第 43 卷 第 3 期 江西师范大学学报(自然科学版) Vol. 43 No. 3
2019 年 5 月 Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science) May 2019

文章编号: 1000-5862(2019)03-0277-05

一类主从博弈 Nash 均衡点的存在性和稳定性

蔡江华,贾文生*,刘露萍
(贵州大学数学与统计学院,贵州 贵阳 550025)

摘要: 针对单个领导者与多个跟随者的主从博弈,在较弱的条件下,利用 Berge 极大值定理、Fan-Glicksberg 不动点定理,证明了一类主从博弈 Nash 均衡点的存在性,推广和改进了已有的一些结果. 在均衡点的稳定性方面,从最佳回应拓扑的角度证明了此类主从博弈存在 Nash 均衡点集的本质连通区.

关键词: 主从博弈; Nash 均衡点; 伪连续; 本质连通区; 拟凹
中图分类号: O 225 文献标志码: A DOI: 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2019.03.10

0 引言

主从博弈最早是由德国经济学家 H. V. Stackelberg 提出的[1]. 近年来受到了越来越多学者的关注,产生了大量的研究成果,已广泛应用于经济学、管理学及其他领域[2-4],如中央政府与地方政府之间、集团与子公司之间、CEO 与各个项目团队之间等博弈都是主从博弈的具体实例. 俞建[5-6]分别给出了单主多从博弈和两主多从博弈 Nash 均衡点的存在性定理; 文献[7]在不确定参数变化范围的假设下,研究多主从博弈中均衡点的存在性问题; 文献[8]分析了抽象的单主多从博弈中跟随者反应函数的性质,得到了该函数一般是集值映射的结论; 文献[9]提出主从博弈轻微利他均衡点的概念,在博弈过程中,领导者适当考虑跟随者的利益,使之达到双方共赢; 文献[10]利用 Ky Fan 不等式证明了一类多主从博弈均衡点的存在性和良定性; 文献[11]考虑具有单值目标函数的 2 个领导者与多个跟随者的博弈,证明了局部凸拓扑空间中均衡点的存在性定理; 文献[12]建立了广义多目标主从博弈弱 Pareto-Nash 均衡的存在性定理,并分析了其通有稳定性; 文献[13]介绍了在多主从博弈中合作均衡的概念,并建立一个存在性定理; 文献[14]研究具有不等式约束条件的非光滑多目标规划的强 KKT 条件和约束条件; 文献[15]给出了一类多主从博弈模型在电力市场中的应用; 文献[16]根据广义最大元的方法给出了博弈 Nash 均衡点的存在性定理,推广了一些经典博弈均衡的存在性定理.

上述研究都是针对局中人支付函数连续或半连续条件下主从博弈均衡解的存在性问题进行研究,在一般 n 人非合作博弈中,J. Morgan 等[17]提出了伪连续的概念,并在一定条件下证明了当局中人的支付函数是伪连续时至少存在 1 个 Nash 均衡点. 受上述文献的启发,本文先给出弱连续条件下主从博弈 Nash 均衡点的存在性定理,并借助在文献[6]中关于非线性问题解集本质连通区的存在性来讨论这类主从博弈 Nash 均衡点的本质连通区.

1 模型和假设

一个领导者和 N 个跟随者的主从博弈模型可以表示如下: 设领导者的策略集是 X,记 $I=\{1,2,\cdots,N\}$ 为跟随者的集合,$\forall i\in I$,第 i 个跟随者的策略集为 Y_i,记 $Y=\prod_{i=1}^{N}Y_i$,$Y_{-i}=\prod_{j\in I\setminus\{i\}}Y_j$,领导者的目标函数为 $\varphi: X\times Y\to\mathbf{R}$,第 i 个跟随者的目标函数为 $f_i: X\times Y\to\mathbf{R}$,定义含有领导者策略参数 x 的跟随者的 Nash 均衡点集值映射 $K: X\to 2^Y$ 为

