第 43 卷 第 6 期
2019 年 11 月

江西师范大学学报(自然科学版)
Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science)

Vol. 43 No. 6
Nov. 2019

文章编号:1000-5862(2019)06-0598-07

2 阶 Camassa-Holm 方程行波解附近的解的衰减性

丁丹平,王　凯

(江苏大学理学院,江苏 镇江　212013)

摘要:该文研究 2 阶 Camassa-Holm(CH) 方程 Cauchy 问题在行波附近的解的衰减性. 采用 Y. Martel 等在研究临界广义 Korteweg-de Vries(KdV) 方程的孤立子的稳定性时所用的伪共形变换方法,研究了具有指数衰减初值的解,得到解可被衰减的指数函数控制.

关键词:2 阶 Camassa-Holm 方程; 衰减性; 行波解; 伪共形变换

中图分类号:O 175.29　　**文献标志码:**A　　**DOI:** 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2019.06.08

0　引言

2003 年,A. Constantin 等[1] 得到测地线方程

$$u_t = B_k(u,u),k \in \mathbf{N}, \tag{1}$$

其中 $B_k(u,u) = A_k^{-1}C_k(u) - u\partial_x u$,$C_k(u) = -u \cdot A_k(\partial_x u) + A_k(u\partial_x u) - 2\partial_x u A_k(u)$,$A_k(u) = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j \partial_x^{2j} u$,$(t,x) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}$.

算子 A_k^{-1} 可由等效的卷积形式

$$A_k^{-1}(f)(x) = P_k * f = \int_{\mathbf{R}} P_k(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y, x \in \mathbf{R}$$

给出,其中 $*$ 为卷积符号,P_k 的傅里叶变换 $\hat{P}(\xi) = (1+\xi^2+\cdots+\xi^{2k})^{-1}$,$\xi \in \mathbf{R}$. 算子 $C_k(u)$ 是一个全导数,即存在关于 u 的微分多项式 Γ_k,使得 $C_k(u) = -\partial_x \Gamma_k(u)$,因此

$$-\Gamma_k(u) = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j \partial_x^{2j} u^2 - \sum_{i=0}^{k}(-1)^j \cdot \int_{-\infty}^{x}(u\partial_\xi^{2j} u \partial_\xi u + 2\partial_\xi u \partial_\xi^{2j} u)\,\mathrm{d}\xi.$$

当 $k = 0$ 时,方程(1) 变为 Burgers 方程 $u_t + 3uu_x = 0$;当 $k = 1$ 时,方程(1) 变为文献[2] 中的 CH 方程 $u_t - u_{txx} + 3uu_x - 2u_x u_{xx} - uu_{xxx} = 0$,因为 $P_1(x) = \mathrm{e}^{|x|}/2$,$\Gamma_1(u) = u^2 + u_x^2/2$,所以,CH 方程可写为 $u_t + uu_x + P_1 * (u^2 + u_x^2/2)_x = 0$.

关于 CH 方程的研究成果已有很多,在此不再赘述,具体可参见文献[3-16].

当 $k = 2$ 时,方程(1) 变为 2 阶 CH 方程

$$u_t - u_{txx} + u_{txxxx} + 3uu_x - 2u_x u_{xx} - uu_{xxx} + 2u_x u_{xxx} + uu_{xxxx} = 0, \tag{2}$$

直接计算知 $P_2(x) = \sqrt{3}\mathrm{e}^{-\sqrt{3}|x|/2}\sin(|x|/2 + \pi/6)/3$,易知,$P_2$ 是 $u - u_{xx} + u_{xxx} = \delta$($\delta$ 为 Dirac 函数) 的解且 $\partial_x^3 P_2$ 在 $x = 0$ 处间断. $\Gamma_2(u) = u^2 + u_x^2/2 - u_{xx}^2/2 - 3(u_x u_{xx})_x$,方程(2) 可写为

$$u_t + uu_x + P_2 * (u^2 + u_x^2/2 - u_{xx}^2/2 - 3(u_x u_{xx})_x)_x = 0, \tag{3}$$

称当 $k \geqslant 2$ 时的方程(1) 为高阶 CH 方程.

2009 年,G. M. Coclite 等[17] 首次将方程(1) 作为独立方程研究其初值问题并获得如下重要结果:

设 $u_0 \in H_{k,p} = \{f \in H^k(\mathbf{R}) \mid \partial_x^k f \in L^p(\mathbf{R})\}$,$2 < p < \infty$,

则方程(1) 对应的初值问题存在整体弱解

$u \in C([0,\infty);C^{k-1}(\mathbf{R})) \cap L^\infty([0,\infty);H^k(\mathbf{R}))$;

设 $u_0 \in H^{k+1}(\mathbf{R})$,则

$u \in L^\infty([0,T];H^{k+1}(\mathbf{R}))$,$T > 0$;

若 $u_0 \in H_{k,r}$,则 $u \in L^\infty([0,T];H_{k,r})$,其中 $T > 0$,$2 \leqslant r < \infty$.

2010 年,丁丹平等[18] 研究了在方程(1) 的 Cauchy 问题下守恒解的存在性问题:

设 $u_0 \in H^k(\mathbf{R})$ 且 $\exists M > 0$,使得 $P_{>M}u_0 = 0$,则方程(1) 对应的 Cauchy 问题存在唯一全局守恒解 $u \in C([0,\infty);H^{k-1}(\mathbf{R})) \cap L^\infty([0,\infty);H^k(\mathbf{R}))$.

