文章编号:1000-5862(2019)04-0331-05

整函数与解析函数的最大模 $M(r,f)$ 及其导函数 $M'(r,f)$ 增长性比较

涂　金[1],吕凤恒[1],江　杰[2]

(1. 江西师范大学数学与信息科学学院,江西 南昌　330022;2. 景德镇学院信息工程系,江西 景德镇　333000)

摘要: 利用整函数和单位圆内解析函数的级与型,研究了解析函数与整函数最大模 $M(r,f)$ 与其导函数 $M'(r,f)$ 之间的增长关系,并在一定条件下研究了单位圆解析函数精确型的存在性.

关键词: 整函数;解析函数;最大模;级;型

中图分类号: O 174.52　　**文献标志码:** A　　**DOI:** 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2019.04.01

0　引言

本文使用大家熟悉的 Nevanlianna 值分布理论的标准记号[1-3],用 $M(r,f) = \max\limits_{|z|=r}|f(z)|$ 表示整函数或解析函数 $f(z)$ 在圆周 $|z| = r$ 上的最大模,用 $\sigma(f)$、$\mu(f)$ 分别表示整函数 $f(z)$ 的增长级、下级,用 $\rho(f)$、$\lambda(f)$ 分别表示单位圆内解析函数 $f(z)$ 的最大模增长级、下级. 整函数以及单位圆内解析函数的最大模 $M(r,f)$ 是用来刻画它们增长级、型的重要指标. 由文献[4]或[5]知,对于有限级超越整函数 $f(z)$ 以及它的导函数 $f'(z)$ 之间的最大模,$M(r,f)$ 与 $M(r,f')$ 之间的增长关系有一个经典的结果,即 $\lim\limits_{r\to\infty}\log M(r,f')/\log M(r,f) = 1$,但整函数或单位圆内解析函数的最大模函数 $M(r,f)$ 与其关于 r 的导函数 $M'(r,f)$ 之间具有怎样的增长关系呢?这方面的研究结果比较少,由于 $M(r,f)$ 是关于 r 的递增函数,由单调函数是几乎处处可导的这一结论可得,$M'(r,f)$ 在 $r\in(0,+\infty)$ 或 $(0,1)$ 上几乎处处存在,且由文献[4]知

$$\log M(r,f) - \log M(r_0,f) = \int_{r_0}^{r}\frac{\omega(t)}{t}\mathrm{d}t, \tag{1}$$

其中 $\omega(r)$ 是关于 r 的正增函数,由(1)式可得

$$M'(r,f)/M(r,f) = \omega(r)/r, \tag{2}$$

由(2)式知可根据 $f(z)$ 的增长性以及 $\omega(r)$ 的增长性来研究 $M'(r,f)/M(r,f)$ 的增长性.

文献[6-7]研究了整函数和单位圆中解析函数最大模 $M(r,f)$ 与导函数 $M'(r,f)$ 的增长关系,得到了如下结果.

定理 A[6]　设 $f(z)$ 是单位圆内的解析函数,最大模增长级和下级分别为 $\rho(f) = \rho < +\infty$ 和 $\lambda(f) = \lambda > 0$,则有

$$\varliminf_{r\to 1^-}\frac{(1-r)M'(r,f)}{M(r,f)\log M(r,f)} \leqslant \lambda \leqslant \rho \leqslant \varlimsup_{r\to 1^-}\frac{(1-r)M'(r,f)}{M(r,f)\log M(r,f)}.$$

定理 B[7]　假设 $f(z)$ 是整函数满足增长级 $\sigma(f) = \sigma(0 < \sigma < +\infty)$ 和型 $0 \leqslant \underline{\tau}(f) = \underline{\tau} \leqslant \tau(f) = \tau < \infty$,$\omega(r)$ 是(1)式中的函数,若

$$\varliminf_{r\to\infty}\omega(r)/r^{\sigma} = \beta,\ \varlimsup_{r\to\infty}\omega(r)/r^{\sigma} = \alpha,$$

则有 $\beta \leqslant \underline{\tau}\sigma \leqslant \tau\sigma \leqslant \alpha$.

由以上 2 个定理以及(2)式可得如下推论.

推论 A　设 $f(z)$ 是单位圆内的解析函数,如果

$$\varliminf_{r\to 1^-}\frac{(1-r)M'(r,f)}{M(r,f)\log M(r,f)} = \varlimsup_{r\to 1^-}\frac{(1-r)M'(r,f)}{M(r,f)\log M(r,f)},$$

则 $\mu(f) = \rho(f)$.

