第 43 卷 第 5 期 江西师范大学学报(自然科学版) Vol. 43 No. 5
2019 年 9 月 Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science) Sep. 2019

文章编号:1000 -5862(2019)05 -0513 -05

随机 Dirichlet 级数的 Hadamard 乘积的增长性

应 锐[1],徐洪焱[2*]

(1. 上饶幼儿师范高等专科学校,江西 上饶 334000;2. 上饶师范学院数学与计算机学院,江西 上饶 334000)

摘要: 利用随机 Dirichlet 级数理论,结合 Hadamard 乘积性质,主要研究了随机 Dirichlet 级数的 Dirichlet-Hadamard 乘积级数的增长性,得到了随机 Dirichlet-Hadamard 乘积级数与原随机 Dirichlet 级数的 q-级、下 q-级、q-型、下 q-型与双下 q-型之间的关系定理.

关键词: 随机 Dirichlet 级数;整函数;双下 q-型

中图分类号: O 174.55 **文献标志码:** A **DOI:** 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2019.05.13

0 引言与相关结果

国内外许多学者对 Dirichlet 级数

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n e^{\lambda_n s}(c_n\in\mathbf{C},0<\lambda_n\uparrow+\infty,s=\sigma+\mathrm{i}t,\sigma,t\in\mathbf{R}) \tag{1}$$

的增长性与值分布做了大量的工作[1-19]. 如余家荣[1]定义了级数的最大模、最大项,最大项指标与增长级,给出级数收敛的 Knopp-Valirion 公式;孙道椿等[2-4,8-9]研究了零级、有限级、无限级级数所表示的整函数与解析函数的增长性与值分布性质;孔荫莹等[5-6,18-19]研究了 Dirichlet-Hadamard 乘积的增长性;余家荣等[10-17]研究了随机 Dirichlet 级数的增长性、Borel 线、例外小函数等值分布性质;易才凤等[7]讨论了有限级 Dirichlet 级数的逼近,给出了级数逼近算子及其系数、指数间的等价关系.

若级数(1)满足

$$0=\lambda_0<\lambda_1<\cdots<\lambda_n\uparrow+\infty, \tag{2}$$

与

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\log n/\lambda_n=0,\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\log|c_n|/\lambda_n=-\infty, \tag{3}$$

由文献[1]知,级数(1)在全平面内收敛,则$f(s)$在全平面内解析,即为整函数. 记 D 为级数(1)满足条件(2)~(3)式所表示的整函数的$f(s)$全体.

定义1 若$f(s)\in D$,定义$f(s)$的q-级与下q-级为

$$\rho=\rho_{[q]}=\limsup_{\sigma\to+\infty}\frac{\log^{[q]}\log M(\sigma,f)}{\sigma},$$

$$\chi=\chi_{[q]}=\liminf_{\sigma\to+\infty}\frac{\log^{[q]}\log M(\sigma,f)}{\sigma},$$

这里 $M(\sigma,f)=\sup\limits_{-\infty<t<+\infty}|f(\sigma+\mathrm{i}t)|$ 为$f(s)$的最大模,且 $\log^{[0]}x=x,\log^{[q]}x=\log\log^{[q-1]}x$.

定义2 设$f(s)\in D$,若其q-级$\rho\in(0,\infty)$,则定义$f(s)$的q-型 T 与下q-型 τ 为

$$T=T_{[q]}=\limsup_{\sigma\to+\infty}\frac{\log^{[q]}M(\sigma,f)}{e^{\rho\sigma}},$$

$$\tau=\tau_{[q]}=\liminf_{\sigma\to+\infty}\frac{\log^{[q]}M(\sigma,f)}{e^{\rho\sigma}}.$$

定义3[19] 设$f(s)\in D$,若其q-级$\rho\in(0,\infty)$与下q-级χ且$\rho\neq\chi$,则定义$f(s)$的双下q-型τ_χ为

$$\tau_\chi=\liminf_{\sigma\to+\infty}\frac{\log^{[q]}M(\sigma,f)}{e^{\chi\sigma}}.$$

关于 Dirichlet 级数$f(s)$的q-级、下q-级、q-型、下q-型与双下q-型,文献[5-6,19]给出了以下结果.