$$K(x)=\{y\in Y\mid f_i(x,y_i,y_{-i})=\max_{u_i\in Y_i}f_i(x,u_i,y_{-i})\}.$$

领导者首先做出策略 $x\in X$,N 个非合作跟随者在知

收稿日期: 2018-11-10
基金项目: 国家自然科学基金(11561013),人社部留学归国人员择优(人社[2015]192),贵州省联合基金(黔科联合[2014]7643),贵州大学人才引进基金(贵大[2014]05)和贵州大学培育基金(黔科合平台人才[2017]5788)资助项目.
通信作者: 贾文生(1981-),男,河南南阳人,副教授,博士,主要从事非线性分析与博弈论研究. E-mail: jws0505@163.com

道领导者的策略 $x \in X$ 后,从含有领导者策略参数 x 的跟随者的 Nash 均衡点集中选择策略 $y = (y_1, y_2, \cdots, y_N) \in Y$,设均衡点存在,即 $\exists y^* = (y_1^*, y_2^*, \cdots, y_N^*) \in Y$,使得 $\forall i \in I$,有 $f_i(x, y_i^*, y_{-i}^*) = \max\limits_{u_i \in Y_i} f_i(x, u_i, y_{-i}^*)$,其中 $-i = I \setminus \{i\}$.

均衡点一般是不唯一的,所有均衡点的集合依赖于 x,记为 $K(x)$,由 $x \to K(x)$ 就定义了一个集值映射 $K: X \to P_0(Y)$,记 $V(x) = \max\limits_{y \in K(x)} \varphi(x, y)$,若满足

$$V(x^*) = \max_{x \in X} V(x) = \max_{x \in X} \max_{y \in K(x)} \varphi(x, y),$$

$\varphi(x^*, y^*) \geqslant \varphi(x^*, y), \forall y \in K(x^*), y^* \in K(x^*)$,则 (x^*, y^*) 为此单主多从博弈的 Nash 均衡点.

定义 1[6] 设 X 和 Y 为 2 个 Hausdorff 拓扑空间,$P_0(Y)$ 为 Y 中所有非空子集的集合,$F: X \to P_0(Y)$ 为一个集值映射,则

(i) 称集值映射 F 在 x 处是上半连续的,如果对 Y 中任意开集 G,$F(x) \subset G$,存在 x 的开邻域 $O(x)$,使得 $\forall x' \in O(x)$,有 $F(x') \subset G$;

(ii) 称集值映射 F 在 x 处是下半连续的,如果对 Y 中任意开集 G,$G \cap F(x) \neq \varnothing$,存在 x 的开邻域 $O(x)$,使得 $\forall x' \in O(x)$,有 $G \cap F(x') \neq \varnothing$;

(iii) 称集值映射 F 在 x 处是连续的,如果集值映射 F 在 x 处既上半连续又下半连续;称集值映射 F 在 X 是连续的,如果集值映射 F 在每一点 $x \in X$ 处都是连续的.

定义 2[17] 设 X 为拓扑空间,f 是定义在 X 上的实值函数,则

(i) 称 f 在 $y_0 \in X$ 处是上伪连续的,如果对所有的 $y \in X$,使得 $f(y_0) < f(y)$,有

$$\lim_{x \to y_0} \sup f(x) < f(y),$$

称 f 是 X 上的上伪连续函数,如果 f 对于 X 上的每一点 $y_0 \in X$ 都是上伪连续的;

(ii) 称 f 在 $y_0 \in X$ 处是下伪连续的,如果 $-f$ 在 $y_0 \in X$ 处是上伪连续的;称 f 是 X 上的下伪连续函数,如果 f 对于 X 上的每一点 $y_0 \in X$ 都是下伪连续的;

(iii) 称 f 是伪连续函数,如果 f 既是上伪连续函数又是下伪连续函数.

注 1 由定义 2 可以看出,上半连续函数一定是上伪连续函数;下半连续函数一定是下伪连续函数,反之不一定成立,如例 1 所示.