推论 B　假设 $f(z)$ 是整函数满足增长级 $\sigma(f) = \sigma(0 < \sigma < +\infty)$ 和型 $0 \leqslant \underline{\tau}(f) = \underline{\tau} \leqslant \tau(f) = \tau < \infty$,$\omega(r)$ 是(1)式中的函数,则有

$$\varliminf_{r\to\infty}M'(r,f)/(r^{\sigma-1}M(r,f)) = \varliminf_{r\to\infty}\omega(r)/r^{\sigma} \leqslant \sigma\underline{\tau} \leqslant$$

收稿日期:2018-10-12

基金项目:国家自然科学基金(11561031),江西省自然科学基金(20161BAB201020)和江西省教育厅基金(GJJ151331,GJJ14272)资助项目.

作者简介:涂　金(1979-),男,江西鹰潭人,教授,博士,主要从事复分析研究. E-mail:tujin2008@sina.com

$$\sigma\tau \leqslant \varlimsup_{r\to\infty}\omega(r)/r^{\sigma} = \varlimsup_{r\to\infty}M'(r,f)/(r^{\sigma-1}M(r,f)).$$

特别地，

若 $\varliminf\limits_{r\to\infty}\omega(r)/r^{\sigma} = \varlimsup\limits_{r\to\infty}\omega(r)/r^{\sigma}$，则有 $\underline{\tau}(f) = \tau(f)$.

在以上 2 个定理的基础上，引入整函数以及单位圆内解析函数的增长级和型的定义，以便继续研究解析函数和整函数 $f(z)$ 的最大模函数 $M(r,f)$ 与 $M'(r,f)$ 之间的增长关系，先回顾一些基本的定义.

定义 1[1-3] 整函数 $f(z)$ 的增长级和下级分别定义为

$$\sigma(f) = \varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log\log M(r,f)}{\log r},\ \mu(f) = \varliminf_{r\to\infty}\frac{\log\log M(r,f)}{\log r}.$$

定义 2[5] 若整函数 $f(z)$ 增长级满足 $0<\sigma(f)=\sigma<\infty$，则整函数 $f(z)$ 的型和下型分别定义为

$$\tau(f) = \varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log M(r,f)}{r^{\sigma}},\ \underline{\tau}(f) = \varliminf_{r\to\infty}\frac{\log M(r,f)}{r^{\sigma}}.$$

定义 3[8-9] 整函数 $f(z)$ 的对数增长级和下级分别定义为

$$\sigma_{\log}(f) = \varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log\log M(r,f)}{\log\log r},\ \mu_{\log}(f) = \varliminf_{r\to\infty}\frac{\log\log M(r,f)}{\log\log r}.$$

定义 4[10-11] 单位圆内解析函数 $f(z)$ 的最大模增长级和下级分别定义为

$$\rho(f) = \varlimsup_{r\to 1^-}\frac{\log\log M(r,f)}{-\log(1-r)},\ \lambda(f) = \varliminf_{r\to 1^-}\frac{\log\log M(r,f)}{-\log(1-r)}.$$

定义 5[12] 若单位圆内解析函数 $f(z)$ 的最大模增长级满足 $0<\rho(f)=\rho<+\infty$，则 $f(z)$ 的型和下型分别定义为

$$\tau(f) = \varlimsup_{r\to 1^-}\frac{\log M(r,f)}{(1-r)^{-\rho}},\ \underline{\tau}(f) = \varliminf_{r\to 1^-}\frac{\log M(r,f)}{(1-r)^{-\rho}}.$$

定义 6[13] 单位圆内解析函数 $f(z)$ 的最大模对数增长级和下级分别定义为

$$\rho_{\log}(f) = \varlimsup_{r\to 1^-}\frac{\log\log M(r,f)}{\log(-\log(1-r))},$$

$$\lambda_{\log}(f) = \varliminf_{r\to 1^-}\frac{\log\log M(r,f)}{\log(-\log(1-r))}.$$

定义 7[14] 若单位圆内解析函数 $f(z)$ 满足 $\varlimsup\limits_{r\to 1^-}\log M(r,f)/(-\log(1-r)) \leqslant \beta$，则称 $f(z)$ 为次数不超过 β 的解析函数.

