第 43 卷 第 4 期 江西师范大学学报(自然科学版) Vol. 43 No. 4
2019 年 7 月 Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science) Jul. 2019

文章编号:1000-5862(2019)04-0336-07

齐次与非齐次复线性复合函数方程亚纯解的增长性

陈海莹,郑秀敏*

(江西师范大学数学与信息科学学院,江西 南昌 330022)

摘要: 运用亚纯函数的 Nevanlinna 值分布理论,研究了一类齐次与非齐次复线性复合函数方程亚纯函数解的增长性,并推广至更一般的含微分的复线性复合函数方程的情形. 当这些方程允许有多项系数具有最大级或最大下级时,在一定条件下得到了这些方程非零亚纯解的级或下级的下界的估计.

关键词: 复线性复合函数方程;亚纯函数;(下)级;(下)型

中图分类号: O 174.52 **文献标志码:** A **DOI:** 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2019.04.02

0 引言与结果

本文采用亚纯函数 Nevanlinna 值分布理论的标准记号[1-4],并约定所讨论的整函数和亚纯函数均是复平面 C 上的函数. 设 $f(z)$ 为非常数亚纯函数,将 $f(z)$ 的级、下级和超级分别记为 $\sigma(f)$、$\mu(f)$ 和 $\sigma_2(f)$,它们的定义[3] 如下

$$\sigma(f) = \varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log^+ T(r,f)}{\log r},$$

$$\mu(f) = \varliminf_{r\to\infty}\frac{\log^+ T(r,f)}{\log r},$$

$$\sigma_2(f) = \varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log^+\log^+ T(r,f)}{\log r},$$

其中 $T(r,f)$ 为 $f(z)$ 的特征函数. 又当 $f(z)$ 为超越亚纯函数且分别满足 $0<\sigma(f)<\infty$ 和 $0<\mu(f)<\infty$ 时,分别用 $\tau(f)$ 和 $\underline{\tau}(f)$ 表示 $f(z)$ 的型和下型,它们的定义[4-6] 如下

$$\tau(f) = \varlimsup_{r\to\infty}\frac{T(r,f)}{r^{\sigma(f)}},\ \underline{\tau}(f) = \varliminf_{r\to\infty}\frac{T(r,f)}{r^{\mu(f)}}.$$

近 20 年来,由于 Nevanlinna 理论的引入,关于复差分和差分方程亚纯解的性质的研究又重新成为了热点. 特别是在这期间,涌现了大量关于复差分方程亚纯解的增长性问题的理论成果[7-15],其中蒋翼迈等[7] 研究了一类复线性差分方程亚纯解的增长性,并得到了方程解的增长级的下界的估计,这是一个公认的好结果. 随后,Laine-Yang[8] 对文献[7]的结果进行了改进,在允许多个系数具有最大级的情况下得到了相应结果.

定理 A[8] 设 $A_i(z)$ $(i=0,1,\cdots,n)$ 为有限级整函数,w_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 为互不相同的非零复常数,且在这些具有最大级 $\sigma=\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n}\{\sigma(A_i)\}$ 的系数中仅有一项具有最大型,则方程

$$A_n(z)f(z+w_n)+\cdots+A_1(z)f(z+w_1)+A_0(z)f(z)=0 \tag{1}$$

的每个非零亚纯解 $f(z)$ 满足 $\sigma(f)\geqslant\sigma+1$.

随后,刘凯等[9] 将上述结果推广至复线性 q-平移差分方程,得到了相应结果. 在文献[9]的基础上,涂金等[10] 进一步推广了复线性 q-平移差分方程,讨论了更一般的复线性方程

$$A_n(z)f(P_n(z))+\cdots+A_1(z)f(P_1(z))+A_0(z)f(P_0(z))=0, \tag{2}$$

得到了如下结果.

定理 B[10] 设 $P_i(z)$ $(i=0,1,\cdots,n)$ 是次数为 $m(\geqslant 1)$ 的多项式,其首项系数为 $q_i\in C\backslash\{0\}$ $(i=0,1,\cdots,n)$. 设 $A_i(z)$ $(i=0,1,\cdots,n)$ 为整函数,且存在整数 $l(0\leqslant l\leqslant n)$ 使得 $\max\{\sigma(A_i),i=0,1,\cdots,n,i\neq l\}<\sigma(A_l)$. 若 $f(z)$ 为方程(2)的非零亚纯解,则 $\sigma(f)\geqslant\sigma(A_l)/m$.

最近,王珺等[11] 在齐次方程(2)的基础上进一步考虑了非齐次方程

$$A_n(z)f(P_n(z))+\cdots+A_1(z)f(P_1(z))+A_0(z)f(P_0(z))=F(z), \tag{3}$$

收稿日期:2018-10-16

基金项目:国家自然科学基金(11761035)和江西省自然科学基金(20171BAB201002)资助项目.

通信作者:郑秀敏(1980-),女,江西上饶人,副教授,博士,主要从事复分析研究. E-mail:zhengxiumin2008@sina.com

得到了如下结果.

定理 C[11] 设 $A_i(z)(i=0,1,\cdots,n)$,$F(z)$ 为有限级亚纯函数,$P_i(z)=q_iz^{k_i}+\cdots(i=0,1,\cdots,n)$ 是次数至少为1的多项式,其首项系数 $q_i(i=0,1,\cdots,n)$ 均不为0,$k=\max\{k_i,i=0,1,\cdots,n\}$.若存在整数 $l(0\leqslant l\leqslant n)$ 使得 $\sigma=\max\{\sigma(F),\sigma(A_i),i=0,1,\cdots,n,i\neq l\}<\sigma(A_l)$,则方程(3)的任意非零亚纯解 $f(z)$ 必满足 $\sigma(f)\geqslant\sigma(A_l)/k$.