例 1 设 $X = [0,3]$,函数 $f_i: X \to \mathbf{R}(i = 1,2)$ 定义如下:

$$f_1(x) = \begin{cases} -x, 0 \leqslant x < 2, \\ -3, 2 \leqslant x \leqslant 3, \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 0.5x + 1, 0 \leqslant x < 2, \\ 3, \quad 2 \leqslant x \leqslant 3. \end{cases}$$

容易验证 f_1 在 $x = 2$ 处是上伪连续的,但不是上半连续的,f_2 在 $x = 2$ 处是下伪连续的,但不是下半连续的.

为了证明伪连续条件下主从博弈均衡点的存在性定理,下面给出需要用到的引理.

引理 1[17] 设 X、Y 为 Hausdorff 拓扑空间的非空子集,f 是定义在 $X \times Y$ 上的实值函数,若 f 在 $X \times Y$ 上是伪连续的,Y 是紧的,集值映射 $M: X \to 2^Y$ 为

$$M(x) = \{y \in Y \mid f(x, y) = \sup_{u \in Y} f(x, u)\},$$

则 $M(x)$ 有闭图和非空值.

引理 2[6] (Fan-Glicksberg 不动点定理) 设 X 是 Hausdorff 局部凸线性拓扑空间 E 中的非空凸紧集,集值映射 $F: X \to P_0(X)$ 满足:$\forall x \in X$,$F(x)$ 为非空凸紧集且在 X 上是上半连续的,则 $\exists x^* \in X$,使得 $x^* \in F(x^*)$.

引理 3[18] 设 X 和 $Y_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 都是度量空间,若集值映射 $F_i: X \to P_0(Y_i)$ 在 X 上是上半连续的,且 $\forall x \in X$,$F_i(x)$ 都是非空紧集$(i = 1, 2, \cdots, n)$,则集值映射 $F: X \to P_0(Y)$ 在 X 上必是上半连续的,其中 $Y = \prod\limits_{i=1}^{n} Y_i, \forall x \in X, F(x) = \prod\limits_{i=1}^{n} F_i(x)$.

引理 4[6] 设 X 和 Y 是 2 个 Hausdorff 拓扑空间,而 Y 是紧空间,若集值映射 $F: X \to P_0(Y)$ 是闭的,则 F 在 X 上必是上半连续的.

引理 5[17] 设 N 人非合作博弈 $\Gamma = (Y_i, f_i)_{i \in I}$,$\forall i \in I$,$Y_i$ 是 Hausdorff 局部凸拓扑向量空间中的非空凸紧子集,若函数 f_i 在 $Y = \prod\limits_{i=1}^{N} Y_i$ 上是伪连续的,且 $\forall u_i \in Y_i, \forall y_{-i} \in Y_{-i}, u_i \to f_i(u_i, y_{-i})$ 是拟凹的,则博弈 Γ 至少存在 1 个 Nash 均衡点.

引理 6[6] 设 X 是度量空间中的一个非空紧集,函数 $f: X \to \mathbf{R}$,则

(i) 若 f 在 X 上是上伪连续的,则 f 在 X 上必有上界,且达到其最大值;

(ii) 若 f 在 X 上是下伪连续的,则 f 在 X 上必有下界,且达到其最小值;

(iii) 若 f 在 X 上是伪连续的,则 f 在 X 上既有上界又有下界,且分别达到其最大值和最小值.

2 一类主从博弈 Nash 均衡点的存在性

在主从博弈模型中,领导者首先做出自己的策略 x,N 个跟随者在知道 x 后做出自己的策略

$y=(y_i,y_{-i})$，其中 $y=(y_i,y_{-i})$ 是下层跟随者博弈的 Nash 均衡，$\forall x\in X$，$\forall i\in I$，定义含有领导者策略参数 x 的跟随者的 Nash 均衡点集值映射 $K:X\to 2^Y$ 为

$$K(x)=\{y\in Y\mid f_i(x,y_i,y_{-i})=\max_{u_i\in Y_i}f_i(x,u_i,y_{-i})\}.$$

定理 1　设 X 和 Y_i 是 Hausdorff 拓扑向量空间中的非空凸紧子集，$\forall i\in I$，$f_i:X\times Y\to\mathbf{R}$ 是伪连续的，且 $\forall(x,y_{-i})\in X\times Y_{-i}$，$u_i\to f_i(x,u_i,y_{-i})$ 在 Y_i 上是拟凹的，则对含有领导者策略参数 x 的跟随者的 Nash 均衡点集值映射 K 为上半连续紧值映射.

