文章编号:1000-5862(2019)04-0348-05

指数-威布尔分布参数的经验 Bayes 检验问题

桂国祥[1],黄 娟[2]

(1. 江西师范大学数学与信息科学学院,江西 南昌 330022;2. 广东海洋大学数学与计算机学院,广东 湛江 524088)

摘要: 利用经验贝叶斯方法研究了在线性损失下指数-威布尔分布参数的经验 Bayes 检验问题,构造了在历史样本是长程相协样本下的参数经验 Bayes 检验函数,并证明了所提出的经验 Bayes 检验函数满足渐近最优(a. o.)性及给出了该函数的收敛速度.

关键词: 长程负相协; 经验 Bayes 检验; 渐近最优性; 收敛速度

中图分类号: O 212.7 **文献标志码:** A **DOI:** 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2019.04.04

0 引言

自 H. Robbins[1] 引入经验 Bayes(EB)方法以来,取得了丰硕成果[2-13],这些研究成果,主要聚集在 NA 样本情形以及强混合样本等相依情形. 然而在实际生活中,一方面,样本并非满足以上相依情形,而是满足长程相协样本; 另一方面,某些具有单调实效率的混合型分布在可靠性理论、渗透理论和某些多元分析问题中的作用越来越引起人们重视,比如指数-威布尔分布就是较典型的一类,在工业电子产品寿命分析等领域有着广泛应用. 由于指数-威布尔分布的密度函数形式较复杂,因而有关它的 EB 检验问题的研究文献较少. 本文在长程相协样本下针对形状参数 $a = 1$ 来考虑指数-威布尔分布参数 θ 的 EB 检验问题.

当参数 $a = 1$ 时,指数-威布尔分布的条件密度函数为 $f(x \mid \theta) = e^{-x}\theta(1 - e^{-x})^{\theta-1}$. 讨论如下的单侧检验问题

$$H_0: \theta \leqslant \theta_0 \leftrightarrow H_1: \theta > \theta_0,$$

其中 θ_0 为给定的正常数. 关于假设检验问题,选取的损失函数为

$$L_0(\theta, d_0) = \alpha(\theta - \theta_0) I(\theta > \theta_0),$$
$$L_1(\theta, d_1) = \alpha(\theta_0 - \theta) I(\theta \leqslant \theta_0),$$

此处 $\alpha(>0)$ 为常数,行动空间 $d = \{d_0, d_1\}$,d_0 表示接受 H_0,d_1 表示拒绝 H_0. 若参数 θ 有未知先验分布为 $G(\theta)$,令随机化判决函数为 $\delta(x) = P($接受 $H_0 \mid X = x)$,而 $\delta(x)$ 的风险函数为

$$R(\delta(x), G(\theta)) = \int_\Theta\int_\Omega [L_0(\theta, d_0) f(x \mid \theta)\delta(x) + L_1(\theta, d_1) f(x \mid \theta)(1 - \delta(x))] \mathrm{d}x\mathrm{d}G(\theta) = \alpha\int_\Omega \beta(x)\delta(x)\,\mathrm{d}x + C_G, \tag{1}$$

其中 $C_G = \int_\Theta L_1(\theta, d_1)\,\mathrm{d}G(\theta)$,$\beta(x) = \int_\Theta (\theta - \theta_0) f(x \mid \theta)\,\mathrm{d}G(\theta)$.

设随机变量 X 的边际分布为

$$f_G(x) = \int_\Theta f(x \mid \theta)\,\mathrm{d}G(\theta),$$

$$\beta(x) = \int_\Theta e^{-x}(1 - e^{-x})^{\theta-1}\mathrm{d}G(\theta),$$

进而得到 $f_G(x)$ 的 1 阶导数和 2 阶导数

$$f_G^{(1)} = -f_G(x) + \int_\Theta e^{-2x}\theta(\theta-1)(1-e^{-x})^{\theta-2}\mathrm{d}G(\theta) = -f_G(x) + \left(\int_\Theta \theta f(x \mid \theta)\,\mathrm{d}G(\theta) - f_G(x)\right)/(e^x - 1),$$

$$f_G^{(2)} = -f_G^{(1)}(x) - 2\int_\Theta e^{-2x}\theta(\theta - 1)(1 - e^{-x})^{\theta-2}\mathrm{d}G(\theta) + \int_\Theta e^{-3x}\theta(\theta - 1)(\theta - 2)(1 - e^{-x})^{\theta-3}\mathrm{d}G(\theta),$$

