文章编号: 1000 －5862(2019) 05 －0508 －05

一类非线性差分方程亚纯解的增长性

钟进凤，刘慧芳*
(江西师范大学数学与信息科学学院，江西 南昌 330022)

摘要: 应用 Nevanlinna 理论研究非线性差分方程 $f^n(z)+P_d(z,f)=p_1\mathrm{e}^{\alpha_1(z)}+p_2\mathrm{e}^{\alpha_2(z)}$ 亚纯解的存在性，其中 $P_d(z,f)$ 为 f 的 d 次差分多项式，p_1，p_2 为 f 的非零小函数，α_1，α_2 为级小于 1 的非常数整函数，得到上述方程存在超级小于 1 的亚纯解的必要条件和解的表达式.

关键词: 差分方程; 亚纯函数; 增长级
中图分类号: O 174.52　**文献标志码:** A　**DOI:** 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2019.05.12

0 引言及主要结果

本文使用 Nevanlinna 值分布理论的标准记号和基本结果[1-3]. 设 $f(z)$，$\alpha(z)$ 为复平面上的亚纯函数，若 $T(r,\alpha)=S(r,f)$，则称 α 为 f 的小函数，其中 $S(r,f)$ 表示任一满足 $S(r,f)=o(T(r,f))$ ($r\to\infty$，$r\notin E$) 的实函数，E 为对数测度有限的集合. 分别用 $\sigma(f)$ 和 $\sigma_2(f)$ 表示 f 的级和超级.

复域微分方程亚纯解的存在性是微分方程理论中一个重要而又困难的研究问题，尤其是对非线性微分方程而言. 文献[4]证明了方程 $4f^3(z)+3f''=-\sin 3z$ 恰有 3 个整函数解 $f_1(z)=\sin z$，$f_2(z)=(\sqrt{3}\cos z-\sin z)/2$ 和 $f_3(z)=-(\sqrt{3}\cos z+\sin z)/2$. 考虑到 $\sin 3z$ 为 e^{3iz} 和 e^{-3iz} 的线性组合，下述更一般类型的非线性微分方程

$$f^n(z)+Q_d(z,f)=p_1(z)\mathrm{e}^{\alpha_1 z}+p_2(z)\mathrm{e}^{\alpha_2 z}\quad(1)$$

亚纯解的存在性得到广泛研究[5-9]，其中有下述结果.

定理 A[6]　设 $n\geqslant 2$ 为整数，$Q_d(z,f)$ 为 f 的 $d(\leqslant n-2)$ 次微分多项式，p_1，p_2 为 e^z 的非零小函数. 若复数 α_1，α_2 满足 $\alpha_1<0<\alpha_2$，且方程(1) 存在超越整函数解 f，则

$$\alpha_1+\alpha_2=0,\ f=c_1\beta_1\mathrm{e}^{\alpha_1 z/n}+c_2\beta_2\mathrm{e}^{\alpha_2 z/n},$$

其中 c_j 为常数且 $\beta_j^n=p_j(j=1,2)$.

近年来，随着 Nevanlinna 理论差分模拟的建立，许多学者开始考虑微分方程(1) 的差分模拟，探求差分(或微差分) 方程

$$f^n(z)+P_d(z,f)=p_1(z)\mathrm{e}^{\alpha_1 z}+p_2(z)\mathrm{e}^{\alpha_2 z}\quad(2)$$

亚纯解的存在性[10-13]，其中 $P_d(z,f)$ 为 f 的 d 次差分(或微差分) 多项式. 相应于定理 A 的差分模拟，文献[12]证明了下述结果.

定理 B[12]　设 $n\geqslant 2$ 为整数，$P_d(z,f)$ 为 f 的 $d(\leqslant n-2)$ 次差分多项式，$P_d(z,0)\not\equiv 0$，p_1，p_2 为 e^z 的非零小函数. 若复数 α_1，α_2 满足 $\alpha_1/\alpha_2<0$，且方程(2) 存在有限级整函数解 f，则

$$\alpha_1+\alpha_2=0,\ f=\gamma_1\mathrm{e}^{\alpha_1 z/n}+\gamma_2\mathrm{e}^{\alpha_2 z/n},$$

其中 $\gamma_j^n=p_j(j=1,2)$.