证　$\forall x\in X$，由引理 5 可得 $K(x)\neq\varnothing$，因为 X 和 Y_i 是 Hausdorff 拓扑向量空间中的非空凸紧子集，$\forall i\in I$，$f_i:X\times Y\to\mathbf{R}$ 是伪连续的，由引理 1 可得 Graph(K) 有闭图，且拥有非空紧值，所以由引理 4 可知 K 是上半连续的，即 K 为上半连续紧值映射.

定理 2　设 X 和 Y_i 是 Hausdorff 拓扑向量空间中的非空凸紧子集，若下列条件成立：

(i) $\varphi:X\times Y\to\mathbf{R}$ 在 $X\times Y$ 上是上半连续的；

(ii) $\forall i\in I$，$f_i:X\times Y\to\mathbf{R}$ 在 $X\times Y$ 上是伪连续的；

(iii) $\forall x\in X$，$\forall y_{-i}\in Y_{-i}$，$u_i\to f_i(x,u_i,y_{-i})$ 在 Y_i 上是拟凹的，

则主从博弈的 Nash 均衡点必存在.

证　首先定义一个函数 $V:X\to\mathbf{R}$，$V(x)=\max_{y\in K(x)}\varphi(x,y)$. 因为 $\varphi:X\times Y\to\mathbf{R}$ 在 $X\times Y$ 上是上半连续的，由定理 1 知，集值映射 $K:X\to 2^Y$ 是上半连续的，且 $K(x)$ 是紧的，据文献[9]中的定理 17.31(Berge 极大值定理)，$V(x)=\max_{y\in K(x)}\varphi(x,y)$ 必是上半连续的，由文献[6]知，$\exists x^*\in X$，使得 $V(x^*)=\max_{x\in X}V(x)$，取 $y^*\in K(x^*)$，使得 $\varphi(x^*,y^*)=V(x^*)$，则 $\forall y\in K(x^*)$，有 $\varphi(x^*,y^*)\geqslant\varphi(x^*,y)$，即 (x^*,y^*) 为主从博弈的 Nash 均衡点.

定理 3　设 X 和 Y_i 是 Hausdorff 拓扑向量空间中的非空凸紧子集，$\varphi:X\times Y\to\mathbf{R}$ 在 $X\times Y$ 上是伪连续的，$\forall i\in I$，$f_i:X\times Y\to\mathbf{R}$ 在 $X\times Y$ 上是伪连续的，且 $\forall x\in X$，$\forall y_{-i}\in Y_{-i}$，$u_i\to f_i(x,u_i,y_{-i})$ 在 Y_i 上是拟凹的，则主从博弈的 Nash 均衡点必存在.

证　$\forall i\in I$，定义集值映射 $T_i:X\times Y_{-i}\to 2^{Y_i}$，即

$$T_i(x,y_{-i})=\{y_i\in Y_i\mid\varphi(x,y_i,y_{-i})=\max_{(u_i,y_{-i})\in K(x)}\varphi(x,u_i,y_{-i})\}.$$

首先证明 $\forall i\in I$，集值映射 T_i 是非空凸值.