而 $\beta(x) = \int_\Theta \theta^2 f(x \mid \theta)\,\mathrm{d}G(\theta) - 2\theta_0\int_\Theta \theta f(x \mid \theta)\,\mathrm{d}G(\theta) + \theta_0^2 f_G(x)$,若记

$$u_1(x) = e^{2x} - e^x + 1,$$
$$u_2(x) = (e^x - 1)(3e^x - 2\theta_0),$$

收稿日期:2018-12-15

基金项目:国家自然科学基金(71361015)和广东省自然科学基金(2018A030307070,2016A030313812)资助项目.

作者简介:桂国祥(1981-),男,江西临川人,讲师,主要从事数理统计及其应用方面的研究. E-mail:1744974563@qq.com

$$u_3(x)=2e^{2x}-(1+2\theta_0)e^x+\theta_0^2,$$

则有

$$\beta(x)=u_1(x)f_G^{(2)}(x)+u_2(x)f_G^{(1)}(x)+u_3(x)f_G(x).$$

由(1)式可知，Bayes 检验函数为

$$\delta_G(x)=\begin{cases}1, \beta(x)\leqslant 0,\\ 0, \beta(x)>0,\end{cases} \tag{2}$$

其 Bayes 风险为

$$R(G)=\inf_\delta R(\delta,G)=R(\delta_G,G)=\alpha\int_\Omega \beta(x)\delta_G(x)\,dx+C_G. \tag{3}$$

若先验分布 $G(\theta)$ 已知，则在(3)式中 $\delta(x)=\delta_G(x)$ 是可以到达的. 但此处 $G(\theta)$ 未知，所以 $\delta_G(x)$ 无使用价值，需要引进 EB 方法.

1　EB 检验函数的构造

首先利用弱平稳同分布长程负相协样本去获得密度函数 $f_G(x)$ 的核估计和 $\beta(x)$ 的估计量，然后利用这一结果构造 EB 检验函数.

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n, X$ 为弱平稳同分布的随机样本，其拥有边际概率密度函数 $f_G(x)$，其中 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为历史样本和同分布弱平稳长程负相协样本，X 为当前样本，且假设历史样本与当前样本独立. 假定 $f_G(x)\in C_{s,\alpha}, x\in \mathbf{R}$，其中 $C_{s,\alpha}$ 表示 $\mathbf{R}$ 中的一族概率密度，它的 s 阶导数存在，$C_{s,\alpha}$ 不仅连续而且绝对值不超过 α，$s\geqslant 2$ 为正整数.

考虑构造 $\beta(x)$ 的估计量. 设 $\{X_t, t\geqslant 1\}$ 为一平稳过程序列，具有概率密度 $f(x)$ 且满足

$$X_t=\sum_{i=0}^{\infty}a_i\varepsilon_{t-i},$$

其中 $\{\varepsilon_i, i\in \mathbf{Z}\}$ 是 i. i. d.，$E\varepsilon_i=0$，$\mathrm{Var}\varepsilon_i<\infty$，具有密度函数 $f_1(x)$ 且 $a_0=1$，$\sum_{i=0}^{\infty}|a_i|<\infty$，则定义 $f^{(r)}(x)$ 的核估计为 $f_n^{(r)}(x)=\frac{1}{nh_n^{1+r}}\sum_{j=1}^{\infty}K_r((x-X_j)/h_n)$，其中 $h_n>0$ 且 $h_n\to 0(n\to\infty)$. 设 $K_r(\cdot)(r=1,2,\cdots,s-1)$ 是 $\mathbf{R}$ 中 Borel 可测函数，且

$$\int_{\mathbf{R}}|v|K_r(v)\,dv<\infty, \int_{\mathbf{R}}K_r^2(v)\,dv<\infty,$$

$$\int_{\mathbf{R}}|v|K_r^2(v)\,dv<\infty, \int_{\mathbf{R}}|K_r(v)|\,dv<\infty.$$