定理 D[11] 设 $A_i(z)(i=0,1,\cdots,n)$,$F(z)$ 为有限级亚纯函数,$P_i(z)=q_iz^{k_i}+\cdots(i=0,1,\cdots,n)$ 是次数至少为1的多项式,其首项系数 $q_i(i=0,1,\cdots,n)$ 均不为0,$k=\max\{k_i,i=0,1,\cdots,n\}$.若存在整数 $l(0\leqslant l\leqslant n)$ 使得

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\sum\limits_{i\neq l}T(r,A_i)+T(r,F)}{T(r,A_l)}<1,\tag{4}$$

则方程(3)的任意非零亚纯解 $f(z)$ 必满足 $\sigma(f)\geqslant\sigma(A_l)/k$.

定理 E[11] 设 $A_i(z)(i=0,1,\cdots,n)$,$F(z)$ 为有限级亚纯函数,$P_i(z)=q_iz^{k_i}+\cdots(i=0,1,\cdots,n)$ 是次数至少为1的多项式,其首项系数 $q_i(i=0,1,\cdots,n)$ 均不为0,$k=\max\{k_i,i=0,1,\cdots,n\}$.若存在整数 $l(0\leqslant l\leqslant n)$ 使得 $\sigma=\max\{\sigma(F),\sigma(A_i),i=0,1,\cdots,n,i\neq l\}<\mu(A_l)<\infty$,且方程(3)的非零亚纯解 $f(z)$ 满足 $\sigma_2(f)<1/k^2$,则必有 $\mu(f)\geqslant\mu(A_l)/k$.

注意到,在定理B,定理C,定理E中,方程(2)或(3)的系数中仅有一项具有最大(下)级,而其他系数的级严格小于该项系数的(下)级;而在定理A和定理D中,则允许方程(1)或(3)的系数中有多项具有最大级,并进一步引入关于"型"的条件或条件(4),从而得到相应结果.受上述结果的启发,下面对定理B、C、E中的条件进行改进,在齐次方程(2)和非齐次方程(3)2种情形下考虑方程亚纯解的级和下级的下界,主要结果如下.

首先,考虑方程(2)和(3)的亚纯解的级的下界,得到定理1和定理2.

定理1 设 $A_i(z)(i=0,1,\cdots,n)$ 为有限级亚纯函数,$P_i(z)=q_iz^{k_i}+\cdots(i=0,1,\cdots,n)$ 为非常数多项式,满足首项系数 $q_i\in C\backslash\{0\}(i=0,1,\cdots,n)$,且 $k=\max\{k_i,i=0,1,\cdots,n\}$.若存在整数 $l(0\leqslant l\leqslant n)$ 使得 $\max\{\sigma(A_i),i=0,1,\cdots,n,i\neq l\}\leqslant\sigma(A_l)(0<\sigma(A_l)<\infty)$ 且 $n\max\{\tau(A_i):\sigma(A_i)=\sigma(A_l),i=0,1,\cdots,n,i\neq l\}<\tau(A_l)(<\infty)$,则方程(2)的任意非零亚纯解 $f(z)$ 必满足 $\sigma(f)\geqslant\sigma(A_l)/k$.

定理2 设 $A_i(z)(i=0,1,\cdots,n)$,$F(z)(\neq 0)$ 为有限级亚纯函数,$P_i(z)=q_iz^{k_i}+\cdots(i=0,1,\cdots,n)$ 为非常数多项式,满足首项系数 $q_i\in C\backslash\{0\}(i=0,1,\cdots,n)$,且 $k=\max\{k_i,i=0,1,\cdots,n\}$.若存在整数 $l(0\leqslant l\leqslant n)$ 使得 $\max\{\sigma(A_i),i=0,1,\cdots,n,i\neq l,\sigma(F)\}\leqslant\sigma(A_l)(0<\sigma(A_l)<\infty)$ 且 $(n+1)\max\{\tau(A_i),\tau(F):\sigma(A_i)=\sigma(A_l),i=0,1,\cdots,n,i\neq l,\sigma(F)=\sigma(A_l)\}<\tau(A_l)(<\infty)$,则方程(3)的任意亚纯解 $f(z)$ 必满足 $\sigma(f)\geqslant\sigma(A_l)/k$.

特别地,当定理1和定理2中的系数为有限级整函数时,上述结果显然成立.类似地,还得到以下推论1和推论2,其中整函数 $f(z)$ 的M-型和M-下型分别定义为

$$\tau_M(f)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log M(r,f)}{r^{\sigma(f)}}(0<\sigma(f)<\infty),$$

$$\underline{\tau}_M(f)=\underline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log M(r,f)}{r^{\mu(f)}}(0<\mu(f)<\infty).$$

推论1 设 $A_i(z)(i=0,1,\cdots,n)$ 为有限级整函数,$P_i(z)=q_iz^{k_i}+\cdots(i=0,1,\cdots,n)$ 为非常数多项式,满足首项系数 $q_i\in C\backslash\{0\}(i=0,1,\cdots,n)$,且 $k=\max\{k_i,i=0,1,\cdots,n\}$.若存在整数 $l(0\leqslant l\leqslant n)$ 使得 $\max\{\sigma(A_i),i=0,1,\cdots,n,i\neq l\}\leqslant\sigma(A_l)(0<\sigma(A_l)<\infty)$ 且 $n\max\{\tau_M(A_i):\sigma(A_i)=\sigma(A_l),i=0,1,\cdots,n,i\neq l\}<\tau_M(A_l)(<\infty)$,则方程(2)的任意非零亚纯解 $f(z)$ 必满足 $\sigma(f)\geqslant\sigma(A_l)/k$.

推论2 设 $A_i(z)(i=0,1,\cdots,n)$,$F(z)(\neq 0)$ 为有限级整函数,$P_i(z)=q_iz^{k_i}+\cdots(i=0,1,\cdots,n)$ 为非常数多项式,满足首项系数 $q_i\in C\backslash\{0\}(i=0,1,\cdots,n)$,且 $k=\max\{k_i,i=0,1,\cdots,n\}$.若存在整数 $l(0\leqslant l\leqslant n)$ 使得 $\max\{\sigma(A_i),i=0,1,\cdots,n,i\neq l,\sigma(F)\}\leqslant\sigma(A_l)(0<\sigma(A_l)<\infty)$ 且 $(n+1)\max\{\tau_M(A_i),\tau_M(F):\sigma(A_i)=\sigma(A_l),i=0,1,\cdots,n,i\neq l,\sigma(F)=\sigma(A_l)\}<\tau_M(A_l)(<\infty)$,则方程(3)的任意亚纯解 $f(z)$ 必满足 $\sigma(f)\geqslant\sigma(A_l)/k$.