定理 B 探讨了差分方程(2) 的整函数解的存在性. 本文研究差分方程(2) 的亚纯解的存在性，同时考虑将方程(2) 右端级为 1 的亚纯函数替换为超级小于 1 的亚纯函数，得到下述结果.

定理 1　设 $n\geqslant 2$ 为正整数，$P_d(z,f)$ 为 f 的 $d(\leqslant n-2)$ 次差分多项式且 $P_d(z,0)\not\equiv 0$，p_1，p_2 为 f 的非零小函数，α_1，α_2 为级小于 1 的非常数整函数，满足 $\alpha_1/\alpha_2=\rho<0$，若差分方程

$$f^n(z)+P_d(z,f)=p_1(z)\mathrm{e}^{\alpha_1(z)}+p_2(z)\mathrm{e}^{\alpha_2(z)}\quad(3)$$

存在满足 $\sigma_2(f)<1$ 和 $N(r,f)=S(r,f)$ 的亚纯解，则 $\rho=-1$，且

(i) $\sigma(f)=\sigma(\mathrm{e}^{\alpha_2})$，$\sigma_2(f)=\sigma_2(\mathrm{e}^{\alpha_2})=\sigma(\alpha_2)$;

(ii) $f=s_1(z)\mathrm{e}^{\alpha_1(z)/n}+s_2(z)\mathrm{e}^{\alpha_2(z)/n}$，其中 s_j 为 f 的小函数满足 $s_j^n=p_j(j=1,2)$.

若令 $g(z)=f(z)+R(z)/n$，则由定理 1 可得下述结果.

收稿日期: 2019-03-11
基金项目: 国家自然科学基金(11661044) 资助项目.
通信作者: 刘慧芳(1973-) ，女，江西丰城人，教授，博士，主要从事复分析研究. E-mail: liuhuifang73@sina.com

定理 2　设 $n, P_d(z,f), p_j, \alpha_j (j=1,2)$ 满足定理 1 的条件, R 为 f 的非零小函数. 若差分方程

$$f^n(z)+R(z)f^{n-1}(z)+P_d(z,f)=p_1(z)e^{\alpha_1(z)}+p_2(z)e^{\alpha_2(z)}$$

存在满足 $\sigma_2(f)<1$ 和 $N(r,f)=S(r,f)$ 的亚纯解, 则 $\rho=-1$, 且

$$f=s_1(z)e^{\alpha_1(z)/n}+s_2(z)e^{\alpha_2(z)/n}-R(z)/n,$$

其中 s_j 为 f 的小函数, 满足 $s_j^n=p_j(j=1,2)$.

当 $d=1$ 时, 应用定理 1 的结论得到了一类不存在超级小于 1 的亚纯解的差分方程.

定理 3　设 $n\geqslant 3$ 为正整数, $\alpha(z)$ 为非常数多项式, $p_j, q_j (j=1,2)$ 为 f 的非零小函数, 则

$$f^n(z)+q_1(z)f(z+c)+q_2(z)=p_1(z)e^{\alpha(z)}+p_2(z)e^{-\alpha(z)} \tag{4}$$

不存在超级小于 1 的亚纯解.

1　引理

引理 1[14]　设 $f(z)$ 为 $\sigma_2(f)<1$ 的超越亚纯函数, 则对任意非零复数 c 有

$$m(r,f(z+c)/f(z))=S(r,f).$$

引理 2　设 $\alpha(z)$ 为非常数整函数, q 为非零实数, 则

$$T(r,e^{q\alpha(z)})=|q|T(r,e^{\alpha(z)})+O(1).$$

证　(i) 若 $q>0$, 令 $E=\{\theta \mid \theta\in[0,2\pi), \mathrm{Re}\alpha(z)>0\}$, 则

$$T(r,e^{q\alpha(z)})=m(r,e^{q\alpha(z)})=\frac{1}{2\pi}\int_E \log e^{q\mathrm{Re}\alpha(re^{i\theta})}d\theta=\frac{q}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|e^{\alpha(re^{i\theta})}|d\theta=qT(r,e^{q\alpha(z)}).$$

(ii) 若 $q<0$, 则由 (i) 得

$$T(r,e^{q\alpha(z)})=T(r,e^{-q\alpha(z)})+O(1)=-qT(r,e^{\alpha(z)})+O(1).$$

引理 2 得证.