定理A[5-6] 设 Dirichlet 级数$f(s)\in D$,具有q-级ρ与q-型T,则

$$\rho=\limsup_{n\to\infty}\frac{\lambda_n\log^{[q]}\lambda_n}{\log|c_n|^{-1}},$$

$$T=\limsup_{n\to\infty}|c_n|^{\rho/\lambda_n}\log^{[q-1]}\frac{\lambda_n}{e\rho}.$$

定理B[5-6] 设 Dirichlet 级数$f(s)\in D$,具有下q-级χ与下q-型τ,则

收稿日期:2019-03-05

基金项目:国家自然科学基金(11561033),江西省自然科学基金(20181BAB201001)和江西省教育厅科技课题(GJJ180734,GJJ170788,GJJ170759)资助项目.

通信作者:徐洪焱(1980-),男,江西乐平人,副教授,主要从事复分析理论及应用研究. E-mail:xhyhhh@126.com

$$\chi \leqslant \liminf_{n\to\infty} \frac{\lambda_n \log^{[q]} \lambda_n}{\log |c_n|^{-1}},$$

上式等号成立当且仅当

$$\psi(n) = \frac{\log|c_n| - \log|c_{n+1}|}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}$$

为关于 n 的非减函数;

$$\tau \leqslant \liminf_{n\to\infty} |c_n|^{\chi/\lambda_n} \log^{[q-1]} \frac{\lambda_n}{e\rho},$$

上式等号成立当且仅当 $\psi(n)$ 为关于 n 的非减函数且 $\log^{[q-1]}\lambda_n \sim \log^{[q-1]}\lambda_{n+1}$.

定理 C[19] 设 Dirichlet 级数 $f(s) \in D$,具有下 q-级 χ. 如果 $\lambda_n \sim \lambda_{n+1}$,则

$$\tau_\chi \geqslant \liminf_{n\to\infty} |c_n|^{\chi/\lambda_n} \log^{[q-1]} \frac{\lambda_n}{e\chi},$$

进一步,如果存在一正整数 n_0,$\psi(n)$ 为关于 $n(>n_0)$ 的非减函数,则

$$\tau_\chi = \liminf_{n\to\infty} |c_n|^{\chi/\lambda_n} \log^{[q-1]} \frac{\lambda_n}{e\chi}.$$

2009 年,孔荫莹在文献[5]中定义了 Dirichlet 级数的 Hadamard 乘积.

定义 4[5-6] 设 $f_1(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\gamma_n s}$,$f_2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{\xi_n s}$,且 $f_1(s)$,$f_2(s) \in D$,构造它们的 Dirichlet-Hadamard 乘积如下:

$$F(s) = (f_1 \Delta f_2)(\mu,\nu;s) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\lambda_n s}, c_n = a_n^{\mu} b_n^{\nu},$$

$\lambda_n = (\gamma_n + \xi_n)/2$,

其中 μ 和 ν 为正实数,a_n,$b_n \in \mathbf{C}$.

由文献[5]得

定理 D[5-6] 设 $f_1(s)$,$f_2(s) \in D$,它们的 q-级、下 q-级分别为 ρ_1,ρ_2,χ_1,χ_2,q-型分别为 T_1,T_2,若它们满足

$$\gamma_n = \eta \xi_n, \eta \in (0,\infty), \tag{4}$$

以及 $\psi_1(n) = \dfrac{\log|a_n| - \log|a_{n+1}|}{\gamma_{n+1} - \gamma_n}$ 和 $\psi_2(n) = \dfrac{\log|b_n| - \log|b_{n+1}|}{\xi_{n+1} - \xi_n}$ 为 2 个关于 n 的非减函数,则

(i) Dirichlet-Hadammard 乘积 $F(s)$ 的 q-级 ρ、下 q-级 χ 满足

$$\frac{\chi_1\chi_2(2+\eta^{-1}+\eta)}{2\nu\chi_1(1+\eta^{-1}) + 2\mu\chi_2(1+\eta)} \leqslant \chi \leqslant \rho \leqslant \frac{\rho_1\rho_2(2+\eta^{-1}+\eta)}{2\nu\rho_1(1+\eta^{-1}) + 2\mu\rho_2(1+\eta)};$$

(ii) 若 $\rho_1 = \chi_1$ 和 $\rho_2 = \chi_2$,则 Dirichlet-Hadamard 乘积 $F(s)$ 也是 $\rho_{[q]}$ 正规增长的,并且其 q-级满足

$$\rho = \frac{\rho_1\rho_2(2+\eta^{-1}+\eta)}{2\nu\rho_1(1+\eta^{-1}) + 2\mu\rho_2(1+\eta)}, \rho_1,\rho_2 \in (0,\infty);$$