其次,考虑方程(2)和(3)的亚纯解的下级的下界,得到定理3和定理4.

定理3 设 $A_i(z)$,$P_i(z)(i=0,1,\cdots,n)$ 如同定理1中所定义的.若存在整数 $l(0\leqslant l\leqslant n)$ 使得

$\max\{\sigma(A_i), i=0,1,\cdots,n, i\neq l\}\leqslant\mu(A_l)(0<\mu(A_l)<\infty)$ 且 $n\max\{\tau(A_i):\sigma(A_i)=\mu(A_l), i=0,1,\cdots,n, i\neq l\}<\underline{\tau}(A_l)(<\infty)$,且方程(2)的任意非零亚纯解 $f(z)$ 满足 $\sigma_2(f)<1/k^2$,则必有 $\mu(f)\geqslant\mu(A_l)/k$.

定理 4 设 $A_i(z), P_i(z)(i=0,1,\cdots,n)$, $F(z)(\not\equiv 0)$ 如同定理 2 中所定义的. 若存在整数 l $(0\leqslant l\leqslant n)$ 使得 $\max\{\sigma(A_i), i=0,1,\cdots,n, i\neq l, \sigma(F)\}\leqslant\mu(A_l)(0<\mu(A_l)<\infty)$ 且 $(n+1)\max\{\tau(A_i),\tau(F):\sigma(A_i)=\mu(A_l), i=0,1,\cdots,n, i\neq l, \sigma(F)=\mu(A_l)\}<\underline{\tau}(A_l)(<\infty)$,且方程(3)的亚纯解 $f(z)$ 满足 $\sigma_2(f)<1/k^2$,则必有 $\mu(f)\geqslant\mu(A_l)/k$.

类似于推论 1 和推论 2,容易得到在定理 3 和定理 4 中当系数为整函数且考虑 M-型和 M-下型时相应的推论,此处略去具体的表达.

接下来,在定理 D 的基础上进一步研究方程(2)和(3)的亚纯解的下级的下界,得到定理 5.

定理 5 设 $A_i(z)(i=0,1,\cdots,n)$, $F(z)$ 为有限级亚纯函数,$P_i(z)=q_iz^{k_i}+\cdots(i=0,1,\cdots,n)$ 为非常数多项式,满足首项系数 $q_i\in C\backslash\{0\}(i=0,1,\cdots,n)$,且 $k=\max\{k_i, i=0,1,\cdots,n\}$. 若存在整数 $l(0\leqslant l\leqslant n)$ 使得条件(4)成立,且方程(3)的非零亚纯解 $f(z)$ 满足 $\sigma_2(f)<1/k^2$,则必有 $\mu(f)\geqslant\mu(A_l)/k$.

进一步地,考虑含微分的复线性方程

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}A_{ij}(z)f^{(j)}(P_i(z))=0,\qquad(5)$$

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}A_{ij}(z)f^{(j)}(P_i(z))=F(z),\qquad(6)$$

当系数满足类似于定理 1 ~ 定理 4 中的条件时,得到关于方程(5)和(6)的亚纯解的级和下级的下界的如下估计.

定理 6 设 $A_{ij}(z)(i=0,1,\cdots,n, j=0,1,\cdots,m)$ 为有限级亚纯函数,$P_i(z)=q_iz^{k_i}+\cdots(i=0,1,\cdots,n)$ 为非常数多项式,满足首项系数 $q_i\in C\backslash\{0\}(i=0,1,\cdots,n)$,且 $k=\max\{k_i, i=0,1,\cdots,n\}$. 若存在整数 $l(0\leqslant l\leqslant n)$ 使得 $\max\{\sigma(A_{ij}), i=0,1,\cdots,n, j=0,1,\cdots,m, (i,j)\neq(l,0)\}\leqslant\sigma(A_{l0})(0<\sigma(A_{l0})<\infty)$ 且 $[(n+1)(m+1)-1]\max\{\tau(A_{ij}):\sigma(A_{ij})=\sigma(A_{l0}), (i,j)\neq(l,0)\}<\tau(A_{l0})(<\infty)$,则方程(5)的任意非零亚纯解 $f(z)$ 必满足 $\sigma(f)\geqslant\sigma(A_l)/k$.

定理 7 设 $A_{ij}(z)(i=0,1,\cdots,n, j=0,1,\cdots,m)$, $F(z)(\not\equiv 0)$ 为有限级亚纯函数,$P_i(z)=q_iz^{k_i}+\cdots(i=0,1,\cdots,n)$ 为非常数多项式,满足首项系数 $q_i\in C\backslash\{0\}(i=0,1,\cdots,n)$,且 $k=\max\{k_i, i=0,1,\cdots,n\}$. 若存在整数 $l(0\leqslant l\leqslant n)$ 使得 $\max\{\sigma(A_{ij}), i=0,1,\cdots,n, j=0,1,\cdots,m, (i,j)\neq(l,0), \sigma(F)\}\leqslant\sigma(A_{l0})(0<\sigma(A_{l0})<\infty)$ 且 $(n+1)(m+1)\max\{\tau(A_{ij}),\tau(F):\sigma(A_{ij})=\sigma(A_{l0}), (i,j)\neq(l,0), \sigma(F)=\sigma(A_{l0})\}<\tau(A_{l0})(<\infty)$,则方程(6)的任意亚纯解 $f(z)$ 必满足 $\sigma(f)\geqslant\sigma(A_l)/k$.