因为 X 是非空紧集，由引理 5 知，$K(x)\neq\varnothing$，且 φ 是伪连续的，所以根据引理 6 知 $T_i(x,y_{-i})\neq\varnothing$. $\forall y_i^1,y_i^2\in T_i(x,y_{-i})$，$\forall t\in(0,1)$，因为 Y_i 是凸集，所以 $ty_i^1+(1-t)y_i^2\in Y_i$. 又因为 $\forall x\in X$，$\forall y_{-i}\in Y_{-i}$，$u_i\to f_i(x,u_i,y_{-i})$ 在 Y_i 上是拟凹的，所以 $\varphi(x,ty_i^1+(1-t)y_i^2,y_{-i})\geqslant\min\{\varphi(x,y_i^1,y_{-i}),\varphi(x,y_i^2,y_{-i})\}=\max_{(u_i,y_{-i})\in K(x)}\varphi(x,u_i,y_{-i})$. 所以有 $\varphi(x,ty_i^1+(1-t)y_i^2,y_{-i})=\max_{(u_i,y_{-i})\in K(x)}\varphi(x,u_i,y_{-i})$，即 $ty_i^1+(1-t)y_i^2\in T_i(x,y_{-i})$，故 $\forall i\in I$，集值映射 T_i 是非空凸值.

其次证明 $\forall i\in I$，集值映射 T_i 是上半连续的.

设 $T_i(x,y_{-i})=K(x)\cap G(x,y_{-i})$，其中 $G(x,y_{-i})=\{y_i\in Y_i\mid\varphi(x,y_i,y_{-i})=\max_{u_i\in Y_i}\varphi(x,u_i,y_{-i})\}$. 由于 φ 是伪连续的，根据引理 1 可知，Graph$(G(x,y_{-i}))$ 有闭图和非空值. 又因为 K 是上半连续的，且 $K(x)$ 是紧的，由文献[6]可知，T_i 是上半连续的，从而 T_i 是非空凸紧集且上半连续的.

最后定义集值映射 $T:X\times Y\to 2^{X\times Y}$ 为

$$T(x,y)=\prod_{i=1}^{N}T_i(x,y_{-i}),$$

由引理 3 知，集值映射 $T(x,y)$ 是上半连续的，且拥有非空紧值. 由引理 2 知，$\exists(x^*,y^*)\in X\times Y$，使得 $(x^*,y^*)\in T(x^*,y^*)$. 所以 $\forall i\in I$，有

$$\varphi(x^*,y_i^*,y_{-i}^*)=\max_{(u_i,y_{-i}^*)\in K(x^*)}\varphi(x^*,u_i,y_{-i}^*).$$

故 (x^*,y^*) 是主从博弈的 Nash 均衡点.

3　一类主从博弈 Nash 均衡点的本质连通区

设 Ω 是一个“非线性问题”空间，$\forall\lambda\in\Omega$，λ 表示一个非线性问题，$X\times Y$ 表示“解”空间，问题 λ 的解都在 $X\times Y$ 中，$E:\Omega\to P_0(X\times Y)$ 是一个集值映射，$\forall\lambda\in\Omega$，$E(\lambda)\subset X\times Y$ 表示非线性问题 λ 的解的全体，假定 $E(\lambda)\neq\varnothing$.

为了给出主从博弈 Nash 均衡解的本质连通区，下面给出相应的概念，主要来自文献[6].

定义 3　$\forall\lambda\in\Omega$，$(x,y)\in E(\lambda)$，如果对 (x,y) 的任一开邻域 $O(x,y)$，都存在一个关于 λ 的开邻域 $U(\lambda)$，使得 $\forall\lambda'\in U(\lambda)$，$\exists(x',y')\in E(\lambda')$，且 $(x',y')\in O(x,y)$，则称 (x,y) 是非线性问题 λ 的本质解. 非线性问题 λ 是弱本质的，如果 $\exists(x,y)\in E(\lambda)$，使得 (x,y) 是 λ 的本质解. 非线性问题 λ 是本质的，如果 $\forall(x,y)\in E(\lambda)$，$(x,y)$ 都是 λ 的本质解.