1 结果 1 及其证明

定理 1 设 $f(z)$ 为单位圆内的解析函数，

(i) 若最大模增长级和型满足 $0<\rho(f)=\rho<+\infty$ 且 $0\leqslant\underline{\tau}=\underline{\tau}(f)\leqslant\tau(f)=\tau<+\infty$，则有

$$\varliminf_{r\to 1^-}\frac{(1-r)^{\rho+1}M'(r,f)}{M(r,f)} = \varliminf_{r\to 1^-}(1-r)^{\rho+1}\omega(r) \leqslant$$

$$\rho\underline{\tau} \leqslant \rho\tau \leqslant \varlimsup_{r\to 1^-}(1-r)^{\rho+1}\omega(r) = \varlimsup_{r\to 1^-}\frac{(1-r)^{\rho+1}M'(r,f)}{M(r,f)};$$

特别地，若

$$\varliminf_{r\to 1^-}\frac{(1-r)^{\rho+1}M'(r,f)}{M(r,f)} = \varlimsup_{r\to 1^-}\frac{(1-r)^{\rho+1}M'(r,f)}{M(r,f)},$$

则 $\underline{\tau}=\tau$;

(ii) 若 $\varlimsup\limits_{r\to 1^-}\dfrac{(1-r)M'(r,f)}{M(r,f)}=\beta$，则 $f(z)$ 为次数不超过 β 的解析函数.

证 (i) 由(1)式易得 $\varlimsup\limits_{r\to 1^-}(1-r)^{\rho+1}\omega(r) = \varlimsup\limits_{r\to 1^-}(1-r)^{\rho+1}M'(r,f)/M(r,f)$，设此上极限为 B，由上极限定义可得，$\forall\varepsilon>0$，$\exists r_0>0$，当 $r_0<r<1$ 时，有

$$(1-r)^{\rho+1}M'(r,f)/M(r,f) < B+\varepsilon,$$

即

$$M'(r,f)/M(r,f) < (B+\varepsilon)(1-r)^{-\rho-1}. \tag{3}$$

当 $0<t_0<r<t<1$ 时，在(3)式两边积分可得

$$\int_{t_0}^{t}\frac{M'(r,f)}{M(r,f)}\mathrm{d}r < \int_{t_0}^{t}(B+\varepsilon)(1-r)^{-\rho-1}\mathrm{d}r.$$

由上式可得

$$\log M(t,f)-\log M(t_0,f) < (B+\varepsilon)[1/(1-t)^{\rho} - 1/(1-t_0)^{\rho}]/\rho, \tag{4}$$

在(4)式两边同除以 $(1/(1-t))^{\rho}$，令 $t\to 1^-$ 两边取上极限可得 $\tau\leqslant B/\rho$，即 $\rho\tau\leqslant B$. 另一方面，设

$$\varliminf_{r\to 1^-}\frac{(1-r)^{\rho+1}M'(r,f)}{M(r,f)} = A,$$

则由下极限定义可得，$\forall\varepsilon>0$，$\exists r_0>0$，当 $r_0<r<1$ 时，有

$$(1-r)^{\rho+1}M'(r,f)/M(r,f) > A-\varepsilon,$$

即

$$M'(r,f)/M(r,f) > (A-\varepsilon)(1-r)^{-\rho-1}, \tag{5}$$

令 $0<t_0<r<t<1$，在(5)式两边积分可得

$$\int_{t_0}^{t}\frac{M'(r,f)}{M(r,f)}\mathrm{d}r > \int_{t_0}^{t}(A-\varepsilon)(1-r)^{-\rho-1}\mathrm{d}r,$$

在上式两边同除以 $(1-t)^{-\rho}$，令 $t\to 1^-$ 两边取下极限可得 $\underline{\tau}\geqslant A/\rho$，即 $\underline{\tau}\rho\geqslant A$. 故结论(i)得证.

(ii) 由上极限定义可得，$\forall\varepsilon>0$，$\exists r_0>0$，当 $r_0<r<1$ 时，有

$$\frac{M'(r,f)}{M(r,f)} < \frac{\beta+\varepsilon}{1-r}, \tag{6}$$

当 $0<t_0<r<t<1$ 时，在(6)式两边积分可得

$$\int_{t_0}^{t}\frac{M'(r,f)}{M(r,f)}\mathrm{d}r < \int_{t_0}^{t}\frac{\beta+\varepsilon}{1-r}\mathrm{d}r,$$

由上式可得

$$\log M(t,f) - \log M(t_0,f) < -(\beta+\varepsilon)(\ln(1-t) - \ln(1-t_0)), \quad (7)$$

在(7)式两边同除以 $-\ln(1-t)$，令 $t\to 1^-$ 两边取上极限，由定义 7 可得，$f(z)$ 为次数不超过 β 的解析函数.