定理 8 设 $A_{ij}(z), P_i(z)(i=0,1,\cdots,n, j=0,1,\cdots,m)$ 如同定理 6 中所定义的. 若存在整数 $l(0\leqslant l\leqslant n)$ 使得 $\max\{\sigma(A_{ij}), i=0,1,\cdots,n, j=0,1,\cdots,m, (i,j)\neq(l,0)\}\leqslant\mu(A_{l0})(0<\mu(A_{l0})<\infty)$ 且 $[(n+1)(m+1)-1]\max\{\tau(A_{ij}):\sigma(A_{ij})=\mu(A_{l0}), (i,j)\neq(l,0)\}<\underline{\tau}(A_{l0})(<\infty)$,且方程(5)的非零亚纯解 $f(z)$ 满足 $\sigma_2(f)<1/k^2$,则必有 $\mu(f)\geqslant\mu(A_{l0})/k$.

定理 9 设 $A_{ij}(z), P_i(z)(i=0,1,\cdots,n, j=0,1,\cdots,m)$, $F(z)(\not\equiv 0)$ 如同定理 7 中所定义的. 若存在整数 $l(0\leqslant l\leqslant n)$ 使得 $\max\{\sigma(A_{ij}), i=0,1,\cdots,n, j=0,1,\cdots,m, (i,j)\neq(l,0), \sigma(F)\}\leqslant\mu(A_{l0})$ $(0<\mu(A_{l0})<\infty)$ 且 $(n+1)(m+1)\max\{\tau(A_{ij}),\tau(F):\sigma(A_{ij})=\mu(A_{l0}), (i,j)\neq(l,0), \sigma(F)=\mu(A_{l0})\}<\underline{\tau}(A_{l0})(<\infty)$,且方程(6)的亚纯解 $f(z)$ 满足 $\sigma_2(f)<1/k^2$,则必有 $\mu(f)\geqslant\mu(A_{l0})/k$.

注 1 定理 3 ~ 定理 5 和定理 8 ~ 定理 9 中的条件"$\sigma_2(f)<1/k^2$"是必不可少的.

注 2 文献[10]中的例 2.2 同时适用于本文中的齐次方程情形下的定理 1、定理 3、定理 5、定理 6、定理 8 和推论 1,说明这些结果是精确的,即结果中的不等号"≥"可能取到等号"="也可能取到严格的不等号">". 类似地,容易构造非齐次方程情形下的例子,此处略去.

1 定理证明所需的引理

引理 1[12] 设 $g(z)=cz^n+p_{n-1}z^{n-1}+\cdots+p_0$ 为非常数多项式. 若亚纯函数 $f(z)$ 满足 $\sigma_2(f)<1/n^2$,则 $T(r,f\circ g)=(1+o(1))T(|c|r^n,f)$ 当 $r\to\infty$ 时成立,至多除去一个有限对数测度的例外集.

引理 2[16]　设 $p\in \mathbf{N}_+$，亚纯函数 $f(z)$ 满足 $0<\sigma_p(f)<\infty$ 和 $0<\tau_p(f)<\infty$，则 $\forall\beta(0<\beta<\tau_p(f))$，存在一个无限对数测度的集合 H，使得当 $r\in H$ 且 $r\to\infty$ 时，有 $T(r,f)>\exp_{p-1}\{\beta r^{\sigma_p(f)}\}$.

引理 3[1]　设亚纯函数 $f(z)$ 的下级有限，则 $\forall\varepsilon(>0)$，存在一个无限对数测度的集合 H，使得当 $r\in H$ 且 $r\to\infty$ 时，有 $T(r,f)<r^{\mu(f)+\varepsilon}$.

2　定理的证明

本节记集合 $E\subset(1,+\infty)$ 且满足 $\int_E\frac{\mathrm{d}r}{r}<\infty$，记集合 $H\subset(1,+\infty)$ 且满足 $\int_H\frac{\mathrm{d}r}{r}=\infty$，并约定集合 E 和 H 每次出现可不必相同.

定理 1 的证明　记 $\sigma_1=\max\{\sigma(A_i),i=0,1,\cdots,n,i\neq l\}$，$\tau_1=\max\{\tau(A_i):\sigma(A_i)=\sigma(A_l),i=0,1,\cdots,n,i\neq l\}$，则 $\sigma_1\leqslant\sigma(A_l)$，$n\tau_1<\tau(A_l)$. 从而，对充分小的 $\varepsilon(>0)$，当 $r\to\infty$ 时，有

$$T(r,A_i)\leqslant\begin{cases}r^{\sigma(A_l)-\varepsilon}, & \sigma(A_i)<\sigma(A_l),\\ (\tau_1+\varepsilon)r^{\sigma(A_l)}, & \sigma(A_i)=\sigma(A_l),i\neq l.\end{cases}\qquad(7)$$

设 $f(z)$ 为方程(2)的非零亚纯解. 若 $\sigma(f)=\infty$，则结论显然成立. 接下来，仅考虑 $\sigma(f)<\infty$ 的情形. 显然，$\sigma_2(f)=0<1/k^2$，则由引理 1 可知，当 $r\notin E$ 且 $r\to\infty$ 时，有

$$T(r,f(P_i(z)))=(1+o(1))T(|q_i|r^{k_i},f)\leqslant 2T(qr^k,f)\ (i=0,1,\cdots,n),\qquad(8)$$

其中 $q=\max\{|q_i|,i=0,1,\cdots,n\}$. 又由亚纯函数的级的定义易知，$\forall\varepsilon(>0)$，当 $r\to\infty$ 时，有

$$T(qr^k,f)\leqslant(qr^k)^{\sigma(f)+\varepsilon}=q^{\sigma(f)+\varepsilon}r^{k\sigma(f)+k\varepsilon}.\qquad(9)$$

从而，由(8)式和(9)式可知，$\forall\varepsilon(>0)$，当 $r\notin E$ 且 $r\to\infty$ 时，有

$$T(r,f(P_i(z)))\leqslant 2q^{\sigma(f)+\varepsilon}r^{k\sigma(f)+k\varepsilon}(i=0,1,\cdots,n).\qquad(10)$$