(iii) 若 ρ_1,$\rho_2 \in (0,\infty)$,则 $F(s)$ 的 q-型满足

$$T \leqslant \begin{cases} T_1^{2\mu\rho/(\rho_1(1+\eta^{-1}))} T_2^{2\nu\rho/(\rho_2(1+\eta))}, & q = 2,3,4,5,\cdots, \\ \dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\rho_1 T_2(1+\eta^{-1})}{2}\right)^{2\mu\rho/(\rho_1(1+\eta^{-1}))} \cdot \left(\dfrac{\rho_2 T_1(1+\eta)}{2}\right)^{2\nu\rho/(\rho_2(1+\eta))}, & q = 1. \end{cases}$$

1 随机 Dirichlet 级数的 Hadamard 乘积

随机 Dirichlet 级数的研究最早是由 R. E. A. C. Paley 与 A. Zygmund[18] 开始的. 随后,余家荣等[1,10,12-13,15] 讨论了 Steinhaus-Dirichlet 和 Rademacher-Dirichlet 级数的收敛性、增长性与值分布,得到了许多重要的结果. 最近,李云霞等在文献[20]中讨论了随机 Dirichlet 级数的 Hadamard 乘积的增长性,得到了一系列结果. 本文将继续讨论随机 Dirichlet 级数的 Hadamard 乘积级数的增长性,改进并补充文献[20]的结果. 在叙述本文的主要结果前,先介绍下列定义.

类似于定义 4,定义随机 Dirichlet 级数的 Hadamard 乘积如下:

定义 5[20] 设 $f_1(s,\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n(\omega) e^{\gamma_n s}$,$f_2(s,\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n X_n(\omega) e^{\xi_n s}$,构造它们的 Dirichlet-Hadamard 乘积如下:

$$F(s,\omega) = (f_1 \Delta f_2)(\mu,\nu;s,\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(\omega) e^{\lambda_n s},$$

其中 $c_n(\omega) = [a_n X_n(\omega)]^{\mu} [b_n X_n(\omega)]^{\nu}$,$\lambda_n = (\gamma_n + \xi_n)/2$,$\mu$ 和 ν 是正实数,a_n,b_n,γ_n 与 ξ_n 均如定义 4 中所述.

若令 $M(\sigma,F,\omega) = \sup_{-\infty<t<+\infty} |F(\sigma+it,\omega)|$ 为 $F(s,\omega)$ 的最大模,类似定义 1 ~ 定义 3 有随机 Dirichlet 级数的 q-级 $\rho(\omega)$,下 q-级 $\chi(\omega)$,q-型 $T(\omega)$,下 q-型 $\tau(\omega)$ 与双下 q-型 $\tau_\chi(\omega)$,这里就不一一列举了.

定理 1 设 $f_1(s,\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n(\omega) e^{\gamma_n s}$,$f_2(s,\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n X_n(\omega) e^{\xi_n s}$,$\{X_n(\omega)\}$ 满足:$\exists \alpha,\beta > 0$,使得

$$\sup_{n\geqslant 1}\{E|X_n(\omega)|^{\alpha}\}<\infty, \tag{5}$$

$$\sup_{n\geqslant 1}\{E|X_n(\omega)|^{-\beta}\}<\infty, \tag{6}$$

若 $f_1(s,\omega)$, $f_2(s,\omega)$ 的辅助级数 $f_1(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{\gamma_n s}\in D$, $f_2(s)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n e^{\xi_n s}\in D$,具有 q-级以及下 q-级分别为 ρ_1, ρ_2, χ_1, χ_2, q-型分别为 T_1, T_2,且满足(4) 式以及 $\psi_1(n)=\dfrac{\log|a_n|-\log|a_{n+1}|}{\gamma_{n+1}-\gamma_n}$ 和 $\psi_2(n)=\dfrac{\log|b_n|-\log|b_{n+1}|}{\xi_{n+1}-\xi_n}$ 为 2 个关于 n 的非减函数,则

(i) Dirichlet-Hadammard 乘积 $F(s,\omega)$ 的 q-级 $\rho(\omega)$ 与下 q-级 $\chi(\omega)$ a. s. 满足

$$\frac{\chi_1\chi_2(2+\eta^{-1}+\eta)}{2(\nu\chi_1(1+\eta^{-1})+\mu\chi_2(1+\eta))}\leqslant\chi(\omega)\leqslant\rho(\omega)\leqslant\frac{\rho_1\rho_2(2+\eta^{-1}+\eta)}{2(\nu\rho_1(1+\eta^{-1})+\mu\rho_2(1+\eta))};$$