引理 3[15]　设 $h(z)$ 为非常数整函数, $f(z)=e^{h(z)}$, 则

$$T(r,h)=S(r,f), T(r,h')=S(r,f).$$

引理 4　设 $\alpha_1(z), \alpha_2(z)$ 为级小于 1 的非常数整函数, 满足 $\alpha_1/\alpha_2=\rho<0$, p_0, p_1, p_2 为 $e^{\alpha_2(z)}$ 的非零小函数, 则

$$m(r,1/(p_2e^{\alpha_2(z)}+p_1e^{\alpha_1(z)}+p_0))=S(r,e^{\alpha_2(z)}).$$

证　不妨设 $p_0\equiv 1$, 令

$$g=p_2e^{\alpha_2}+p_1e^{\alpha_1}+1, \tag{5}$$

由引理 2 得 $T(r,g)\leqslant(1+|\rho|)T(r,e^{\alpha_2})+S(r,e^{\alpha_2})$. 故有

$$S(r,g)=S(r,e^{\alpha_2}). \tag{6}$$

微分 (5) 式并消去 e^{α_2} 得

$$g'-b_2g=b_1p_1e^{\alpha_1}-b_2, \tag{7}$$

其中 $b_1=p_1'/p_1+\alpha_1'-p_2'/p_2-\alpha_2, b_2=p_2'/p_2+\alpha_2$. 注意到 $b_1b_2\not\equiv 0$. 否则由 $b_1\equiv 0$ (或 $b_2\equiv 0$) 得 $e^{\alpha_2-\alpha_1}=cp_1/p_2$ (或 $cp_2e^{\alpha_2}\equiv 1$), 其中 c 为非零常数, 从而由引理 2 得 $T(r,e^{\alpha_2})=S(r,e^{\alpha_2})$, 矛盾. 由 b_1, b_2 的表达式、引理 2 和引理 3 得

$$T(r,b_j)=S(r,e^{\alpha_2})(j=1,2). \tag{8}$$

微分 (7) 式并消去 e^{α_1} 得

$$g''-((b_1p_1)'/(b_1p_1)+\alpha_1'+b_2)g'+bg=b. \tag{9}$$

其中 $b=b_2((b_1p_1)'/(b_1p_1)+\alpha_1')-b_2'$. 注意到 $b\not\equiv 0$. 否则由 $b\equiv 0$ 得 $b_2/(b_1p_1)=ce^{\alpha_1}$, 其中 c 为非零常数, 再结合引理 2 和 (8) 式得 $T(r,e^{\alpha_2})=T(r,e^{\alpha_1})/|\rho|=S(r,e^{\alpha_2})$, 矛盾. 由 (9) 式得

$$\frac{1}{g}=\frac{1}{b}\cdot\frac{g''}{g}-\frac{(b_1p_1)'/(b_1p_1)+\alpha_1'+b_2}{b}\cdot\frac{g'}{g}+1. \tag{10}$$

结合 (6) 式、(8) 式、(10) 式、引理 2 和引理 3 得

$$m(r,1/g)=S(r,e^{\alpha_2}).$$

引理 4 得证.