引理 1[14]　若 ε_1 的密度函数 $f_1(x)$ 满足 1 阶 Lipschitz 条件，则 X_t 的密度函数 $f(x)$ 存在且满足 Lipschitz 条件.

引理 2[14]　若引理 1 的条件且(1)～(2)式成立，则有 $\sup\|H_n(z)\|=o(\sqrt{n})$，其中

$$H_n(z)=\sum_{t=1}^{n}\{f_1(x-R_t+z)-f(x+z)\}, R_t=X_t-\varepsilon_t, \|Y\|=(EY^2)^{1/2}.$$

引理 3　设 $\{X_t\}$ 由(1)式决定，条件(2)～(3)式成立，若 $f_1(x)$ 满足 Lipschitz 条件，则

(i) 当 $nh_n^{1+r}\to\infty(n\to\infty)$ 时，$\forall x\in\mathbf{R}$，有

$$E|f_n^{(r)}(x)-f^{(r)}(x)|^2=0;$$

(ii) 存在某个正常数 M，使 $|f(x)|<M$，且 $h_n=n^{-1/(2+s)}$，有

$$E|f_n^{(r)}(x)-f^{(r)}(x)|^{2\lambda}\leqslant cn^{-\lambda(s-r+1)/(2+s)}.$$

证　(i) 由 C-R 不等式知

$$E|f_n^{(r)}(x)-f^{(r)}(x)|^2\leqslant c\Big\{E|f_n^{(r)}(x)-Ef_n^{(r)}(x)|^2+E|f_n^{(r)}(x)-f^{(r)}(x)|^2\Big\}.$$

由引理 1 知，$f_1(x)$ 满足 Lipschitz 条件，从而 $f(x)$ 连续. 再由核函数 $K_r(\cdot)$ 的性质，有

$$E|f_n^{(r)}(x)-f^{(r)}(x)|^2=h_n^r\left|\int_{\mathbf{R}}K_r(v)f(x-h_nv)\,dv-f(x)\right|=h_n^r\left|\int_{\mathbf{R}}[K_r(v)f(x-h_nv)-f(x)]\,dv\right|\leqslant ch_n^{1+r}\int_{\mathbf{R}}K_r(v)|v|\,dv\to 0(n\to\infty),$$

故结论(i)成立.

(ii) 类似(i)的证明过程，并利用引理 2 及引理 3 的条件，易得结论(ii)也成立.

令 $K(x)$ 是有界 Borel 可测的函数，在区间(0，1)外为 0 且满足下列条件：

(A_1) $\frac{1}{t!}\int_0^1 v^tK(v)\,dv=\begin{cases}1, t=0,\\ 0, t=1,2,\cdots,s-1,\end{cases}$

(A_2) $K(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是可微的，且 $\sup_{x\in\mathbf{R}}|K'(x)|\leqslant c<\infty$，

本文对弱平稳长程相协序列的协方差结构做假设：

(A_3) $\sum_{i=1}^{\infty}\mathrm{Cov}(X_1, X_i)=O(n^\gamma)$，其中 $1/2<\gamma<1$.