(ii) 若 $\rho_1=\chi_1$ 和 $\rho_2=\chi_2$,则 Dirichlet-Hadamard 乘积 $F(s,\omega)$ a. s. 是 $\rho_{[q]}$ 正规增长的,并且它的 q-级 $\rho(\omega)$ a. s. 满足

$$\rho(\omega)=\frac{\rho_1\rho_2(2+\eta^{-1}+\eta)}{2\nu\rho_1(1+\eta^{-1})+2\mu\rho_2(1+\eta)},$$

ρ_1, $\rho_2\in(0,\infty)$;

(iii) 若 ρ_1, $\rho_2\in(0,\infty)$,则 $F(s,\omega)$ 的 q-型 $T(\omega)$ a. s. 满足

$$T(\omega)\leqslant\begin{cases}T_1^{2\mu\rho(\omega)/(\rho_1(1+\eta^{-1}))}\,T_2^{2\nu\rho(\omega)/(\rho_2(1+\eta))}, & q=2,3,\cdots,\\ \dfrac{1}{\rho(\omega)}\left(\dfrac{\rho_1T_2(1+\eta^{-1})}{2}\right)^{2\mu\rho(\omega)/(\rho_1(1+\eta^{-1}))}\cdot\\ \left(\dfrac{\rho_2T_1(1+\eta)}{2}\right)^{2\nu\rho(\omega)/(\rho_2(1+\eta))}, & q=1;\end{cases}$$

(iv) 若 $f_1(s)$, $f_2(s)$ 具有双下 q-型分别为 τ_{χ_1}, τ_{χ_2} 且

$$\log^{[q-1]}\gamma_{n-1}\sim\log^{[q-1]}\gamma_n,\ \log^{[q-1]}\xi_{n-1}\sim\log^{[q-1]}\xi_n, \tag{7}$$

若 $F(s)$ 的下 q-级 χ 满足

$$\chi=\frac{\chi_1\chi_2(2+\eta^{-1}+\eta)}{2(\nu\chi_1(1+\eta^{-1})+\mu\chi_2(1+\eta))}, \tag{8}$$

则 $F(s,\omega)$ 的双下 q-型 $\tau_\chi(\omega)$ a. s. 满足

$$\tau_\chi(\omega)\geqslant\begin{cases}\tau_{\chi_1}^{2\mu\chi/(\chi_1(1+\eta^{-1}))}\,\tau_{\chi_2}^{2\nu\chi/(\chi_2(\omega)(1+\eta))}, & q=2,3,\cdots,\\ \dfrac{1}{\chi}\left(\dfrac{\chi_1\tau_{\chi_1}(1+\eta^{-1})}{2}\right)^{2\mu\chi/(\chi_1(1+\eta^{-1}))}\cdot\\ \left(\dfrac{\chi_2\tau_{\chi_2}(1+\eta)}{2}\right)^{2\nu\chi/(\chi_2(1+\eta))}, & q=1.\end{cases}$$

2　一些引理

引理 1[1]　(i) 若 $\{X_n(\omega)\}$ 满足(5) 式,则 $\forall\omega\in\Omega$ a. s. $\exists N_1(\omega)$,使得当 $n>N_1(\omega)$ 时,$|X_n(\omega)|\leqslant n^{2/\alpha}$;

(ii) 若 $\{X_n(\omega)\}$ 满足(6) 式,则 $\forall\omega\in\Omega$ a. s. $\exists N_2(\omega)$,使得当 $n>N_2(\omega)$ 时,$|X_n(\omega)|\geqslant n^{2/\beta}$;

(iii) 若 $\{X_n(\omega)\}$ 满足(5) ~(6) 式,则 $\forall\omega\in\Omega$ a. s. $\exists N(\omega)$,使得当 $n>N(\omega)$ 时,$n^{-k_0}\leqslant|X_n(\omega)|\leqslant n^{k_0}$,其中 $k_0\geqslant\max\{2\alpha^{-1},2\beta^{-1}\}$, $k_0\in\mathbf{N}_+$.

引理 2　若 $f_1(s,\omega)$, $f_2(s,\omega)$ 的辅助级数 $f_1(s)\in D$, $f_2(s)\in D$,且满足(4) 式,$\{X_n(\omega)\}$ 满足(5) 式,则 $F(s,\omega)$ 的收敛横坐标 $\sigma_c(\omega)$ 满足

$$\sigma_c(\omega)=\sigma_c=-\infty,\ \text{a. s.},$$

其中 σ_c 为 $F(s)$ 的收敛横坐标.