将方程(2)改写为

$$-A_l(z)=A_n(z)\frac{f(P_n(z))}{f(P_l(z))}+\cdots+A_{l+1}(z)\frac{f(P_{l+1}(z))}{f(P_l(z))}+A_{l-1}(z)\frac{f(P_{l-1}(z))}{f(P_l(z))}+\cdots+A_0(z)\frac{f(P_0(z))}{f(P_l(z))},\qquad(11)$$

并对(11)式左右两边同时取特征函数，结合特征函数的性质得到

$$T(r,A_l)\leqslant\sum_{i\neq l}T(r,A_i)+\sum_{i\neq l}T(r,f(P_i(z)))+nT(r,f(P_l(z)))+O(1).\qquad(12)$$

反设 $k\sigma(f)<\sigma(A_l)$，则由(7)式，(10)式和(12)式可知，对充分小的 $\varepsilon(0<\varepsilon<\min\{(\sigma(A_l)-k\sigma(f))/(k+1),(\tau(A_l)-n\tau_1)/(n+1)\})$，当 $r\notin E$ 且 $r\to\infty$ 时，有

$$T(r,A_l)\leqslant nr^{\sigma(A_l)-\varepsilon}+n(\tau_1+\varepsilon)r^{\sigma(A_l)}+4nq^{\sigma(f)+\varepsilon}r^{k\sigma(f)+k\varepsilon}+O(1).\qquad(13)$$

又由引理 2 可知，对上述的 ε，当 $r\in H$ 且 $r\to\infty$ 时，有

$$T(r,A_l)>(\tau(A_l)-\varepsilon)r^{\sigma(A_l)}.\qquad(14)$$

从而，由(13)式和(14)式可知，对上述的 ε，当 $r\in H\backslash E$ 且 $r\to\infty$ 时，有

$$[\tau(A_l)-n\tau_1-(n+1)\varepsilon]r^{\sigma(A_l)}\leqslant nr^{\sigma(A_l)-\varepsilon}+r^{k\sigma(f)+(k+1)\varepsilon},$$

矛盾. 因此，假设不成立，即方程(2)的任意非零亚纯解 $f(z)$ 必满足 $\sigma(f)\geqslant\sigma(A_l)/k$.

定理 1 得证.

定理 2 的证明　记 $\sigma_2=\max\{\sigma(A_i),i=0,1,\cdots,n,i\neq l,\sigma(F)\}$，$\tau_2=\max\{\tau(A_i),\tau(F):\sigma(A_i)=\sigma(A_l),i=0,1,\cdots,n,i\neq l,\sigma(F)=\sigma(A_l)\}$，则 $\sigma_2\leqslant\sigma(A_l)$，$(n+1)\tau_2<\tau(A_l)$. 从而，对充分小的 $\varepsilon(>0)$，当 $r\to\infty$ 时，有(7)式和

$$T(r,F)\leqslant\begin{cases}r^{\sigma(A_l)-\varepsilon}, & \sigma(F)<\sigma(A_l),\\ (\tau_2+\varepsilon)r^{\sigma(A_l)}, & \sigma(F)=\sigma(A_l).\end{cases}\qquad(15)$$

设 $f(z)$ 为方程(3)的亚纯解. 若 $\sigma(f)=\infty$，则结论显然成立. 接下来，仅考虑 $\sigma(f)<\infty$ 的情形. 显然，$\sigma_2(f)=0<1/k^2$，则由引理 1 可知，$\forall\varepsilon(>0)$，当 $r\notin E$ 且 $r\to\infty$ 时，有(10)式成立.

将方程(3)改写为

$$-A_l(z)=-\frac{F(z)}{f(P_l(z))}+A_n(z)\frac{f(P_n(z))}{f(P_l(z))}+\cdots+A_{l+1}(z)\frac{f(P_{l+1}(z))}{f(P_l(z))}+A_{l-1}(z)\frac{f(P_{l-1}(z))}{f(P_l(z))}+\cdots+A_0(z)\frac{f(P_0(z))}{f(P_l(z))},$$

并得到

$$T(r,A_l)\leqslant\sum_{i\neq l}T(r,A_i)+T(r,F)+\sum_{i\neq l}T(r,f(P_i(z)))+(n+1)T(r,f(P_l(z)))+O(1).\qquad(16)$$

反设 $k\sigma(f)<\sigma(A_l)$，则由(7)式，(10)式和(14)～(16)式可知，对充分小的 $\varepsilon(0<\varepsilon<\min\{(\sigma(A_l)-k\sigma(f))/(k+1),(\tau(A_l)-(n+$

$1)\tau_2)/(n+2)\})$,当 $r\in H\backslash E$ 且 $r\to\infty$ 时,有

$$[\underline{\tau}(A_l)-(n+1)\tau_2-(n+2)\varepsilon]r^{\sigma(A_l)}\leqslant (n+1)r^{\sigma(A_l)-\varepsilon}+r^{k\sigma(f)+(k+1)\varepsilon},$$

矛盾. 因此,假设不成立,即方程(3)的任意亚纯解 $f(z)$ 必满足 $\sigma(f)\geqslant\sigma(A_l)/k$.

定理 2 得证.

定理3的证明 设 $f(z)$ 为方程(2)的非零亚纯解,且满足 $\sigma_2(f)<1/k^2$. 若 $\mu(f)=\infty$,则结论显然成立. 接下来,仅考虑 $\mu(f)<\infty$ 的情形.