不失一般性，定义密度函数 $f_G(x)$ 的核估计为

$$f_n(x)=\frac{1}{nh_n}\sum_{i=1}^{\infty}K((x-X_i)/h_n), \tag{4}$$

其中 $\{h_n\}$ 为正数序列，且 $\lim_{n\to\infty}h_n=0$. 因此 $\beta(x)$ 的估计量为

$$\beta_n(x)=u_1(x)f_n^{(2)}(x)+u_2(x)f_n^{(1)}(x)+u_3(x)f_n(x),$$

故检验函数定义为

$$\delta_n(x)=\begin{cases}1, \beta_n(x)\leqslant 0,\\ 0, \beta_n(x)>0.\end{cases} \tag{5}$$

令 E 表示对随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的联合分布求均值，则 $\delta_n(x)$ 的全面风险函数为

$$R(\delta_n(x), G) = \alpha\int_{\Omega}\beta(x)E[\delta_n(x)]\mathrm{d}x + C_G, \quad (6)$$

若 $\lim\limits_{n\to\infty}R(\delta_n, G) = R(\delta_G, G)$，则称 $\{\delta_n(x)\}$ 为 a.o. 的 EB 检验函数；若 $R(\delta_n, G) - R(\delta_G, G) = O(n^{-q})$ $(q > 0)$，则称 EB 检验函数 $\{\delta_n(x)\}$ 的收敛速度为 $O(n^{-q})$.

令 c, c_1, c_2, c_3, c_4 表示不同的常数，即使在同一表达式中它们也可取不同的值.

引理 4[15] 令 X 和 Y 是负相协随机变量序列，皆存在有限方差，则对任何可微函数 g_1 和 g_2 有

$$|\mathrm{Cov}(g_1(X), g_2(Y))| \leqslant \sup_X |g'_1(X)| \cdot \sup_Y |g'_2(Y)|\,|\mathrm{Cov}(X, Y)|.$$

为导出 $\{\delta_n(x)\}$ 的渐近最优性和收敛速度，先证明引理 5.

引理 5 设 $f_n(x)$ 由(4)式定义，其中 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为弱平稳同分布长程负相协样本序列，假定条件 $(\mathrm{A}_1) \sim (\mathrm{A}_3)$ 成立，$\forall x \in \Omega$，

(i) 若 $f_G(x)$ 关于 x 连续，则当 $\lim\limits_{n\to\infty}h_n = 0$，$\lim\limits_{n\to\infty}n^{(1-\gamma)}h_n^4 = \infty$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}E|f_n(x) - f_G(x)|^2 = 0$，其中 $1/2 < \gamma < 1$；

(ii) 若 $f_G(x) \in C_{s,\alpha}$，则当 $h_n = n^{-1/(2+2s)}$ 时，对于 $0 < \lambda \leqslant 1$ 有

$$E|f_n(x) - f_G(x)|^{2\lambda} \leqslant cn^{-\lambda[s-(s+1)\gamma-1]/(1+s)}.$$

证 (i) 由 C-R 不等式可得

$$E|f_n(x) - f_G(x)|^2 \leqslant 2|Ef_n(x) - f_G(x)|^2 + 2\mathrm{Var}(f_n^{(r)}(c)) = 2(I_1 + I_2), \quad (7)$$

其中

$$Ef_n(x) = h_n^{-1}E[K((x - X)/h_n)] = h_n^{-1}\int_0^{\infty}K((x - y)/h_n)f_G(y)\mathrm{d}y = \int_0^1 K_r(u)f_G(x - h_nu)\mathrm{d}u.$$

由 $f_G(x)$ 关于 x 连续和条件 (A_1) 得

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty}|Ef_n(x) - f_G(x)| = \lim_{n\to\infty}\left|\int_0^1 K(u)f_G(x - h_nu)\mathrm{d}u - f_G(x)\right| \leqslant \int_0^1|K(u)| \cdot \lim_{n\to\infty}|f_G(x - \xi h_nu) - f_G(x)|\mathrm{d}u = 0,$$