引理 5　设 $\alpha_1(z), \alpha_2(z)$ 为级小于 1 的非常数整函数, 满足 $\alpha_1/\alpha_2=\rho<0$, p_0, p_1, p_2 为 $e^{\alpha_2(z)}$ 的非零小函数, 则

$$m(r,e^{\alpha_j}/(p_2e^{\alpha_2(z)}+p_1e^{\alpha_1(z)}+p_0))=S(r,e^{\alpha_2(z)})(j=1,2).$$

证　只需证 $j=1$ 的情形. 由于

$$e^{\alpha_1}/(p_2e^{\alpha_2}+p_1e^{\alpha_1}+p_0)=1/(p_2e^{\alpha_2-\alpha_1}+p_1)-p_0/((p_2e^{\alpha_2}+p_1e^{\alpha_1}+p_0)(p_2e^{\alpha_2-\alpha_1}+p_1)),$$

再结合引理 4, 即得引理 5 结论成立.

类似于文献 [15] 中差分 Clunie 引理的证明, 再结合引理 1 可得下述结论.

引理 6　设 f 为方程 $f(z)^nP(f)=Q(f)$ 的一个超级小于 1 的非常数亚纯解, 其中 $P(f), Q(f)$ 为 f 的差分多项式, 系数为 f 的小函数. 若 $Q(f)$ 的次数不超过 n, 则

$$m(r,P(f))=S(r,f).$$

引理 7[16]　设 $f_1(z),\cdots,f_n(z)(n\geqslant 2)$ 为亚纯函数, $g_1(z),\cdots,g_n(z)$ 为整函数, 满足下列条件:

(i) $\sum\limits_{j=1}^{n}f_j(z)e^{g_j(z)}\equiv 0$;

(ii) 当 $1\leqslant j<k\leqslant n$ 时, $g_j(z)-g_k(z)$ 不为常数;

(iii) 当 $1\leqslant j\leqslant n, 1\leqslant t<k\leqslant n$ 时, $T(r,f_j)=$

$o\{T(r,e^{g_l-g_k})\}(r\to\infty,r\notin E)$,

其中 E 为对数测度有限的集合,则

$$f_j(z)\equiv 0(j=1,\cdots,n).$$

由文献[4]中的引理 2.3 可得

引理 8 设 f 为 $\sigma_2(f)<1$ 的超越亚纯函数,则对任意非零复数 c 有

$$N(r,1/f(z+c))=N(r,1/f(z))+S(r,f(z)).$$

2 定理的证明

定理 1 的证明 设 $f(z)$ 为方程(3)的满足 $N(r,f)=S(r,f)$ 和 $\sigma_2(f)<1$ 的亚纯解,由(3)式和 $\alpha_1/\alpha_2<0$ 可得 f 为超越亚纯函数. 令 $g(z)=P_d(z,f)$,微分(3)式并分别消去 e^{α_1},e^{α_2} 得

$$(p_1'+p_1\alpha_1')f^n-np_1f^{n-1}f'+Q_{n-2}^1(f)=-A_1(z)e^{\alpha_2},\quad(11)$$

$$(p_2'+p_2\alpha_2')f^n-np_2f^{n-1}f'+Q_{n-2}^2(f)=A_1(z)e^{\alpha_1},\quad(12)$$

其中 $Q_{n-2}^j(f)=(p_j'+p_j\alpha_j')g-p_jg'(j=1,2)$,$A_1=p_1(p_2'+p_2\alpha_2')-p_2(p_1'+p_1\alpha_1')$. 设

$$g(z)=\sum_{\lambda\in I}a_\lambda(z)\prod_{j=1}^{t_\lambda}f(z+\beta_{\lambda_j})^{l_{\lambda_j}},\quad(13)$$

其中 I 为 λ 的有限指标集,t_λ,l_{λ_j} 为自然数,β_{λ_j} 为相互判别的复数. 令

$$g_{\lambda_j}(z)=f(z+\beta_{\lambda_j})/f(z),$$

代入(13)式得

$$g(z)=\sum_{m=0}^{d}b_m(z)f^m(z),\quad(14)$$

其中 $l_\lambda=\sum_{j=1}^{t_\lambda}l_{\lambda_j}$,$d=\max_{\lambda\in I}\{l_\lambda\}$,$b_m(z)=\sum_{l_\lambda=m}(a_\lambda(z)\cdot\prod_{j=1}^{t_\lambda}g_{\lambda_j}(z)^{l_{\lambda_j}})$,且由引理 1 得 $m(r,b_j)=S(r,f)$. 微分(13)式得