证　由假设与引理 1 知

$$\log|c_n(\omega)|=\mu(\log|a_n|+\log|X_n(\omega)|)+\nu(\log|b_n|+\log|X_n(\omega)|)\leqslant\mu(\log|a_n|+(2\log n)/\alpha)+\nu(\log|b_n|+(2\log n)/\alpha),\ \text{a. s.},$$

根据 Knopp-Valiron 公式,由(4) 式可得

$$\sigma_c(\omega)=\limsup_{n\to\infty}\frac{\log|c_n(\omega)|}{\lambda_n}\leqslant 2\limsup_{n\to\infty}\frac{\mu\log|a_n|+\nu\log|b_n|}{\gamma_n+\xi_n}+4(\mu+\nu)\frac{1}{\alpha}\cdot\limsup_{n\to\infty}\frac{\log n}{\gamma_n+\xi_n}\leqslant 2\limsup_{n\to\infty}\frac{\mu\log|a_n|}{(1+\eta^{-1})\gamma_n}+2\limsup_{n\to\infty}\frac{\nu\log|b_n|}{(1+\eta)\xi_n}+4\frac{\mu+\nu}{\alpha(1+\eta)}\limsup_{n\to\infty}\frac{\log n}{\xi_n}\leqslant-\infty,\ \text{a. s.}.$$

故 $\sigma_c(\omega)=-\infty$, a. s..

引理 3[6]　设 $\psi_1(n)=\dfrac{\log|a_n|-\log|a_{n+1}|}{\gamma_{n+1}-\gamma_n}$ 和 $\psi_2(n)=\dfrac{\log|b_n|-\log|b_{n+1}|}{\xi_{n+1}-\xi_n}$ 为 2 个关于 n 的非减函数且满足(4) 式,则 $\psi(n)$ 也是关于 n 的非减函数,其中 c_n 与 λ_n 如定义 4 所述.

3　定理 1 的证明

由题设与文献[20]的证明知,$f_1(s,\omega)$, $f_2(s,\omega)$ 的 q-级分别为 $\rho_1(\omega)$, $\rho_2(\omega)$,下 q-级分别为 $\chi_1(\omega)$, $\chi_2(\omega)$ 与其辅助级数 $f_1(s)$, $f_2(s)$ 的 q-级 ρ_1, ρ_2,下 q-级 χ_1, χ_2 满足

$\rho_j(\omega) = \rho_j$, a. s. , $\chi_j(\omega) = \chi_j$, a. s. , $j = 1, 2$.

(i) **由定理** A **知**, $\forall \varepsilon > 0$, **存在** 2 **个正整数** N_1, N_2, **当** $n > N_3 = \max\{N_1, N_2\}$ **时,有**

$$\frac{\gamma_n \log^{[q]} \gamma_n}{\log|a_n X_n(\omega)|^{-1}} < \rho_1 + \varepsilon,$$

$$\frac{\xi_n \log^{[q]} \xi_n}{\log|b_n X_n(\omega)|^{-1}} < \rho_2 + \varepsilon. \tag{9}$$

又由 $c_n(\omega)$ **的定义,并结合**(9)**式可知**

$$\log|c_n(\omega)|^{-1} = \mu(\log|a_n X_n(\omega)|^{-1}) + \nu(\log|b_n X_n(\omega)|^{-1}) > \gamma_n \log^{[q]} \gamma_n \frac{\mu}{\rho_1 + \varepsilon} + \xi_n \log^{[q]} \xi_n \frac{\nu}{\rho_2 + \varepsilon}. \tag{10}$$

由(10)**式,有**

$$\frac{\lambda_n \log^{[q]} \lambda_n}{\log|c_n(\omega)|^{-1}} < \frac{\lambda_n \log^{[q]} \lambda_n}{\gamma_n \log^{[q]} \gamma_n \mu/(\rho_1 + \varepsilon) + \xi_n \log^{[q]} \xi_n \nu/(\rho_2 + \varepsilon)}, \text{a. s.}.$$

由上式再结合(4)**式,根据** ε **的任意性,有**

$$\rho(\omega) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\lambda_n \log^{[q]} \lambda_n}{\log|c_n(\omega)|^{-1}} \leqslant \frac{1}{2\mu/(\rho_1(1+\eta^{-1})) + 2\nu/(\rho_2(1+\eta))}, \text{a. s.},$$