所以有

$$\lim_{n\to\infty}I_1 = 0.$$

记 $g_n(x, y) = h_n^{-1}K((x - y)/h_n)$，由 (A_2) 知 $g_n(x, y)$ 在 $\mathbf{R}$ 上可求偏导数. 由引理 4 和条件 (A_3) 及 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 的弱平稳性可知

$$I_2 = \mathrm{Var}f_n(x) = n^{-2}h_n^{-2}\mathrm{Var}\sum_{i=1}^n K((x - X_i)/h_n) = n^{-2}h_n^{-2}\left\{\sum_{i=1}^n \mathrm{Var}K((x - X_i)/h_n) + 2\sum_{i=1}^{n-1}(n - i) \cdot \mathrm{Cov}[K((x - X_1)/h_n), K((x - X_{1+i})/h_n)]\right\} = n^{-2}h_n^{-2} \cdot \left\{\sum_{i=1}^n \mathrm{Var}K((x - X_i)/h_n) + 2\sum_{i=1}^{n-1}(n - i)(\sup\partial g_n(x, y)/\partial y)^2\,|\mathrm{Cov}(X_i, X_{1+i})|\right\} \leqslant n^{-1}h_n^{-2}\mathrm{Var}K((x - X_1)/h_n) + cn^{-(1-\gamma)}h_n^{-4} \leqslant c_1n^{-1}h_n^{-2} + c_2n^{-(1-\gamma)}h_n^{-4},$$

因此，当 $h_n \to 0$，$n^{(1-\gamma)}h_n^4 \to \infty\ (n \to \infty)$ 时，有 $I_2 \to 0$.

综上可得(i)的结论成立.

(ii) 类似于(7)式有

$$E|f_n(x) - f_G(x)|^{2\lambda} \leqslant 2(Ef_n(x) - f_G(x))^{2\lambda} + 2(\mathrm{Var}f_n(x))^{\lambda} = 2(J_1^{2\lambda} + J_2^{\lambda}),$$

由(i)的证明过程可知 $J_1^{2\lambda} \leqslant ch_n^{2\lambda s}$，当 $h_n = n^{-1/(2(1+s))}$ 时易得

$$J_1^{2\lambda} \leqslant cn^{-\lambda s/(1+s)}, J_2^{\lambda} \leqslant cn^{-(1-\gamma)\lambda}n^{\lambda/(1+s)} = cn^{-\lambda[s-(s+1)\gamma-1]/(1+s)},$$

从而，$E|f_n(x) - f_G(x)|^{2\lambda} \leqslant cn^{-\lambda[s-(s+1)\gamma-1]/(1+s)}$.

引理 6[16] 令 $R(\delta_G, G)$ 和 $R(\delta_n, G)$ 分别由(3)式和(6)式给出，则

$$0 \leqslant R(\delta_n, G) - R(\delta_G, G) \leqslant \alpha\int_{\Omega}|\beta(x)| \cdot p(|\beta_n(x) - \beta(x)| \geqslant |\beta(x)|)\mathrm{d}x.$$

引理 7[17] 设 $\{X_i \mid i \geqslant 1\}$ 是 NA 序列，$EX_i = 0$ 且 $E|X_i|^p < \infty$，$j = 1, 2, \cdots, n$，记 $S_n = \sum\limits_{i=1}^n X_i$，若对某个 $p \geqslant 2$，则存在仅与 p 有关的常数 $C_p > 0$，使得

$$E|S_n|^p \leqslant C_pn^{p/2-1}\sum_{i=1}^n E|X_i|^p.$$

引理 8 设 $\delta_G(x)$ 和 $\delta_n(x)$ 分别由(2)式和(5)式给出，则对于 $0 < \lambda \leqslant 1$ 有

$$E|\delta_n(x) - \delta_G(X)|^{2\lambda} \leqslant cn^{-\lambda}.$$

证 由引理 7 和矩单调不等式易得引理 8.