定义 4　$\forall\lambda\in\Omega$，设 $e(\lambda)$ 是 $E(\lambda)$ 的一个非空

闭子集,对 $X \times Y$ 中任一开邻域 U,其中 $e(\lambda) \subset U$,若 $\exists \delta > 0$,使得 $\forall \lambda' \in \Omega$,当 $d(\lambda,\lambda') < \delta$ 时,有 $E(\lambda') \cap U \neq \varnothing$,则称 $e(\lambda)$ 是 $E(\lambda)$ 中的本质集.

定义5 $\forall \lambda \in \Omega,(x,y) \in E(\lambda)$,若 $E(\lambda)$ 中存在包含解 (x,y) 的连通子集 $C(\lambda)$,则 $C(\lambda)$ 被称为 $E(\lambda)$ 的连通区.

若 $E(\lambda)$ 是紧集,则 $E(\lambda)$ 可以分解成有限或无限个两两不相交的连通区的并集,即 $E(\lambda) = \bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} C_\alpha$,其中 Λ 是指标集,$\forall \alpha \in \Lambda$,$C_\alpha$ 都是 $E(\lambda)$ 中的非空连通紧子集,且 $\forall \alpha,\beta \in \Lambda(\alpha \neq \beta)$,$C_\alpha \cap C_\beta \neq \varnothing$.

定义6 若 $E(\lambda)$ 中存在一个连通区 $C_\alpha(\lambda)$,并且 $C_\alpha(\lambda)$ 是 $E(\lambda)$ 中的本质集,则称 $C_\alpha(\lambda)$ 是 $E(\lambda)$ 中的一个本质连通区.

$\forall i \in I$,设 X 和 Y_i 是 Hausdorff 局部凸拓扑空间中的非空凸紧子集,$\Omega = \{\lambda:\lambda$ 满足定理3的条件$\}$. 定义博弈 λ 的最佳回应集值映射

$$M_i(x,y_{-i}) = \{y_i \in Y_i \mid \varphi(x,y_i,y_{-i}) = \max_{(u_i,y_{-i}) \in K(x)} \varphi(x,u_i,y_{-i})\}.$$

由定理3的证明可知,$M(x,y) = \prod\limits_{i=1}^{N} M_i(x,y_{-i})$ 具有非空凸紧性且是上半连续的.

$\forall \lambda_1,\lambda_2 \in \Omega$,定义

$$\rho(\lambda_1,\lambda_2) = \sup_{x \in X} h(M_1(x),M_2(x)),$$

其中 h 是 $X \times Y$ 上的 Hausdorff 距离,M_1、M_2 分别表示 λ_1 和 λ_2 的最佳回应映射,故有 M_1、$M_2 \in \Omega$ 且 $\rho(\lambda_1,\lambda_2) = \rho(M_1,M_2)$ 成立,显然,(Ω,ρ) 是一个度量空间.

$\forall \lambda \in \Omega$,$E(\lambda)$ 表示所有主从博弈 Nash 均衡点组成的集合,由定理3可知 $E(\lambda) \neq \varnothing$.

引理7 $\forall \lambda \in \Omega$,$E(\lambda) = S(M)$,其中 M 是博弈 λ 的最佳回应映射,$S(M)$ 表示 M 的所有不动点组成的集合.

引理8[20] $\forall F \in D$,F 至少存在1个关于 D 的本质连通区.

引理9[21] 设 X,Y,Z 是3个度量空间,$F:X \to 2^Y$ 是一个 usco 映射,$G:Z \to 2^Y$ 是一个集值映射,存在连续映射 $T:Z \to X$,使得 $\forall z \in Z$ 有 $G(z) = F(T(z))$,则

(i) G 是一个 usco 映射;

(ii) 若 $\forall x \in X$,$F(x)$ 至少存在1个本质连通区,则 $\forall z \in Z$,$G(z)$ 至少存在1个本质连通区.

定理4 集值映射 $E:\Omega \to P_0(X \times Y)$ 是上半连续紧值映射.