$$g'(z)=\sum_{\lambda\in I}\left(a_\lambda'+\sum_{j=1}^{t_\lambda}\frac{a_\lambda l_{\lambda_j}f'(z+\beta_{\lambda_j})}{f(z+\beta_{\lambda_j})}\right)\prod_{j=1}^{t_\lambda}f(z+\beta_{\lambda_j})^{l_{\lambda_j}}:=\sum_{m=0}^{d}c_m(z)f^m(z).\quad(15)$$

由引理 1 和对数导数引理得 $m(r,c_j)=S(r,f)$. 于是,由(3)式、(14)式和引理 2 得

$$nT(r,f)=m(r,f^n)+S(r,f)\leqslant m(r,p_1e^{\alpha_1(z)}+p_2e^{\alpha_2(z)})+m(r,g)+O(1)\leqslant(|\rho|+1)T(r,e^{\alpha_2})+(n-2)T(r,f)+S(r,f),$$

即

$$T(r,f)\leqslant(|\rho|+1)T(r,e^{\alpha_2(z)})/2+S(r,f).\quad(16)$$

断言 $A_1(z)\not\equiv 0$. 否则由 A_1 的表达式得 $p_2e^{\alpha_2}=cp_1e^{\alpha_1}$,其中 c 为非零常数. 再结合(16)式和引理 2 得 $T(r,e^{\alpha_2-\alpha_1})=(1-\rho)T(r,e^{\alpha_2})=S(r,f)=S(r,e^{\alpha_2})$,矛盾. 另一方面,由(11)式、(14)~(16)式、引理 2 和引理 3 得

$$T(r,e^{\alpha_2(z)})=m(r,e^{\alpha_2(z)})\leqslant T(r,A_1)+m(r,p_1'+p_1\alpha_1'-np_1f'/f)f^n+\sum_{m=0}^{d}(((p_1'+p_1\alpha_1')b_m-p_1c_m)f^m)+O(1)\leqslant nT(r,f)+S(r,f)+S(r,e^{\alpha_2(z)}).\quad(17)$$

因此由(16)~(17)式得 $\sigma(f)=\sigma(e^{\alpha_2})$,$\sigma_2(f)=\sigma_2(e^{\alpha_2})=\sigma(\alpha_2)$,且

$$S(r,f)=S(r,e^{\alpha_2}).\quad(18)$$

将(14)式代入(3)式得

$$1/(p_2e^{\alpha_2}+p_1e^{\alpha_1}-b_0)+\sum_{m=1}^{d}(b_m/(p_2e^{\alpha_2}+p_1e^{\alpha_1}-b_0))\cdot(1/f)^{n-m}=(1/f)^n.\quad(19)$$

从而由(18)~(19)式和引理 4 得 $nm(r,1/f)\leqslant(n-1)m(r,1/f)+S(r,f)$,即

$$m(r,1/f)=S(r,f).\quad(20)$$

另一方面,由(19)式得

$$e^{\alpha_j}/(p_2e^{\alpha_2}+p_1e^{\alpha_1}-b_0)+\sum_{m=1}^{d}(b_me^{\alpha_j}/(p_2e^{\alpha_2}+p_1e^{\alpha_1}-b_0))\cdot(1/f)^{n-m}=e^{\alpha_j}/f^n(j=1,2).\quad(21)$$

结合(18)式、(20)~(21)式和引理 5 得

$$m(r,e^{\alpha_j}/f^n)\leqslant(n-1)m(r,1/f)+S(r,f)=S(r,f)(j=1,2).$$

设 $z=re^{i\theta}$,对固定的 $r>0$,令 $E_1=\{\theta\in[0,2\pi):|e^{\alpha_2(re^{i\theta})}|\geqslant 1\}$,$E_2=[0,2\pi)-E_1$. 由 $|e^{\alpha_1(z)}|=e^{\rho\mathrm{Re}\alpha_2(z)}$ 得,当 $\theta\in E_1$ 时,

$$|e^{\alpha_1(z)+\alpha_2(z)}/f^{2n-2}(z)|\leqslant|e^{\alpha_2(z)}/f^n(z)||1/f^{n-2}(z)||e^{\alpha_1(z)}|\leqslant|e^{\alpha_2(z)}/f^n(z)||1/f^{n-2}(z)|.\quad(22)$$