反设 $k\mu(f)<\mu(A_l)$,则由引理 3 可知,$\forall\varepsilon(>0)$,当 $r\in H$ 且 $r\to\infty$ 时,有

$$T(qr^k,f)<q^{\mu(f)+\varepsilon}r^{k\mu(f)+k\varepsilon},\tag{17}$$

其中 $q=\max\{|q_i|,i=0,1,\cdots,n\}$. 故由(8)式,(17)式和引理 1 可知,$\forall\varepsilon(>0)$,当 $r\in H\backslash E$ 且 $r\to\infty$ 时,有

$$T(r,f(P_i(z)))=(1+o(1))T(|q_i|r^{k_i},f)\leqslant 2q^{\mu(f)+\varepsilon}r^{k\mu(f)+k\varepsilon}(i=0,1,\cdots,n).\tag{18}$$

记 $\sigma_3=\sigma_1=\max\{\sigma(A_i),i=0,1,\cdots,n,i\neq l\}$,$\tau_3=\max\{\tau(A_i):\sigma(A_i)=\mu(A_l),i=0,1,\cdots,n,i\neq l\}$,则 $\sigma_3\leqslant\mu(A_l)$,$n\tau_3<\underline{\tau}(A_l)$. 从而,对充分小的 $\varepsilon(>0)$,当 $r\to\infty$ 时,有

$$T(r,A_i)\leqslant\begin{cases}r^{\mu(A_l)-\varepsilon}, & \sigma(A_i)<\mu(A_l),\\ (\tau_3+\varepsilon)r^{\mu(A_l)}, & \sigma(A_i)=\mu(A_l),i\neq l.\end{cases}\tag{19}$$

又由亚纯函数的下型的定义可知,$\forall\varepsilon(>0)$,当 $r\to\infty$ 时,有

$$T(r,A_l)>(\underline{\tau}(A_l)-\varepsilon)r^{\mu(A_l)}.\tag{20}$$

从而,由(12)式和(18)~(20)式可知,对充分小的 $\varepsilon(0<\varepsilon<\min\{(\mu(A_l)-k\mu(f))/(k+1),(\underline{\tau}(A_l)-n\tau_3)/(n+1)\})$,当 $r\in H\backslash E$ 且 $r\to\infty$ 时,有

$$[\underline{\tau}(A_l)-n\tau_3-(n+1)\varepsilon]r^{\mu(A_l)}\leqslant nr^{\mu(A_l)-\varepsilon}+r^{k\mu(f)+(k+1)\varepsilon},$$

矛盾. 因此,假设不成立,即当方程(2)的非零亚纯解 $f(z)$ 满足 $\sigma_2(f)<1/k^2$ 时,必满足 $\mu(f)\geqslant\mu(A_l)/k$.

定理 3 得证.

定理4的证明 设 $f(z)$ 为方程(3)的亚纯解,且满足 $\sigma_2(f)<1/k^2$. 若 $\mu(f)=\infty$,则结论显然成立. 接下来,仅考虑 $\mu(f)<\infty$ 的情形.

反设 $k\mu(f)<\mu(A_l)$,则由引理1和引理3可知,$\forall\varepsilon(>0)$,当 $r\in H\backslash E$ 且 $r\to\infty$ 时,有(18)式成立.

记 $\sigma_4=\sigma_2=\max\{\sigma(A_i),i=0,1,\cdots,n,i\neq l,\sigma(F)\}$,$\tau_4=\max\{\tau(A_i),\tau(F):\sigma(A_i)=\mu(A_l),i=0,1,\cdots,n,i\neq l,\sigma(F)=\mu(A_l)\}$,则 $\sigma_4\leqslant\mu(A_l)$,$(n+1)\tau_4<\underline{\tau}(A_l)$. 从而,对充分小的 $\varepsilon(>0)$,当 $r\to\infty$ 时,有(19)式和

$$T(r,F)\leqslant\begin{cases}r^{\mu(A_l)-\varepsilon}, & \sigma(F)<\mu(A_l),\\ (\tau_4+\varepsilon)r^{\mu(A_l)}, & \sigma(F)=\mu(A_l).\end{cases}\tag{21}$$

从而,由(16)式和(18)~(21)式可知,对充分小的 $\varepsilon(0<\varepsilon<\min\{(\mu(A_l)-k\mu(f))/(k+1),(\underline{\tau}(A_l)-(n+1)\tau_4)/(n+2)\})$,当 $r\in H\backslash E$ 且 $r\to\infty$ 时,有

$$[\underline{\tau}(A_l)-(n+1)\tau_4-(n+2)\varepsilon]r^{\mu(A_l)}\leqslant (n+1)r^{\mu(A_l)-\varepsilon}+r^{k\mu(f)+(k+1)\varepsilon},$$

矛盾. 因此,假设不成立,即当方程(3)的亚纯解 $f(z)$ 满足 $\sigma_2(f)<1/k^2$ 时,必满足 $\mu(f)\geqslant\mu(A_l)/k$.

定理 4 得证.

定理5的证明 设 $f(z)$ 为方程(3)的非零亚纯解,且满足 $\sigma_2(f)<1/k^2$,则 $\forall\varepsilon(>0)$,当 $r\in H\backslash E$ 且 $r\to\infty$ 时,(18)式成立.

由亚纯函数的下级的定义可知,$\forall\varepsilon(>0)$,当 $r\to\infty$ 时,有

$$T(r,A_l)>r^{\mu(A_l)-\varepsilon}.\tag{22}$$

又由条件(4)可知,$\exists\alpha\in(0,1)$ 使得当 $r\to\infty$ 时,有

$$\sum_{i\neq l}T(r,A_i)+T(r,F)\leqslant\alpha T(r,A_l),\tag{23}$$

从而,由(16)式,(18)式,(22)~(23)式可知,$\forall\varepsilon(>0)$,当 $r\in H\backslash E$ 且 $r\to\infty$ 时,有

$$(1-\alpha)r^{\mu(A_l)-\varepsilon}\leqslant r^{k\mu(f)+(k+1)\varepsilon}.$$

由此立得 $\mu(A_l)\leqslant k\mu(f)$. 因此,当方程(3)的非零亚纯解 $f(z)$ 满足 $\sigma_2(f)<1/k^2$ 时,必满足 $\mu(f)\geqslant\mu(A_l)/k$.

定理 5 得证.