证 首先,$E(\lambda)$ 是非空紧集. 用反证法证明. 若集值映射 $E:\Omega \to P_0(X \times Y)$ 不是上半连续的,则 $\exists \lambda_0 \in \Omega$,$E$ 在 λ_0 不是上半连续的,从而存在 $X \times Y$ 中的开集 O,$E(\lambda_0) \subset O$,$\exists \lambda^m \in \Omega$,$\lambda^m \to \lambda_0$,$(x^m,y^m) \in E(\lambda_0)$,使得 $(x^m,y^m) \notin O$.

由于 $X \times Y$ 是紧的,不妨设 $(x^m,y^m) \to (x_0,y_0)$,因为 $(x^m,y^m) \notin O$,O 是开集,所以 $(x_0,y_0) \notin O$,从而 $(x_0,y_0) \notin E(\lambda_0)$,则 $\exists y_1 \in Y$,使得

$$\varphi_0(x_0,y_0) < \varphi_0(x_0,y_1).$$

若 $\exists \varphi_0(x,y)$,使得

$$\varphi_0(x_0,y_0) < \varphi_0(x,y) < \varphi_0(x_0,y_1),$$

由于 φ_0 是 $X \times Y$ 上的伪连续函数,有

$$\limsup_{(x^m,y^m) \to (x_0,y_0)} \varphi_0(x^m,y^m) < \liminf_{(x^m,y^m) \to (x_0,y_1)} \varphi_0(x^m,y^m), \quad (1)$$

所以 $\exists H_1,H_2 \in \sigma_X(x)$,$I \in \sigma_Y(y)$,以及 y_1 的开邻域 J(这里 $\sigma_X(x)$ 表示 x 的所有开邻域组成的集合,$\sigma_Y(y)$ 表示 y 的所有开邻域组成的集合),使得

$$\varphi_0(x^{m_1},y^{m_1}) < \varphi_0(x^{m_2},y^{m_2}),$$

其中 $x^{m_1} \in H_1$,$y^{m_1} \in I$,$x^{m_2} \in H_2$,$y^{m_2} \in J$.

设 $H_3 = H_1 \cap H_2$,则 $\exists x^m \in H_3$,$y^m \in Y$,使得 $y^m \in K(x^m) \cap I$,所以有 $\varphi_0(x^m,y^m) < \varphi_0(x^m,y^{m_2})$ 对 $y^{m_2} \in J$ 成立,这与 $(x^m,y^m) \in E(\lambda^m)$ 矛盾.

若 $\forall (x,y) \in X \times Y$,$\varphi_0$ 在 $[\varphi_0(x_0,y_0),\varphi_0(x_0,y_1)]$ 中取不到任何值,由 φ_0 是 $X \times Y$ 上的上伪连续函数,有

$$\limsup_{(x^m,y^m) \to (x_0,y_0)} \varphi_0(x^m,y^m) \leqslant \varphi_0(x_0,y_0) < \varphi_0(x_0,y_1).$$

又因为 φ_0 是下伪连续的,同理可得(1)式. 同上类似证明可得集值映射 $E:\Omega \to P_0(X \times Y)$ 是上半连续的. 故集值映射 $E:\Omega \to P_0(X \times Y)$ 是一个上半连续紧值映射.

定理5 $\forall \lambda \in \Omega$,$E(\lambda)$ 至少存在1个关于 Ω 的本质连通区.

证 由定理4知,E 是一个上半连续紧值映射,再由引理8及引理9知,结论成立.

4 结论

本文首先给出主从博弈的一般模型,再根据伪连续的概念,借鉴文献[6,17]的方法,给出了在伪连续条件下主从博弈均衡解的存在性定理,这是对主从博弈中均衡点存在性的推广. 更重要的是本文从最佳回应拓扑的角度证明了此类主从博弈存在 Nash 均衡点集的本质连通区,给出了主从博弈 Nash

均衡点稳定性方面的一些新结果.