当 $\theta\in E_2$ 时,

$$|e^{\alpha_1(z)+\alpha_2(z)}/f^{2n-2}(z)|\leqslant|e^{\alpha_1(z)}/f^n(z)||1/f^{n-2}(z)|.\quad(23)$$

再结合(20)式、(22)~(23)式得

$$m(r,e^{\alpha_1+\alpha_2}/f^{2n-2})\leqslant m(r,e^{\alpha_2}/f^n)+m(r,e^{\alpha_1}/f^n)+(n-2)m(r,1/f)=S(r,f).\quad(24)$$

将(11)~(12)式相乘得

$$\varphi(z)f^{2n-2}+Q(z,f)=-A_1^2(z)e^{\alpha_1+\alpha_2},\quad(25)$$

其中

$$\varphi(z)=[p_2'+\alpha_2'p_2)f-np_2f'][p_1'+\alpha_1'p_1)f-np_1f'],\quad(26)$$

$Q(z,f)$ 为次数不超过 $2n-2$ 的 f 微分差分多项式,系

数为 f 的小函数. 由(20)式、(24)~(25)式得

$$m(r,\varphi)\leqslant m(r,e^{\alpha_1+\alpha_2}/f^{2n-2})+m(r,Q(z,f)/f^{2n-2})+S(r,f)=S(r,f).$$

再结合(26)式得

$$T(r,\varphi(z))=S(r,f).\tag{27}$$

下面分 2 种情形讨论.

情形 1　$\varphi(z)\equiv 0$. 由 $A_1(z)\not\equiv 0$ 知 $(p_2'+\alpha_2'p_2)f-np_2f'$ 和 $(p_1'+\alpha_1'p_1)f-np_1f'$ 不同时为 0. 不妨设 $(p_1'+\alpha_1'p_1)f-np_1f'\equiv 0$,则

$$f^n=cp_1e^{\alpha_1},\tag{28}$$

其中 c 为非零常数. 将(28)式代入(12)式得

$$(1-1/c)A_1f^n/p_1=p_2g'-(p_2'+\alpha_2'p_2)g.\tag{29}$$

若 $c\neq 1$,由(29)式和引理 6 得 $m(r,(1-1/c)A_1f/p_1)=S(r,f)$. 再结合 $N(r,f)=S(r,f)$ 得

$$T(r,f)\leqslant m(r,(1-1/c)A_1f/p_1)+m(r,1/((1-1/c)A_1/p_1))+S(r,f)=S(r,f),$$

矛盾. 因此 $c=1$, $f=se^{\alpha_1/n}$,其中 $s^n=p_1$. 将 f 的表达式代入(3)式,再结合(14)式得

$$p_2e^{\alpha_2}=P_d(z,f)=\sum_{m=0}^{d}B_me^{m\alpha_1/n}=\sum_{m=0}^{d}B_me^{n\rho\alpha_2/n},$$

其中 $B_m=b_ms_m$ 为 f 的小函数,由引理 7 可知上式不成立.