即

$$\rho(\omega) \leqslant \frac{\rho_1\rho_2(2+\eta^{-1}+\eta)}{2(\nu\rho_1(1+\eta^{-1}) + \mu\rho_2(1+\eta))}, \text{a. s.}. \tag{11}$$

另一方面, $\forall \varepsilon > 0$, **存在正整数** N_4, **当** $n > N_4$ **时,有**

$$\frac{\gamma_n \log^{[q]} \gamma_n}{\log|a_n X_n(\omega)|^{-1}} > \chi_1 - \varepsilon,$$

$$\frac{\xi_n \log^{[q]} \xi_n}{\log|b_n X_n(\omega)|^{-1}} > \chi_2 - \varepsilon.$$

由(4)**式类似于**(10)**式,有**

$$\log|c_n(\omega)|^{-1} < \lambda_n \log^{[q]} \lambda_n (1 + o(1)) \cdot (2\mu/((1+\eta^{-1})(\chi_1 - \varepsilon)) + 2\nu/((1+\eta)(\chi_2 - \varepsilon))), n \to \infty.$$

根据定理 B **与引理** 3, $F(s,\omega)$ **的** q-**级** $\chi(\omega)$ a. s. **满足**

$$\chi(\omega) = \liminf_{n\to\infty} \frac{\lambda_n \log^{[q]} \lambda_n}{\log|c_n(\omega)|^{-1}} \geqslant \frac{1}{(2\mu/(\chi_1(1+\eta^{-1})) + 2\nu/(\chi_2(1+\eta)))}, \text{a. s.}$$

即

$$\chi(\omega) \leqslant \frac{\chi_1\chi_2(2+\eta^{-1}+\eta)}{2(\nu\chi_1(1+\eta^{-1}) + \mu\chi_2(1+\eta))}, \text{a. s.}. \tag{12}$$

这样,由(11) ~ (12)**式,定理** 1(i) **得证**.

(ii) **若** $\rho_1 = \chi_1$ **和** $\rho_2 = \chi_2$, **由**(11) ~ (12) **式,有**

$$\frac{\chi_1\chi_2(2+\eta^{-1}+\eta)}{2(\nu\chi_1(1+\eta^{-1}) + \mu\chi_2(1+\eta))} = \frac{\rho_1\rho_2(2+\eta^{-1}+\eta)}{2(\nu\rho_1(1+\eta^{-1}) + \mu\rho_2(1+\eta))},$$

由定理 1(i), **易证定理** 1(ii).

(iii) **设** $f_1(s,\omega)$, $f_2(s,\omega)$ **的** q-**型分别为** $T_1(\omega)$, $T_2(\omega)$. **由引理** 1 **与定理** A, **可得**

$$T_1(\omega) = \limsup_{n\to\infty} |a_n X_n(\omega)|^{\rho_1/\gamma_n} \log^{[q-1]} \frac{\gamma_n}{e\rho_1} \leqslant \limsup_{n\to\infty} n^{\rho_1 k_0/\gamma_n} |a_n|^{\rho_1/\gamma_n} \log^{[q-1]} \frac{\gamma_n}{e\rho_1} \leqslant \limsup_{n\to\infty} e^{\rho_1 k_0 \log n/\gamma_n} \cdot |a_n|^{\rho_1/\gamma_n} \log^{[q-1]} \frac{\gamma_n}{e\rho_1} = T_1, \text{a. s.}, \tag{13}$$

$$T_1(\omega) = \limsup_{n\to\infty} |a_n X_n(\omega)|^{\rho_1/\gamma_n} \log^{[q-1]} \frac{\gamma_n}{e\rho_1} \geqslant \limsup_{n\to\infty} n^{-\rho_1 k_0/\gamma_n} |a_n|^{\rho_1/\gamma_n} \log^{[q-1]} \frac{\gamma_n}{e\rho_1} \geqslant \limsup_{n\to\infty} e^{-\rho_1 k_0 \log n/\gamma_n} |a_n|^{\rho_1/\gamma_n} \log^{[q-1]} \frac{\gamma_n}{e\rho_1} = T_1, \text{a. s.}, \tag{14}$$

上述 2 **式最后的等式是因为** $\limsup_{n\to\infty} \frac{\rho_1 k_0 \log n}{\gamma_n} = 0$. **由**(13) ~ (14) **式可得** $T_1(\omega) = T_1$, a. s. , **类似地有** $T_2(\omega) = T_2$, a. s. .