定理 2　设 $f(z)$ 是单位圆内的解析函数，最大模对数增长级和下级分别满足 $\rho_{\log}(f) = \rho_{\log} < +\infty$ 和 $\lambda_{\log}(f) = \lambda_{\log} > 0$，则有

$$\varliminf_{r\to 1^-}\frac{-(1-r)\log(1-r)M'(r,f)}{M(r,f)\log M(r,f)} \leqslant \lambda_{\log} \leqslant \rho_{\log} \leqslant \varlimsup_{r\to 1^-}\frac{-(1-r)\log(1-r)M'(r,f)}{M(r,f)\log M(r,f)}.$$

证　设

$$\varlimsup_{r\to 1^-}\frac{-(1-r)\log(1-r)M'(r,f)}{M(r,f)\log M(r,f)} = B_1,$$

则由上极限定义可得，$\forall\varepsilon>0$，$\exists r_0>0$，当 $r_0<r<1$ 时，有

$$\frac{M'(r,f)}{M(r,f)\log M(r,f)} < \frac{B_1+\varepsilon}{-(1-r)\log(1-r)}, \quad (8)$$

当 $0<t_0<r<t<1$ 时，在(8)式两边积分可得

$$\int_{t_0}^{t}\frac{M'(r,f)}{M(r,f)\log M(r,f)}\mathrm{d}r < \int_{t_0}^{t}\frac{B_1+\varepsilon}{-(1-r)\log(1-r)}\mathrm{d}r,$$

由上式可得

$$\log\log M(t,f) - \log\log M(t_0,f) < (B_1+\varepsilon)\cdot[\log(-\log(1-t)) - \log((-\log(1-t_0))], \quad (9)$$

在(9)式两边同除以 $\log(-\log(1-t))$，令 $t\to 1^-$ 两边取上极限可得 $\rho_{\log}(f) \leqslant B_1$.

同理可证

$$\varliminf_{r\to 1^-}\frac{-(1-r)\log(1-r)M'(r,f)}{M(r,f)\log M(r,f)} \leqslant \lambda_{\log}.$$

定理 3　设 $f(z)$ 是整函数，满足

(i) 增长级和下级分别为 $0<\sigma(f)=\sigma<+\infty$，$\mu(f)=\mu>0$，则有

$$\varliminf_{r\to\infty} rM'(r,f)/(M(r,f)\log M(r,f)) \leqslant \mu \leqslant \sigma \leqslant \varlimsup_{r\to\infty} rM'(r,f)/(M(r,f)\log M(r,f));$$

(ii) $\varlimsup_{r\to\infty} rM'(r,f)/M(r,f) = \beta_1$，则 $f(z)$ 为次数不超过 β_1 的多项式.

证　令 $\varlimsup_{r\to\infty}\dfrac{rM'(r,f)}{M(r,f)\log M(r,f)} = B_2$，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists r_0>0$，当 $r>r_0$ 时，有

$$\frac{rM'(r,f)}{M(r,f)\log M(r,f)} < B_2+\varepsilon, \quad (10)$$

当 $0<t_0<r<t$ 时，在(10)式两边积分可得

$$\int_{t_0}^{t}\frac{M'(r,f)}{M(r,f)\log M(r,f)}\mathrm{d}r < \int_{t_0}^{t}\frac{B_2+\varepsilon}{r}\mathrm{d}r,$$

由上式可得

$$\log\log M(t,f) - \log\log M(t_0,f) < (B_2+\varepsilon)(\log t - \log t_0). \quad (11)$$

在(11)式两边同除以 $\log t$，令 $t\to\infty$ 两边取上极限得

$$\sigma = \varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log\log M(t,f)}{\log t} \leqslant B_2.$$

同理可证

$$\varliminf_{r\to\infty}\frac{M'(r,f)}{M(r,f)\log M(r,f)} \leqslant \mu.$$

(ii) 由 $\varlimsup_{r\to\infty} rM'(r,f)/M(r,f) = \beta_1$ 以及(i)中的证明方法可得 $\varlimsup_{r\to\infty}\log M(r,f)/\log r \leqslant \beta_1$，故 $f(z)$ 为次数不超过 β_1 的多项式.