2 EB 检验函数的渐近性及其收敛速度

定理 1 设 $\delta_n(x)$ 由(5)式定义，其中 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为弱平稳长程负相协样本. 若

(i) $\{h_n\}$ 为正数序列，且满足

$\lim\limits_{n\to\infty}h_n = 0, \lim\limits_{n\to\infty}nh_n^5 = +\infty$；

(ii) $\int_\Theta |\theta-1| \mathrm{d}G(\theta) < +\infty, \int_\Theta |(\theta-1)(\theta-2)| \mathrm{d}G(\theta) < +\infty$；

(iii) $f_G^{(2)}(x)$ 为 x 的连续函数，

则有

$$\lim_{n\to\infty}R(\delta_n,G) = R(\delta_G,G).$$

证　由引理 6 得

$$0 \leqslant R(\delta_n,G) - R(\delta_G,G) \leqslant \alpha\int_0^{+\infty}|\beta(x)| \cdot p(|\beta_n(x)-\beta(x)| \geqslant |\beta(x)|)\,\mathrm{d}x.$$

记 $\psi_n(x) = |\beta(x)|\,p(|\beta_n(x)-\beta(x)| \geqslant |\beta(x)|)$，则有 $\psi_n(x) \leqslant |\beta(x)|$.

由 (5) 式和 (6) 式得

$$f_G^{(1)}(x) = -f_G(x) + \int_\Theta \frac{\theta-1}{\mathrm{e}^x-1}f(x|\theta)\,\mathrm{d}G(\theta),$$

$$f_G^{(2)}(x) = f_G(x) - 3\int_\Theta \frac{\theta-1}{\mathrm{e}^x-1}f(x|\theta)\,\mathrm{d}G(\theta) + \int_\Theta \frac{(\theta-1)(\theta-2)}{(\mathrm{e}^x-1)^2}f(x|\theta)\,\mathrm{d}G(\theta),$$

$$\beta(x) = (\theta_0-1)^2f_G(x) + (3-2\theta_0)\int_\Theta(\theta-1)f(x|\theta)\,\mathrm{d}G(\theta) + \int_\Theta(\theta-1)(\theta-2)f(x|\theta)\,\mathrm{d}G(\theta).$$

由 Fubini 定理可知

$$\int_\Omega|\beta(x)|\,\mathrm{d}x = \int_\Omega\int_\Theta|(\theta_0-1)^2 + (3-2\theta_0)\cdot(\theta-1) + (\theta-1)(\theta-2)|\,f(x|\theta)\,\mathrm{d}G(\theta)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_\Omega\int_\Theta|(\theta_0-1)^2|\,f(x|\theta)\,\mathrm{d}G(\theta)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega\int_\Theta|(3-2\theta_0)(\theta-1)|\,f(x|\theta)\,\mathrm{d}G(\theta)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega\int_\Theta|(\theta-1)(\theta-2)|\,f(x|\theta)\,\mathrm{d}G(\theta)\,\mathrm{d}x \leqslant (\theta_0-1)^2 + |(3-2\theta_0)| \cdot \int_\Theta|\theta-1|\,\mathrm{d}G(\theta) + \int_\Theta|(\theta-1)(\theta-2)|\,\mathrm{d}G(\theta) < +\infty.$$

故由控制收敛定理可知

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty}R(\delta_n,G) - R(\delta_G,G) \leqslant \int_\Omega \lim_{n\to\infty}\psi_n(x)\,\mathrm{d}x, \tag{8}$$

所以要使定理 1 成立，只需证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\psi_n(x) = 0$. 又由 Markov 不等式和 Jensen 不等式可得

$$\psi_n(x) \leqslant E|\beta_n(x)-\beta(x)| \leqslant |u_1(x)| \cdot E|f_n^{(2)}(x)-f_G^{(2)}(x)| + |u_2(x)|\,E|f_n^{(1)}(x)-f_G^{(1)}(x)| + |u_3(x)|\,E|f_n(x)-f_G(x)| \leqslant |u_1(x)|\,[E|f_n^{(2)}(x)-f_G^{(2)}(x)|^2]^{1/2} + |u_2(x)|\,[E|f_n^{(1)}(x)-f_G^{(1)}(x)|^2]^{1/2} + |u_3(x)|\,[E|f_n(x)-f_G(x)|^2]^{1/2}.$$

