-k^2}}\left(\int_{\mathbf{R}^n}|(\hat{g}(\xi)-\hat{g}^{\delta}(\xi))|^2d\xi\right)^{1/2}\leqslant\delta+e^{x\sqrt{\xi_{\max}^2-k^2}}\delta,$$

由引理 4(i) 得

$$I_4\leqslant\delta+(E/((\tau-1)\delta)(\ln(E/((\tau-1)\delta)))^{-p}(1+o(1)))^{x}\delta\leqslant\delta+(1+o(1))(1/(\tau-1))^{x}E^{x}\delta^{1-x}\cdot(\ln(E/((\tau-1)\delta)))^{-px}\leqslant((1/(\tau-1))^{x}+o(1))E^{x}\delta^{1-x}(\ln(E/((\tau-1)\delta)))^{-px},\delta\to 0.\tag{8}$$

联合(7) 式和(8) 式得

$$\|u(x,\cdot)-u^{\delta}_{\xi_{\max}}(x,\cdot)\|\leqslant((\tau+1)^{1-x}+o(1))E^{x}\delta^{1-x}(\ln(E/((\tau-1)c\delta)))^{-px}+((1/(\tau-1))^{x}+o(1))E^{x}\delta^{1-x}(\ln(E/((\tau-1)\delta)))^{-px}\leqslant(1/(\tau-1)^{x}+(\tau+1)^{1-x}+o(1))E^{x}\delta^{1-x}(\ln(E/((\tau-

$1)c\delta)))^{-px}, \delta \to 0.$

3 总结

采用傅里叶方法求解带有非齐次 Dirichet 条件的 Helmholtz 方程柯西问题，得到先验与后验渐近 Hölder 型收敛误差估计. 这种方法同样也适用于带有非齐次 Neumann 条件的 Laplace 方程柯西问题[14]，并可能适用于其他不适定问题，这有待于进一步的探究[15].

4 参考文献

[1] Qian Zhi，Fu Chuli. Regularization strategies for a two-dimensional inverse heat conduction problem[J]. Inverse Problems，2007，23(3)：1053-1068.

[2] Fu Chuli. Simplified Tikhonov and Fourier regularization methods on a general sideways parabolic equation[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics，2004，167(2)：449-463.

[3] Fu Chuli，Feng Xiaoling，Qian Zhi. The Fourier regularization for solving the Cauchy problem for the Helmholtz equation[J]. Applied Numerical Mathematics，2009，59(10)：2625-2640.

[4] Qian Ailin，Xiong Xiangtuan，Wu Yujiang. On a quasi-reversibility regularization method for a Cauchy problem of the Helmholtz equation[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics，2010，233(8)：1969-1979.

[5] Qin Haihua，Wei Ting. Modified regularization method for the Cauchy problem of the Helmholtz equation[J]. Applied Mathematical Modelling，2009，33(5)：2334-2348.

[6] Xiong Xiangtuan，Fu Chuli. Two approximate methods of a Cauchy problem for the Helmholtz equation[J]. Computational and Applied Mathematics，2007，26(2)：285-307.

[7] Fu Chuli，Ma Yunjie，Zhang Yuanxiang，et al. A *a posteriori* regularization for the Cauchy problem for the Helmholtz equation with inhomogeneous Neumann data[J]. Applied Mathematical Modelling，2015，39(14)：4103-4120.

[8] Fu Chuli，Feng Xiaoli，Qian Zhi. The Fourier regularization for the Cauchy problem for solving the Helmholtz equation[J]. Applied Numerical Mathematis，2009，59(10)：2625-2640.

[9] Cheng Hao，Feng Xiaoli. A new filtering method for the Cauchy problem of the Laplace equation[J]. International Journal of Computer Mathematics，2014，91(12)：2621-2630.

[10] 刘继军. 不适定问题的正则化方法及应用[M]. 北京：科学出版社，2005.

[11] Feng Xiaoli，Fu Chuli，Cheng Hao. A regularization method for solving the Cauchy problem for the Helmholtz equation[J]. Applied Mathematical Modelling，2011，35(7)：3301-3315.

[12] Fu Chuli，Ma Yunjie，Cheng Hao，et al. The *a posteriori* Fourier method for solving the Cauchy problem for the Laplace equation with nonhomogeneous Neumann data[J]. Applied Mathematical Modelling，2013，37(14/15)：7764-7777.

[13] Fu Chuli，Xiong Xiangtuan，Qian Zhi. Fourier regularization for a backward heat equation[J]. Math Anal Appl，2007，331(1)：472-480.

[14] 曹笑笑，毛东玲，程强，等. 带有非齐次 Neumann 条件的 Laplace 方程 Cauchy 问题的一种傅里叶正则化方法[J]. 湖北大学学报：自然科学版，2017，39(3)：236-240.

[15] Kirsch A. An introduction to the mathematical theory of inverse problems[M]. Berlin：Springer-Verlag，1996.

The Fourier Method for the Cauchy Problem of the Helmholtz Equation with Inhomogeneous Dirichlet Data

REN Liting，XIONG Xiangtuan*

(College of Mathematics and Statistics，Northwest Normal University，Lanzhou Gansu 730070，China)

Abstract：The Cauchy problem for the Helmholtz equation with inhomogeneous Dirichlet data is a severely ill-posed problem，because its solution does not depend continuously on the data. The regularized approximate solution of the problem in an infinite "strip" domain is obtained by a Fourier regularization method. Then，some convergence error estimations with the asymptotic Hölder type error for Fourier regularization method can be proved by using an a priori regularization parameter choice rule and an a posterior regularization parameter choice rule.

Key words：ill-posed problem；Cauchy problem for Helmholtz equation；Fourier method；Dirichlet data；error estimation

(责任编辑：曾剑锋)