5 参考文献

[1] Stackelberg H V. The theory of the market economy [M]. Oxford: Oxford University Press，1952: 97-105.
[2] 梅生伟，魏韡. 智能电网环境下主从博弈模型及应用实例 [J]. 系统科学与数学，2014，34(11): 1331-1344.
[3] 赵晗萍，蒋家东，冯允成. 基于 GA-RL 的进化博弈求解主从博弈结构的供应链协调问题 [J]. 系统工程理论与实践，2010，30(4): 667-672.
[4] Julien L A. On noncooperative oligopoly equilibrium in the multiple leader-follower game [J]. European Journal of Operational Research，2017，256(2): 650-662.
[5] 俞建. 博弈论选讲 [M]. 北京: 科学出版社，2014.
[6] 俞建. 博弈论与非线性分析 [M]. 北京: 科学出版社，2008.
[7] 杨哲，蒲勇健. 不确定性下多主从博弈中均衡的存在性 [J]. 控制与决策，2012，27(5): 736-740.
[8] 杨哲，蒲勇健. 单主多从博弈中中级社会 Nash 均衡的存在性与应用 [J]. 系统科学与数学，2013，33(7): 777-784.
[9] 王晓，郧冬华. 主从博弈的轻微利他平衡点 [J]. 应用数学与计算数学学报，2015，29(4): 479-485.
[10] 邓喜才，左羽. 有限理性与一类多主从博弈问题的良定性 [J]. 经济数学，2012，29(3): 16-19.
[11] Yu Jian，Wang Honglei. An existence theorem of equilibrium points for multi-leader-follower games [J]. Nonlinear Analysis，2008，69(5/6): 1775-1777.
[12] Jia Wensheng，Xiang Shuwen，He Jihao，et al. Existence and stability of weakly Pareto-Nash equilibrium for generalized multi objective multi-leader-follower games [J]. J Glob Optim，2015，61(2): 397-405.
[13] Yang Zhe，Ju Yan. Existence and generic stability of cooperative equilibria for multi-leader-multi-follower games [J]. J Glob Optim，2016，65(3): 563-573.
[14] Zeng Jing，Zhang Wenyan. Existence and Levitin-Polyak well-posedness for a class of generalized multiobjective multi-leader-follower games [J]. Pacific Journal of Optimization，2016，12(4): 717-726.
[15] Pang Jongshi，Fukushima M. Quasi-variational inequalities，generalized Nash equilibria，and multi-leader-follower games [J]. Comput Manag Sci，2005，2(1): 21-56.
[16] 左勇华. 约束形式下广义最大元 Nash 均衡的存在性 [J]. 经济数学，2016，33(1): 65-67.
[17] Morgan J，Scalzo V. Pseudocontinuous functions and existence of Nash equilibria [J]. Journal of Mathematical Economics，2007，43(2): 174-183.
[18] 俞建. 有限理性与博弈论中平衡点集的稳定性 [M]. 北京: 科学出版社，2017.
[19] Aliprantis C D，Border K C. Infinite dimensional analysis [M]. Berlin: Springer，1999.
[20] Yu Jian，Yang Hui，Xiang Shuwen. Unified approach to existence and stability of essential components [J]. Nonlinear Analysis Theory Methods and Applications，2005，63(5): 2415-2425.
[21] 俞建，陈国强，向淑文，等. 本质连通区的存在性与稳定性 [J]. 应用数学学报，2004，27(2): 201-209.

The Existence and Stability of Nash Equilibrium Points for Single-Leader-Multi-Follower Games

CAI Jianghua，JIA Wensheng*，LIU Luping
(School of Mathematics and Statistics，Guizhou University，Guiyang Guizhou 550025，China)

Abstract: Aiming at the leader-follower game between single leader and multiple followers，the existence of Nash equilibrium point for single-leader-multi-follower games is proved by using the Berge maximum theorem and the Fan-Glicksberg fixed point theorem under the weak condition，and some of the new results have promotion and improvement. In terms of the stability of equilibrium point，it is proved from the viewpoint of best response topology that the single-leader-multi-follower games have the essential components of the Nash equilibrium point sets.

Key words: leader-follower games; Nash equilibrium points; pseudo continuous; essential component; quasi concave

(责任编辑: 曾剑锋)