再由引理 5(i) 可知，对任意固定的 $x \in \Omega$，当 $r = 0,1,2$ 时，有

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty}\psi_n(x) \leqslant |u_1(x)|\,(\lim_{n\to\infty}E|f_n^{(2)}(x)-f_G^{(2)}(x)|^2)^{1/2} + |u_2(x)|\,(\lim_{n\to\infty}E|f_n^{(1)}(x)-f_G^{(1)}(x)|^2)^{1/2} + |u_3(x)|\,(\lim_{n\to\infty}E|f_n(x)-f_G(x)|^2)^{1/2} = 0.$$

将上式代入(8) 式可知定理 1 得证，即检验函数的渐进最优性成立.

定理 2　设 $\delta_n(x)$ 由(5) 式定义，其中 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为弱平稳长程负相协样本，且满足 $f_G(x) \in C_{s,\alpha}$，对于 $0 < \lambda \leqslant 1$，有

$$\int_\Omega \mathrm{e}^{m\lambda x}|\beta(x)|^{1-\lambda}\mathrm{d}x < +\infty, m = 0,1,2, \tag{9}$$

则当 $h_n = n^{-1/(2s+1)}$ 时，有

$$R(\delta_n,G) - R(\delta_G,G) = O(n^{-\lambda(s-2)/(2s+1)}),$$

其中 $s(\geqslant 3)$ 为正整数.

证　由引理 6 和 Markov 不等式得

$$0 \leqslant R(\delta_n,G) - R(\delta_G,G) \leqslant \int_\Omega|\beta(x)|^{1-\lambda} \cdot E|\beta_n(x)-\beta_G(x)|^\lambda\mathrm{d}x \leqslant c_1\int_\Omega|\beta(x)|^{1-\lambda}|u_1(x)| \cdot E|f_n^{(2)}(x)-f_G^{(2)}(x)|\,\mathrm{d}x + c_2\int_\Omega|\beta(x)|^{1-\lambda}|u_2(x)| \cdot E|f_n^{(1)}(x)-f_G^{(1)}(x)|\,\mathrm{d}x + c_3\int_\Omega|\beta(x)|^{1-\lambda}|u_3(x)| \cdot E|f_n(x)-f_G(x)|\,\mathrm{d}x = A_n + B_n + C_n, \tag{10}$$

由引理 5(ii) 和条件(9) 知

$$A_n \leqslant c_1n^{-\lambda(s-2)/(2s+1)}\int_\Omega|\beta(x)|^{1-\lambda}|u_1(x)|^\lambda\mathrm{d}x \leqslant c_4n^{-\lambda(s-2)/(2s+1)}, \tag{11}$$

由引理 8 及条件(9) 得

$$B_n \leqslant c_2n^{-\lambda(s-1)/(2s+1)}\int_\Omega|\beta(x)|^{1-\lambda}|u_2(x)|^\lambda\mathrm{d}x \leqslant c_5n^{-\lambda(s-1)/(2s+1)}, \tag{12}$$

$$C_n \leqslant c_3n^{-\lambda s/(2s+1)}\int_\Omega|\beta(x)|^{1-\lambda}|u_3(x)|^\lambda\mathrm{d}x \leqslant c_6n^{-\lambda s/(2s+1)}. \tag{13}$$

将(11) ~ (13) 式代入(10) 式得

$$R(\delta_n,G) - R(\delta_G,G) = O(n^{-\lambda(s-2)/(2s+1)}).$$

定理 2 得证.

注 1　当 $\lambda \to 1, s \to \infty$ 时，

$$O(n^{-\lambda[s-1-(s+1)\gamma]/(2(1+s))}) \to O(n^{-(1-\gamma)/2}).$$

注 2　定理 2 去掉了严格约束条件

$$\sum_{i=1}^{\infty} | \operatorname{Cov}(X_1, X_i) | \leqslant c < \infty .$$

3 总结

利用经验贝叶斯方法,在历史样本是长程相协样本下研究了在线性损失下指数-威布尔分布参数的经验 Bayes 检验问题,推广了独立同分布情形,但这仅仅是考虑长程相协样本情形,在其它相依情形下未做研究,如强混合样本相依情形等,这些将是今后致力研究的方向.