定理 4　设 $f(z)$ 是整函数，最大模对数增长级和下级分别满足 $\sigma_{\log}(f) = \sigma_{\log} < +\infty$ 和 $\mu_{\log}(f) = \mu_{\log} > 0$，则有

$$\varliminf_{r\to\infty} r\log rM'(r,f)/(M(r,f)\log M(r,f)) \leqslant \mu_{\log} \leqslant \sigma_{\log} \leqslant \varlimsup_{r\to\infty} r\log rM'(r,f)/(M(r,f)\log M(r,f)).$$

证　设 $\varlimsup_{r\to\infty}\dfrac{r\log rM'(r,f)}{M(r,f)\log M(r,f)} = B_3$，则由上极限定义可得，$\forall\varepsilon>0$，$\exists r_0>0$，当 $r>r_0$ 时，有

$$\frac{M'(r,f)}{M(r,f)\log M(r,f)} < \frac{B_3+\varepsilon}{r\log r}, \quad (12)$$

当 $0<t_0<r<t$ 时，在(12)式两边积分可得

$$\int_{t_0}^{t}\frac{M'(r,f)}{M(r,f)\log M(r,f)}\mathrm{d}r < \int_{t_0}^{t}\frac{B_3+\varepsilon}{r\log r}\mathrm{d}r,$$

由上式可得

$$\log\log M(t,f) - \log\log M(t_0,f) < (B_3+\varepsilon)(\log\log t - \log\log t_0), \quad (13)$$

在(13)式两边同除以 $\log\log t$，令 $t\to\infty$ 两边取上极限可得 $\sigma_{\log}(f) \leqslant B_3$.

同理可证 $\varliminf_{r\to\infty}\dfrac{r\log rM'(r,f)}{M(r,f)\log M(r,f)} \leqslant \mu_{\log}$.

2　结果 2 及其证明

整函数和单位圆上解析函数的精确级和精确型也是描述函数增长的重要工具，有很多这方面的研究成果[6-7,15-18]. 下面回顾一下整函数和单位圆内解析函数的精确级和精确型的定义.

定义 8[7,15]　假设 $f(z)$ 是整函数满足增长级 $0<\sigma(f)=\sigma<+\infty$，$\rho(r)$ 为定义在 $(r_0,+\infty)$ 上

的连续、分段光滑的实函数且满足以下条件:

(i) $\lim\limits_{r\to\infty}\rho(r)=\rho(0<\rho<+\infty)$;

(ii) $\lim\limits_{r\to\infty}r\rho'(r)\log r=0$,其中$\rho'(r)$在它的某些间断点为左导数或右导数;

(iii) $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\log M(r,f)/r^{\rho(r)}=\alpha(0<\alpha<+\infty)$,

则称$\rho(r)$为整函数$f(z)$的精确级.

定义9[7] 假设$f(z)$是整函数满足增长级$0<\sigma(f)=\sigma<+\infty$和型$\tau(f)=\tau<+\infty$,若$\tau(r)$为定义在$(r_0,+\infty)$上的连续、分段光滑的实函数且满足以下条件:

(i) $\lim\limits_{r\to\infty}\tau(r)=\tau$;

(ii) $\lim\limits_{r\to\infty}r\tau'(r)=0$,其中$\tau'(r)$在它的某些间断点为左导数或右导数;

(iii) $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}M(r,f)/\exp\{r^{\rho}\tau(r)\}=1$,

则称$\tau(r)$为整函数$f(z)$的精确型.

定义10[8] 设$f(z)$是单位圆内的解析函数,最大模增长级满足$0<\rho(f)=\rho<+\infty$,$\rho(r)$为定义在$(0,1)$上的连续、分段光滑的实函数且满足以下条件:

(i) $\lim\limits_{r\to1^-}\rho(r)=\rho(0<\rho<+\infty)$;

(ii) $\lim\limits_{r\to1^-}-(1-r)\rho'(r)\log(1-r)=0$,其中$\rho'(r)$在它的某些间断点为左导数或右导数;

(iii) $\overline{\lim\limits_{r\to1^-}}\log M(r,f)/(1-r)^{-\rho(r)}=\alpha(0<\alpha<+\infty)$,

则称$\rho(r)$为解析函数$f(z)$的精确级.