定理6的证明 记 $\sigma_6=\max\{\sigma(A_{ij}),i=0,1,\cdots,n,j=0,1,\cdots,m,(i,j)\neq(l,0)\}$,$\tau_6=\max\{\tau(A_{ij}):\sigma(A_{ij})=\sigma(A_{l0}),(i,j)\neq(l,0)\}$,则 $\sigma_6\leqslant\sigma(A_{l0})$,$[(n+1)(m+1)-1]\tau_6<\tau(A_{l0})$. 从而,对充分小的 $\varepsilon(>0)$,当 $r\to\infty$ 时,有

$$T(r,A_{ij})\leqslant\begin{cases}r^{\sigma(A_{l0})-\varepsilon}, & \sigma(A_{ij})<\sigma(A_{l0}),\\ (\tau_6+\varepsilon)r^{\sigma(A_{l0})}, & \sigma(A_{ij})=\sigma(A_{l0}),\\ & (i,j)\neq(l,0).\end{cases}\tag{24}$$

设 $f(z)$ 为方程(5)的非零亚纯解. 若 $\sigma(f)=\infty$,则结论显然成立. 接下来,仅考虑 $\sigma(f)<\infty$ 的情形. 显然,$\sigma_2(f)=0<1/k^2$,则由引理 1 可知,

$\forall \varepsilon(>0)$，当 $r \notin E$ 且 $r \to \infty$ 时，有(10)式成立.

将方程(5)改写为

$$-A_{l0}(z)=\sum_{\substack{i=0\\i\neq l}}^{n}\sum_{j=0}^{m}A_{ij}(z)\frac{f^{(j)}(P_i(z))}{f(P_l(z))}+\sum_{j=1}^{m}A_{lj}(z)\frac{f^{(j)}(P_l(z))}{f(P_l(z))}=\sum_{\substack{i=0\\i\neq l}}^{n}\sum_{j=0}^{m}A_{ij}(z)\frac{f^{(j)}(P_i(z))}{f(P_i(z))}\cdot\frac{f(P_i(z))}{f(P_l(z))}+\sum_{j=1}^{m}A_{lj}(z)\frac{f^{(j)}(P_l(z))}{f(P_l(z))}. \tag{25}$$

由(25)式可知，对上述的 ε，当 $r \notin E$ 且 $r \to \infty$ 时，有

$$T(r,A_{l0})\leqslant\sum_{\substack{i=0\\i\neq l}}^{n}\sum_{j=0}^{m}T(r,A_{ij})+\sum_{j=1}^{m}T(r,A_{lj})+\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=1}^{m}T\left(r,\frac{f^{(j)}(P_i(z))}{f(P_i(z))}\right)+\sum_{\substack{i=0\\i\neq l}}^{n}T\left(r,\frac{f(P_i(z))}{f(P_l(z))}\right)+O(1)\leqslant\sum_{\substack{i=0\\i\neq l}}^{n}\sum_{j=0}^{m}T(r,A_{ij})+\sum_{j=1}^{m}T(r,A_{lj})+O\left(\sum_{i=0}^{n}T(r,f(P_i(z)))\right). \tag{26}$$

又由引理 2 可知，对上述的 ε，当 $r \in H$ 且 $r \to \infty$ 时，有

$$T(r,A_{l0})>(\tau(A_{l0})-\varepsilon)r^{\sigma(A_{l0})}. \tag{27}$$

反设 $k\sigma(f)<\sigma(A_l)$，则由(10)式，(24)式，(26)～(27)式可知，对充分小的 $\varepsilon(0<\varepsilon<\min\{(\sigma(A_{l0})-k\sigma(f))/(k+1),(\tau(A_{l0})-[(n+1)(m+1)-1]\tau_6)/[(n+1)(m+1)]\})$，当 $r\in H\backslash E$ 且 $r\to\infty$ 时，有

$$(\tau(A_{l0})-[(n+1)(m+1)-1]\tau_6-(n+1)(m+1)\varepsilon)r^{\sigma(A_{l0})}\leqslant[(n+1)(m+1)-1]r^{\sigma(A_{l0})-\varepsilon}+r^{k\sigma(f)+(k+1)\varepsilon},$$

矛盾. 因此，假设不成立，即方程(5)的任意非零亚纯解 $f(z)$ 必满足 $\sigma(f)\geqslant\sigma(A_{l0})/k$.

定理 6 得证.

定理 7 的证明　记 $\sigma_7=\max\{\sigma(A_{ij}),i=0,1,\cdots,n,j=0,1,\cdots,m,(i,j)\neq(l,0),\sigma(F)\}$，$\tau_7=\max\{\tau(A_{ij}),\tau(F):\sigma(A_{ij})=\sigma(A_{l0}),(i,j)\neq(l,0),\sigma(F)=\sigma(A_{l0})\}$，则 $\sigma_7\leqslant\sigma(A_{l0})$，$(n+1)(m+1)\tau_7<\tau(A_{l0})$. 从而，对充分小的 $\varepsilon(>0)$，当 $r\to\infty$ 时，有(24)式和

$$T(r,F)\leqslant\begin{cases}r^{\sigma(A_{l0})-\varepsilon}, & \sigma(F)<\sigma(A_{l0}),\\(\tau_7+\varepsilon)r^{\sigma(A_{l0})}, & \sigma(F)=\sigma(A_{l0}).\end{cases} \tag{28}$$

设 $f(z)$ 为方程(6)的亚纯解. 若 $\sigma(f)=\infty$，则结论显然成立. 接下来，仅考虑 $\sigma(f)<\infty$ 的情形. 显然，$\sigma_2(f)=0<1/k^2$，则由引理 1 可知，$\forall\varepsilon(>0)$，当 $r\notin E$ 且 $r\to\infty$ 时，(10)式成立.