4 参考文献

[1] Van Houwelingen J C. Monotone empirical Bayes test for the continuous one-parameter exponential family [J]. Ann Statist, 1976, 4(5): 981-989.

[2] John M V Jr, Van Ryzin J. Convergence rates for empirial Bayes two-action problems II: continuous case [J]. Ann Math Statist, 1972, 43(3): 934-937.

[3] Zhang Shunpu, Karunamuni R J. Empirical Bayes estimation for the continuous one-parameter exponential family with error in variables [J]. Statistics and Decision, 1997, 15(3): 261-280.

[4] Shang S Gupta, Li Jianjun. One empirical Bayes procedures for selecting good populations in a positive exponential family [J]. Journal of Statistical Planning and Inference, 2005, 129(1): 3-18.

[5] 韦来生. 刻度指数族参数的经验 Bayes 检验问题: NA 样本情形 [J]. 应用数学学报, 2000, 23(3): 403-412.

[6] 陈家清, 刘次华. 伽玛分布族参数的经验 Bayes 双边检验的收敛速度: NA 样本情形 [J]. 数学杂志, 2007, 27(1): 53-59.

[7] 陈家清, 刘次华. 负相伴样本情形线性指数分布族参数的经验 Bayes 双侧检验问题 [J]. 数学理论与应用, 2006, 26(1): 42-47.

[8] Shi Yimin, Shi Xiaolin, Yan Jie. Two-sided empirical Bayes test for truncation parameter using NA samples [J]. Information Science, 2005, 173(1): 65-74.

[9] 章溢, 吕凤虎. 峰度与偏度系数的近似经验贝叶斯估计 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2016, 40(4): 358-362.

[10] 雷庆祝, 秦永松. 强混合样本下连续型单参数指数分布族的经验贝叶斯估计 [J]. 应用数学, 2016, 29(1): 143-151.

[11] 陈家清, 胡锦霞, 刘次华. 基于 Stein 损失污染数据情形下刻度参数的经验贝叶斯估计 [J]. 应用数学, 2017, 30(3): 562-569.

[12] 雷庆祝, 秦永松, 罗敏. 强混合样本下刻度指数分布族参数的经验贝叶斯估计和检验 [J]. 广西师范大学学报: 自然科学版, 2017, 35(3): 63-74.

[13] 鄢伟安, 宋保维, 段桂林, 等. 威布尔部件的经验贝叶斯评估 [J]. 系统工程理论与实践, 2013, 33(11): 2980-2985.

[14] Prakasa Rao B L S. Nonparametric function estimation [M]. New York: Academic Press, 1983.

[15] Pan Jianmin. On the convergence rates in the central limit theorem for negatively associated sequences [J]. Chinese Journal of Applied Probability and Statisties, 1997, 13(2): 183-192.

[16] Joag-Dev K, Proschan F. Negative association of random variable with application [J]. Ann Statist, 1983, 11(1): 286-295.

[17] 苏淳, 赵林城, 王岳宝. NA 序列的矩不等式与弱收敛 [J]. 中国科学, 1996, 26(12): 1091-1099.

The Empirical Bayes Test for Parameter of Exponential-Weibull Family

GUI Guoxiang[1], HUANG Juan[2]

(1. College of Mathematics and Informatics, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi 330022, China;
2. College of Mathematics and Computer, Guangdong Ocean University, Zhanjiang Guangdong 524088, China)

Abstract: The empirical Bayes test problem for parameter of Exponential-Weibull distribution under linear loss is studied by the empirical Bayes approach. Test rule for the parameter of Exponential-Weibull distribution is constructed under the condition that the past samples are long range associated. The asymptotically optimal property and convergence rates for the proposed empirical Bayes test rules are obtained.

Key words: long range negative associated; empirical Bayes test; asymptotic optimality; convergence rates

(责任编辑: 曾剑锋)