定义11[11] 设$f(z)$是单位圆内的解析函数,满足最大模增长级$0<\rho(f)=\rho<+\infty$和型$\tau(f)=\tau<+\infty$,$\tau(r)$为定义在$(0,1)$上的连续、分段光滑的实函数且满足以下条件:

(i) $\lim\limits_{r\to1^-}\tau(r)=\tau$;

(ii) $\lim\limits_{r\to1^-}(1-r)\tau'(r)=0$,其中$\tau'(r)$在它的某些间断点为左导数或右导数;

(iii) $\overline{\lim\limits_{r\to1^-}}M(r,f)/\exp\{(1-r)^{-\rho}\tau(r)\}=1$,

则称$\tau(r)$为解析函数$f(z)$的精确型.

定理C 假设$f(z)$是单位圆内的解析函数,最大模增长级满足$0<\rho(f)=\rho<+\infty$,若

$$\underline{\lim\limits_{r\to1^-}}\frac{(1-r)M'(r,f)}{M(r,f)\log M(r,f)}=\overline{\lim\limits_{r\to1^-}}\frac{(1-r)M'(r,f)}{M(r,f)\log M(r,f)},$$

则$\log(\alpha\log M(r,f))/(-\log(1-r))$是$f(z)$的精确级,其中$0<\alpha<+\infty$是常数.

定理D 假设$f(z)$是整函数满足增长级$0<\sigma(f)=\sigma<+\infty$和型$0<\tau(f)=\tau<+\infty$,且$\omega(r)$是(1)式中的函数.若极限$\lim\limits_{r\to\infty}\omega(r)/r^{\sigma}$存在,则$\log M(r,f)/r^{\sigma}$是$f(z)$的精确型.

将定理C和定理D推广得到

定理5 假设$f(z)$是整函数满足增长级$0<\sigma(f)=\sigma<+\infty$,若

$$\underline{\lim\limits_{r\to\infty}}\frac{rM'(r,f)}{M(r,f)\log M(r,f)}=\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\frac{rM'(r,f)}{M(r,f)\log M(r,f)},\tag{14}$$

则$\log(\alpha\log M(r,f))/\log r$是$f(z)$的精确级,其中$0<\alpha<+\infty$是常数.

证 设$\rho(r)=\log(\alpha\log M(r,f))/\log r$,由于$\log M(r,f)$为定义在$(r_0,+\infty)$上的连续、严格单调递增的函数,故在$(r_0,+\infty)$上几乎处处可微,至多除去可数多个不可微的点,因此$\rho(r)$在$(r_0,+\infty)$上连续,且在这些不可微点组成的相邻的开区间是分段光滑的,由条件(14)以及定理3可得$f(z)$是正则增长的,故$\rho(r)$满足条件(i)和条件(iii),下面验证$\rho(r)$满足条件(ii),对$\rho(r)$求导可得

$$\rho'(r)=\frac{M'(r,f)}{M(r,f)\log M(r,f)\log r}-\frac{\log(\alpha\log M(r,f))}{r(\log r)^2},$$

$$r\rho'(r)\log r=\frac{rM'(r,f)}{M(r,f)\log M(r,f)}-\frac{\log(\alpha\log M(r,f))}{\log r},$$

再由条件(14)以及定理3可得$\lim\limits_{r\to\infty}r\rho'(r)\log r=0$,故条件(ii)得到满足,定理5得证.

定理6 假设$f(z)$是单位圆内的解析函数,最大模增长级满足$0<\rho(f)=\rho<+\infty$和型$0<\tau(f)=\tau<+\infty$,且$\omega(r)$由(1)式给出,若极限$\lim\limits_{r\to1^-}\omega(r)(1-r)^{\rho+1}$存在,则$(1-r)^{\rho}\log M(r,f)$是$f(z)$的精确型.