因为 $c_n(\omega) = (a_n X_n(\omega))^{\mu}(b_n X_n(\omega))^{\nu}$, **则** $F(s,\omega)$ **的** q-**型** $T(\omega)$ a. s. **满足**

$$T(\omega) = \limsup_{n\to\infty} |c_n|^{\rho/\lambda_n} \log^{[q-1]} \frac{\lambda_n}{e\rho} \leqslant \limsup_{n\to\infty} n^{\rho k_0(\mu+\nu)/\lambda_n} |c_n|^{\rho/\lambda_n} \log^{[q-1]} \frac{\lambda_n}{e\rho} \leqslant \limsup_{n\to\infty} e^{\rho k_0(\mu+\nu)\log n/\lambda_n} |c_n|^{\rho/\lambda_n} \log^{[q-1]} \frac{\lambda_n}{e\rho} = T, \text{a. s.},$$

$$T(\omega) = \limsup_{n\to\infty} |c_n|^{\rho/\lambda_n} \log^{[q-1]} \frac{\lambda_n}{e\rho} \geqslant \limsup_{n\to\infty} n^{-\rho k_0(\mu+\nu)/\lambda_n} |c_n|^{\rho/\lambda_n} \log^{[q-1]} \frac{\lambda_n}{e\rho} \geqslant \limsup_{n\to\infty} e^{-\rho k_0(\mu+\nu)\log n/\lambda_n} |c_n|^{\rho/\lambda_n} \log^{[q-1]} \frac{\lambda_n}{e\rho} = T, \text{a. s.}$$

由上述 2 **式易得** $T(\omega) = T$, a. s. .

于是,结合定理 D(iii) **可证得定理** 1(iii).

(iv) **设** $f_1(s,\omega)$, $f_2(s,\omega)$ **的双下** q-**型分别为** $\tau_{\chi_1}(\omega)$, $\tau_{\chi_2}(\omega)$. **由假设,类似于**(iii) **中的讨论可得**

$\chi(\omega) = \chi$, a. s. , $\tau_{\chi_1}(\omega) = \tau_{\chi_1}$, a. s. , $\tau_{\chi_2}(\omega) = \tau_{\chi_2}$, a. s. .

因此，$\forall \varepsilon > 0$，存在正整数 N_5, N_6，当 $n > N_7 = \max\{N_5, N_6\}$ 时，有

$$|a_n X_n(\omega)|^{\chi_1/\gamma_n} \geqslant \frac{\tau_{\chi_1} - \varepsilon}{\log^{[q-1]} \gamma_n/(e\chi_1)},$$

$$|b_n X_n(\omega)|^{\chi_2/\xi_n} \geqslant \frac{\tau_{\chi_2} - \varepsilon}{\log^{[q-1]} \xi_n/(e\chi_2)}. \tag{15}$$

当 $q = 1$ 时，由(4)与(7)式，结合定理 C，再根据 ε 的任意性可得

$$\tau_\chi(\omega) = \liminf_{n\to\infty} |c_n(\omega)|^{\chi/\lambda_n} \frac{\lambda_n}{e\chi} \geqslant$$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{e\chi}\left(\left(e\chi_1(\tau_{\chi_1} - \varepsilon)/\gamma_n\right)^{\mu\gamma_n/\chi_1}\left(e\chi_2(\tau_{\chi_2} - \varepsilon)/\xi_n\right)^{\nu\xi_n/\chi_2}\right)^{\chi/\lambda_n} \overset{(7)}{\geqslant} \frac{1}{\chi}\left(\chi_1\tau_{\chi_1}\frac{1+\eta^{-1}}{2}\right)^{2\mu\chi/(\chi_1(1+\eta^{-1}))} \cdot$$

$$\left(\chi_2\tau_{\chi_2}\frac{1+\eta}{2}\right)^{2\nu\chi/(\chi_2(1+\eta))}, \text{a. s.} . \tag{16}$$

当 $q = 2, 3, \cdots$ 时，由(4)，(7)，(15)式，类似上式可得

$$\tau_\chi(\omega) = \liminf_{n\to\infty} |c_n(\omega)|^{\chi/\lambda_n} \log^{[q-1]} \lambda_n/(e\chi) \geqslant$$

$$\liminf_{n\to\infty} \log^{[q-1]} \frac{\lambda_n}{e\chi}\left(\left(\frac{\tau_{\chi_1} - \varepsilon}{\log^{[q-1]} \gamma_n}\right)^{\mu\gamma_n/\chi_1}\left(\frac{\tau_{\chi_2} - \varepsilon}{\log^{[q-1]} \xi_n}\right)^{\nu\xi_n/\chi_2}\right)^{\chi/\lambda_n} \overset{(8)}{\geqslant}$$

$$\tau_{\chi_1}^{2\mu\chi/(\chi_1(1+\eta^{-1}))}\tau_{\chi_2}^{2\nu\chi/(\chi_2(1+\eta))}, \quad \text{a. s.} . \tag{17}$$

结合(16)～(17)式，证得定理 1(iv).