情形 2　$\varphi(z)\not\equiv 0$. 设

$$h_j=(p_j'+\alpha_j'p_j)f-np_jf'(j=1,2).\tag{30}$$

由(18)式、(26)~(27)式得

$$N(r,1/h_j)+N(r,h_j)\leqslant N(r,h_1)+N(r,h_2)+T(r,\varphi)+O(1)=S(r,f).\tag{31}$$

解(30)式得

$$f=-p_2h_1/A_1+p_1h_2/A_1,\ f'=-(p_2'+\alpha_2'p_2)h_1/(nA_1)+(p'+\alpha_1'p_1)h_2/(nA_1).\tag{32}$$

再对(32)式的第 1 式求导得

$$f'=[(p_1/A_1)'+p_1h_2'/(A_1h_2)]h_2-[(p_2/A_1)'+p_2h_1'/(A_1h_1)]h_1.\tag{33}$$

将(33)式代入(32)式的第 2 式得

$$A_2h_1-A_3h_2=0,\tag{34}$$

其中

$$A_2=(p_2'+\alpha_2'p_2)/(nA_1)-(p_2/A_1)'-p_2h_1'/(A_1h_1),$$

$$A_3=(p_1'+\alpha_1'p_1)/(nA_1)-(p_1/A_1)'-p_1h_2'/(A_1h_2),\tag{35}$$

且由(32)式得 $T(r,A_j)=S(r,f)(j=2,3)$. 若 $A_2\not\equiv 0$,则由(27)式和(34)式得

$$T(r,h_1)=T(r,h_1^2)/2=T(r,A_3\varphi/A_2)/2=S(r,f).\tag{36}$$

再结合(27)式、(32)式和(36)式得

$$T(r,f)=T(r,fh_1/h_1)\leqslant T(r,p_2h_1^2/A_1+p_1\varphi/A_1)+T(r,h_1)+O(1)=S(r,f),$$

矛盾. 于是 $A_2(z)\equiv 0$. 从而由(34)式和 $\varphi=h_1h_2\not\equiv 0$ 得 $A_3(z)\equiv 0$. 因此由(35)式得

$$h_1=c_1A_1p_2^{(1-n)/n}e^{\alpha_2/n},h_2=c_2A_1p_1^{(1-n)/n}e^{\alpha_1/n},\tag{37}$$

其中 c_1,c_2 为非零常数. 将(37)式代入(32)式的第 1 式得

$$f=c_1s_1e^{\alpha_1/n}+c_2s_2e^{\alpha_2/n},$$

其中 s_1,s_2 为 f 的小函数且 $s_j^n=p_j(j=1,2)$. 再将 f 的表达式代入(3)式,并结合引理 7 可知 $c_1=c_2=1$,即证结论(ii).

另一方面,由(26)式和(37)式得

$$e^{(\alpha_1+\alpha_2)/n}=\varphi p_1^{(n-1)/n}p_2^{(n-1)/n}/A_1^2,$$

结合(8)式、(27)式和引理 2 得 $|(\rho+1)/n|T(r,e^{\alpha_2})=S(r,e^{\alpha_2})$,因此 $\rho=-1$. 定理 1 得证.

定理 3 的证明　设 $f(z)$ 为方程(4)的超级小于 1 的亚纯解,由(4)式知 f 为超越亚纯函数. 又由引理 8 和(4)式得

$$nN(r,f(z))=N(r,f^n(z))\leqslant N(r,f(z+c))+S(r,f(z))=N(r,f(z))+S(r,f(z)).$$

从而有 $N(r,f)=S(r,f)$. 于是由定理 1 得

$$f(z)=s_1(z)e^{\alpha(z)/n}+s_2(z)e^{-\alpha(z)/n},\tag{38}$$

其中 s_1,s_2 为 f 的小函数,满足 $s_j^n=p_j(j=1,2)$. 将(38)式代入(4)式得

$$\sum_{j=1}^{n-1}\binom{n}{j}s_1^j(z)s_2^{n-j}(z)e^{(2j-n)\alpha(z)/n}+d_1(z)e^{\alpha(z)/n}+d_2(z)e^{-\alpha(z)/n}+q(z)=0,\tag{39}$$

其中 $\binom{n}{j}$ 为二项式系数, $d_1(z)=q_1(z)s_1(z+c)e^{\beta(z)/n}$, $d_2(z)=q_2(z)s_2(z+c)e^{-\beta(z)/n}$, $\beta(z)=\alpha(z+c)-\alpha(z)$. 由于 $\deg\beta(z)=\deg\alpha(z)-1$,故由(18)式得 $T(r,d_j)=S(r,f)(j=1,2)$. 若 $n=3$,则由引理 7 和(31)式得 $q_2(z)=0$,矛盾. 若 $n\geqslant 4$,由于在集合 $\{1,\cdots,n-1\}$ 中至少存在 1 个 j_0,使得 $2j_0-n\notin\{0,1,-1\}$,所以由引理 7 和(39)式可知 $\binom{n}{j_0}s_1^{j_0}s_2^{n-j_0}=0$,矛盾. 定理 3 得证.