证 设$T(r)=(1-r)^{\rho}\log M(r,f)$,则$T(r)$为定义在$(0,1)$上的连续、分段光滑的实函数.由于极限$\lim\limits_{r\to1^-}\omega(r)(1-r)^{\rho+1}/r$存在,不妨设为$A$,由定理1可得

$$\lim\limits_{r\to1^-}T(r)=\lim\limits_{r\to1^-}(1-r)^{\rho}\log M(r,f)=A/\rho=\tau,\tag{15}$$

故条件(i)和条件(iii)得到满足.又由于$T(r)$在$[0,1)$上处处可微,则对$T(r)$求导可得

$$T'(r)=-\rho(1-r)^{\rho-1}\log M(r,f)+(1-r)^{\rho}M'(r,f)/M(r,f)=-\rho(1-r)^{\rho-1}\log M(r,f)+(1-r)^{\rho}\omega(r)/r,$$

则有

$$(1-r)T'(r)=-\rho(1-r)^{\rho}\log M(r,f)+(1-r)^{\rho+1}\omega(r)/r.\tag{16}$$

由(15)~(16)式可得

$$\lim\limits_{r\to1^-}(1-r)T'(r)=-\rho\lim\limits_{r\to1^-}(1-r)^{\rho}\log M(r,f)+\lim\limits_{r\to1^-}(1-r)^{\rho+1}\omega(r)/r=-\rho A/\rho+A=0.$$

故条件(ii)得到满足,因此$T(r)=(1-r)^{\rho}\log M(r,

$f)$ 为解析函数 $f(z)$ 的精确型.

3 参考文献

[1] 杨乐. 值分布理论及其新研究 [M]. 北京: 科学出版社,1982.

[2] 仪洪勋,杨重骏. 亚纯函数唯一性理论 [M]. 北京: 科学出版社,1995.

[3] Hayman W. Meromorphic functions [M]. Oxford: Clarendon Press,1964.

[4] Valiron G. Lectures on the general theory of integral functions [M]. New York: Chelsea,1949.

[5] 何育赞,萧修治. 代数体函数与常微分方程 [M]. 北京: 科学出版社,1988.

[6] Kasana H S. Some properties of proximate orders for analytic functions [J]. Math BalkanicaL: New Series,1989,3(1): 29-33.

[7] Srivastava R S L,Juneja O P. On proximate type of entire functions [J]. Compositio Mathematica,1967,18(1/2): 7-12.

[8] Peter Chern T Y. On the maximum modulus and the zeros of a transcendental entire function of finite logarithmic order [J]. Bull Hong Kong Math Soc,1999,2(2): 271-277.

[9] Peter Chern T Y. On meromorphic functions with finite logarithmic order [J]. Trans Am Math Soc,2006,358(2): 473-489.

[10] Tsuji M. Potential theory in modern function theory [M]. Tokyo: Maruzen Press,1959.

[11] Juneja O P,Kapoor G P. Analytic functions-growth aspects [M]. Boston: Pitman Adv Publ Comp,1985.

[12] 涂金,黄海霞,徐洪焱. 单位圆内亚纯函数与解析函数的级与型 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版,2013,36(1): 1-4.

[13] Heittokangas J,Wen Zhitao. Functions of finite logarithmic order in the unit disc: Part II [J]. Comput Methods Funct Theory,2015,15(1): 37-58.

[14] Chen Zongxuan,Shon K H. The growth of solutions of differential equations with coefficients of small growth in the unit disc [J]. J Math Anal Appl,2004,297(1): 285-304.

[15] Shah S M. On proximate orders of integral functions [J]. Bull Amer Math Soc,1946,52(12): 326-328.

[16] Earl J P. Note on the construction of proximate orders [J]. J London Math Soc,1968,43(1): 695-698.

[17] Myshakov F S,Popov A Y. A refinement of Goldberg′s theorem on estimating the type with respect to a proximate order of an entire function of integer order [J]. Sbornik: Math,2015,206(12): 1771-1796.

[18] Alzugaray M T. On the proximate order of growth of generating functions of Pólya frequency sequences [J]. Comput Methods Funct Theory,2001,1(2): 433-455.

The Comparison on the Growth of the Maximum Moduli $M(r,f)$ and Its Derivative Function $M'(r,f)$ of Entire Function and Analytic Function

TU Jin[1],LYU Fengheng[1],JIANG Jie[2]

(1. College of Mathematics and Informatics,Jiangxi Normal University,Nanchang Jiangxi 330022,China;

2. School of Information Engineering,Jingdexhen University,Jingdezhen Jiangxi 333000,China)

Abstract: In this paper,the growth relationship between the maximum moduli $M(r,f)$ and its derivative function $M'(r,f)$ is investigated by the order and type of entire function and analytic function in the unit disc,where $f(z)$ is an entire function or analytic function in the unit disc. And the existence of proximate type of analytic function in the unit disc is studied under some conditions.

Key words: entire function; analytic function; maximum moduli; order; type

(责任编辑: 王金莲)