故定理 1 证毕.

4 参考文献

[1] 余家荣，丁晓庆，田范基. Dirichlet 级数与随机 Dirichlet 级数的值分布[M]. 武汉：武汉大学出版社，2004.

[2] 高宗升. Dirichlet 级数表示的整函数的增长性[J]. 数学学报，1999，42(4)：741-748.

[3] 孙道椿，高宗升. 半平面上 Dirichlet 级数的增长级[J]. 数学物理学报，2002，22(4)：557-563.

[4] 孙道椿，陈特为. 无限级 Dirichlet 级数[J]. 数学学报，2001，44(2)：259-268.

[5] 孔荫莹. Dirichlet-Hadamard 乘积的 q-级与 q-型[J]. 数学学报，2009，52(6)：1165-1172.

[6] 孔荫莹，邓冠铁. Dirichlet 级数的 Dirichlet-Hadamard 乘积[J]. 数学年刊，2014，35(2)：145-152.

[7] 徐洪焱，易才凤. 半平面上有限级 Dirichlet 级数的逼近[J]. 数学学报，2010，53(3)：617-624.

[8] Shang Lina，Gao Zongsheng. Entire functions defined by Dirichlet series[J]. J Math Anal Appl，2008，339：853-862.

[9] Oskolkov V A，Kalinichenko L I. Growth of entire functions represented by Dirichlet series[J]. Sbornik：Mathematics，1996，187(10)：1545-1560.

[10] 余家荣. 随机狄里克莱级数的一些性质[J]. 数学学报，1978，21(2)：97-118.

[11] Yu Jiarong，Sun Daochun. On the distribution of values of random Dirichlet series (I)[M]. Singapore：Lectures on Complex Anal，World Scientific，1988.

[12] Yu Jiarong. Borel lines of random Dirichlet series[J]. Acta Math Sci，2002，22B(1)：1-8.

[13] Tian Fanji. The growth of random Dirichlet series (I)[J]. Acta Math Scientia，2000，22B(3)：390-396.

[14] Tian Fanji，Sun Daochun，Yu Jiarong. Sur les series aleatoires de Dirichlet[J]. C R Acad Sci Paris Ser I，1998，362：427-431.

[15] 田范基. 随机狄里克莱级数的一些性质[D]. 武汉：武汉大学，1998.

[16] Sun Daochun. On the distribution of values of random Dirichlet series (II)[J]. Chin Ann of Math，1990，11B：33-34.

[17] 田范基. 半平面上的无限级随机 Dirichlet 级数的值分布[J]. 数学物理学报，2000，20(2)：278-287.

[18] Paley R E A C，Zygmund A. On some series of functions (1)，(2)，(3)[J]. Proc Camb Phil Soc，1930，26：337-357；1930，26：458-474；1932，32：190-205.

[19] 徐洪焱，孔荫莹，崔永琴. Dirichlet 级数与其 Dirichlet-Hadamard 乘积的增长性[J]. 数学年刊，2018，39(1)：77-86.

[20] 李云霞，孔荫莹. 随机 Dirichlet-Hadamard 乘积所表示的整函数的增长性[J]. 四川师范大学学报：自然科学版，2018，41(4)：522-527.

The Growth of Hadamard Product of Random Dirichlet Series

YING Rui[1]，XU Hongyan[2*]

(1. Shangrao Preschool Education College，Shangrao Jiangxi 334001，China；

2. School of Mathematics and Computer Science，Shangrao Normal University，Shangrao Jiangxi 334001，China)

Abstract: By using the theory of random Dirichlet series，and combining the properties of Hadamard product，the growth of the Hadamard product of random Dirichlet series is studied. Some results about q-order，lower q-order，q-type，lower q-type and double lower q-type between random Dirichlet series and random Dirichlet-Hadamard product series are obtained.

Key words: random Dirichlet series；entire function；double lower q-type

(责任编辑：王金莲)