3　参考文献

[1] 杨乐. 值分布论及其新研究[M]. 北京: 科学出版社, 1982.

[2] Hayman W K. Meromorphic functions[M]. Oxford: Clarendon Press, 1964.

[3] Laine I. Nevalinna theory and complex differential equa-

tions [M]. Berlin: Walter de Gruyter, 1993.
[4] Yang Chungchun, Li Ping. On the transcendental solutions of a certain type of nonlinear differential equations [J]. Arch Math, 2004, 82: 442-448.
[5] Li Ping, Yang Chungchun. On the nonexistence of entire solutions of a certain type of nonlinear differential equations [J]. J Math Anal Appl, 2006, 320: 827-835.
[6] Li Ping. Entire solutions of certain type of differential equations [J]. J Math Anal Appl, 2008, 344: 253-259.
[7] Liao Liangwen, Yang Chungchun, Zhang Jianjun. On meromorphic solutions of certain type of non-linear differential equations [J]. Ann Acad Sci Fenn Math, 2013, 38: 581-593.
[8] Liao Liangwen. The new developments in the research of nonlinear complex differential equations [J]. Journal of Jiangxi Normal University: Natural Science Edition, 2015, 39(4): 331-339.
[9] Liao Liangwen, Yang Chungchun. Some new and old (unsolved) problems and conjectures on factorization theory, dynamics and functional equations of meromorphic functions [J]. Journal of Jiangxi Normal University: Natural Science Edition, 2017, 41(3): 242-247.
[10] Chen Zongxun, Yang Chungchun. On entire solutions of certain type of differential-difference equations [J]. Taiwanese J Math, 2014, 18(3): 677-685.
[11] Zhang Jie, Liao Liangwen. On entire solutions of a certain type of nonlinear differential and difference equations [J]. Taiwanese J Math, 2011, 15(5): 2145-2157.
[12] Liu Huifang, Mao Zhiqiang. On entire solutions of some type of nonlinear difference equations [J]. Acta Math Sci, 2018, 38(3): 819-828.
[13] 吴丽镐. 一类微差分方程整函数解的性质 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2018, 42(6): 582-585.
[14] Halburd R G, Korhonen R J. Holomorphic curves with shift-invariant hyperplane preimages [J]. Trans Amer Math Soc, 2014, 366(8): 4267-4298.
[15] Halburd R G, Korhonen R J. Difference analogue of the lemma on the logarithmic derivative with applications to difference equations [J]. J Math Anal Appl, 2006, 314: 477-487.
[16] Yang Chungchun, Yi Hongxun. Uniqueness theory of meromorphic functions [M]. New York: Kluwer Academic Publishers, 2003.

The Growth of Meromorphic Solutions of Some Type of Nonlinear Difference Equations

ZHONG Jinfeng, LIU Huifang*
(College of Mathematics and Informatics, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi 330022, China)

Abstract: Using Nevanlinna theory, the existence of meromorphic solutions of the nonlinear difference equation $f^n(z) + P_d(z,f) = p_1 e^{\alpha_1(z)} + p_2 e^{\alpha_2(z)}$ are investigated, where $P_d(z,f)$ is a difference polynomial in f of degree d, p_1, p_2 are non-vanishing small meromorphic functions of f, and α_1, α_2 are non-constant entire functions with order less than 1. Some necessary conditions that guarantee the above equation admits meromorphic solutions of hyper-order less than 1 and the expression for the solution are obtained.

Key words: difference equation; meromorphic function; order of growth

(责任编辑: 王金莲)