将方程(6)改写为

$$-A_{l0}(z)=-\frac{F(z)}{f(P_l(z))}+\sum_{\substack{i=0\\i\neq l}}^{n}\sum_{j=0}^{m}A_{ij}(z)\frac{f^{(j)}(P_i(z))}{f(P_l(z))}+\sum_{j=1}^{m}A_{lj}(z)\frac{f^{(j)}(P_l(z))}{f(P_l(z))}=-\frac{F(z)}{f(P_l(z))}+\sum_{\substack{i=0\\i\neq l}}^{n}\sum_{j=0}^{m}A_{ij}(z)\cdot\frac{f^{(j)}(P_i(z))}{f(P_i(z))}\frac{f(P_i(z))}{f(P_l(z))}+\sum_{j=1}^{m}A_{lj}(z)\frac{f^{(j)}(P_l(z))}{f(P_l(z))}. \tag{29}$$

由(29)式可知，对上述的 ε，当 $r\notin E$ 且 $r\to\infty$ 时，有

$$T(r,A_{l0})\leqslant T\left(r,\frac{F(z)}{f(P_l(z))}\right)+\sum_{\substack{i=0\\i\neq l}}^{n}\sum_{j=0}^{m}T(r,A_{ij})+\sum_{j=1}^{m}T(r,A_{lj})+\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=1}^{m}T\left(r,\frac{f^{(j)}(P_i(z))}{f(P_i(z))}\right)+\sum_{\substack{i=0\\i\neq l}}^{n}T\left(r,\frac{f(P_i(z))}{f(P_l(z))}\right)+O(1)\leqslant\sum_{\substack{i=0\\i\neq l}}^{n}\sum_{j=0}^{m}T(r,A_{ij})+\sum_{j=1}^{m}T(r,A_{lj})+T(r,F)+O\left(\sum_{i=0}^{n}T(r,f(P_i(z)))\right). \tag{30}$$

又由引理 2 可知，对上述的 ε，当 $r\in H$ 且 $r\to\infty$ 时，有(27)式成立.

反设 $k\sigma(f)<\sigma(A_l)$，则由(10)式，(24)式，(27)～(28)式和(30)式可知，对充分小的 $\varepsilon(0<\varepsilon<\min\{(\sigma(A_{l0})-k\sigma(f))/(k+1),(\tau(A_{l0})-(n+1)(m+1)\tau_7)/[(n+1)(m+1)+1]\})$，当 $r\in H\backslash E$ 且 $r\to\infty$ 时，有

$$(\tau(A_{l0})-(n+1)(m+1)\tau_7-[(n+1)(m+1)+1]\varepsilon)r^{\sigma(A_{l0})}\leqslant(n+1)(m+1)r^{\sigma(A_{l0})-\varepsilon}+r^{k\sigma(f)+(k+1)\varepsilon},$$

矛盾. 因此，假设不成立，即方程(6)的任意亚纯解 $f(z)$ 必满足 $\sigma(f)\geqslant\sigma(A_{l0})/k$.

定理 7 得证.

定理 8 的证明　类似于定理 3 和定理 6 的证明，此处略去证明过程.

定理 9 的证明　类似于定理 4 和定理 7 的证明，此处略去证明过程.

3　参考文献

[1] Hayman W K. Meromorphic functions [M]. Oxford: Clarendon Press，1964.

[2] Laine I. Nevanlinna theory and complex differential equations [M]. Berlin: Walter de Gruyter，1993.

[3] 仪洪勋，杨重骏. 亚纯函数唯一性理论 [M]. 北京: 科学出版社，1995.

[4] 杨乐. 值分布论及其新研究 [M]. 北京: 科学出版社，1982.

[5] Bernal L G. On growth k-order of solutions of a complex homogeneous linear differential equation [J]. Proc Amer Math Soc,1987,101(2):317-322.

[6] Hu Hui,Zheng Xiumin. Growth of solutions of linear differential equations with meromorphic coefficients of [p,q]-order [J]. Math Commun,2014,19(1):29-42.

[7] Chiang Yikman,Feng Shaoji. On the Nevanlinna characteristic of $f(z+\eta)$ and difference equations in the complex plane [J]. Ramanujan J,2008,16(1):105-129.

[8] Laine I,Yang Chungchun. Clunie theorems for difference and q-difference polynomials [J]. J London Math Soc,2007,76(3):556-566.

[9] Liu Kai,Qi Xiaoguang. Meromorphic solutions of q-shift difference equations [J]. Ann Polon Math,2011,101(3):215-225.

[10] 涂金,郑秀敏. q-平移差分多项式和推广了的 q-平移差分方程亚纯解的一些性质 [J]. 数学物理学报,2013,33A(5):951-959.

[11] 王珺,张思奇. 一类复差分方程亚纯解的增长性问题 [J]. 复旦学报:自然科学版,2015,54(3):296-300.

[12] Korhonen R. An extension of Picard′s theorem for meromorphic function of small hyper-order [J]. J Math Anal Appl,2009,357(1):244-253.

[13] Chen Zongxuan,Shon K H. On growth of meromorphic solutions for linear difference equations [J]. Abstr Appl Anal,2013,2013,Article ID:619296,1-6.

[14] Zheng Xiumin,Tu Jin. Growth of meromorphic solutions of linear difference equations [J]. J Math Anal Appl,2011,384(2):349-356.

[15] Wu Shunzhou,Zheng Xiumin. Growth of meromorphic solutions of complex linear differential-difference equations with coefficients having the same order [J]. J Math Research Appl,2014,34(6):683-695.

[16] Cao Tingbin,Xu Junfeng,Chen Zongxuan. On the meromorphic solutions of linear differential equations on the complex plane [J]. J Math Anal Appl,2010,364(1):130-142.

The Growth of Meromorphic Solutions of Homogeneous and Non-Homogeneous Complex Linear Equations for Composite Functions

CHEN Haiying,ZHENG Xiumin

(College of Mathematics and Informatics,Jiangxi Normal University,Nanchang Jiangxi 330022,China)

Abstract: The growth of meromorphic solutions of a kind of homogenous and non-homogeneous complex linear equations for composite functions with meromorphic coefficients is investigated by the Nevanlinna′s value distribution of meromorphic function,which is generalized into the more general case of complex linear differential equations for composite functions. When more than one coefficient of involved equations have the maximal order or the maximal lower order,some estimates on the lower bound of the order or the lower order of non-zero meromorphic solutions of involved equations are obtained under some conditions.

Key words: complex linear equations for composite functions; meromorphic function; (lower) order; (lower) type

(责任编辑:王金莲)