2017 年,G. M. Coclite 等[19] 研究了方程(1) 的 Cauchy 问题的解与标量守恒律熵解的收敛性.

2 阶 CH 方程的行波解在方程相关问题研究中

收稿日期:2018-12-28

基金项目:国家自然科学基金(11371175) 资助项目.

作者简介:丁丹平(1965-),男,江苏丹阳人,教授,博士,主要从事高阶 Camassa-Holm 方程研究. E-mail: ddp@ujs.edu.cn

起着重要作用，文献[20]给出其形式

$$Q_A(x-ct)=2A\mathrm{e}^{-\sqrt{3}|x-ct|/2}\sin(|x-ct|/2+\pi/6),(t,x)\in\mathbf{R}^+\times\mathbf{R},\tag{4}$$

其中 $A>0$ 为波幅，$c>0$ 为波速，且 A 与 c 有关，易知

$$P_2(\xi)=\sqrt{3}Q_A(\xi)/6A.$$

本文在(4)式中取 $A=1$，记 $Q(x-1)=Q_1(x-t)$. 方程(1)有守恒量

$$\int_{\mathbf{R}}\sum_{i=0}^{k}(\partial_x^i u)^2(t,x)\,\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}}\sum_{i=0}^{k}(\partial_x^i u_0)^2(x)\,\mathrm{d}x.\tag{5}$$

本文考虑 2 阶 CH 方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases}u_t-u_{txx}+u_{txxxx}+3uu_x-2u_xu_{xx}-uu_{xxx}+\\2u_xu_{xxx}+uu_{xxxx}=0,\\u(0,x)=u_0(x),\end{cases}\tag{6}$$

其中 $u_0\in H^5(\mathbf{R})$，$(t,x)\in\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}$.

本文的主要目的是研究 2 阶 CH 方程的 Cauchy 问题在行波附近的解随时间 $t(>0)$ 和空间 $x(\geqslant 0)$ 变化的衰减规律，并给出具体的衰减估计. 关于这类问题的研究，可回溯到有关 KdV 方程的研究工作，Y. Martel 等[21]给出临界广义 KdV 方程 Cauchy 问题的解的衰减形式，为表述的完整性简要回顾一下他们工作的相关内容.

考虑临界广义 KdV 方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases}u_t+(u_{xx}+u^5)_x=0,(t,x)\in\mathbf{R}^+\times\mathbf{R},\\u(0,x)=u_0(x),u_0\in H^1(\mathbf{R}),x\in\mathbf{R}.\end{cases}\tag{7}$$

文献[21]证明了临界广义 KdV 方程的孤立子 $S(x)$ 的 H^1 及 L^2 轨道不稳定性. 根据临界广义 KdV 方程解的不变性，令 $\omega(t,x)=\lambda_0^{1/2}(t)u(t,\lambda_0(t)x+x_0(t))$，$\lambda_0(t)>0$，$x_0(t)\in\mathbf{R}$ 是 C^1 连续的，u 是(7)式的解. 作分解 $\omega(t,x)=\kappa(t,x)+S(x)$，$\kappa$ 是一小量，$S(x)=3^{1/4}/\mathrm{ch}^{1/2}(2x)$. 假设 $S(x)$ 是 H^1 稳定的，通过 2 个方面推出矛盾(见文献[21]第 5 部分引理 13 和步骤 3). 所以，$S(x)$ 是 H^1 不稳定的，同理可得 L^2 的不稳定性. 更多细节参见文献[21].

类似地，2 阶 CH 方程的解也有伸缩不变性(若 $u(t,x)$ 是(6)式的解，则 $\lambda_0^{1/2}u(\lambda_0^{1/2}t,x)$ 也是解)和平移不变性(若 $u(t,x)$ 是(6)式的解，则 $u(t,x+x_0)$ 也是解)，因此，猜测用这种近似分解的方法研究(6)式的解的衰减性是有价值的. 令

$$\lambda^{1/2}(t)u(t,y+x(t))=\varepsilon(t,y)+Q(y),(t,y)\in\mathbf{R}^+\times\mathbf{R},\tag{8}$$

其中 u 是(6)式的解，$Q(x)=2\mathrm{e}^{-\sqrt{3}|x|/2}\sin(|x|/2+\pi/6)$，$\varepsilon$ 是一小量，且 $\lambda(t)>0$ 和 $x(t)\in\mathbf{R}$ 是关于解的不变性的几何参数，且是 C^1 连续的(后面将给出证明).

作变换 $s=\int_0^t\lambda^{-1/2}(t')\,\mathrm{d}t'$，或等价变换 $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t=\lambda^{-1/2}(t)$；设 $\beta>0$，定义行波 Q 附近半径为 β 的区域：$U_\beta=\{u\in H^2(\mathbf{R});\inf_r\|u(\cdot)-Q(\cdot+r)\|_{H^2}\leqslant\beta\}$；$\|\cdot\|_{H^k}$ 表示 $H^k(\mathbf{R})$ 的范数，定义 $\|f\|_{H^k}=\left(\int_{\mathbf{R}}\sum_{j=0}^{k}(\partial_x^j f)^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}$，$k\in\mathbf{N}$；$|\cdot|$ 表示绝对值；$(\cdot,\cdot)$ 表示 $L^2(\mathbf{R})$ 空间的内积，定义 $(f,g)=\int_{\mathbf{R}}fg\,\mathrm{d}x$，$f,g\in L^2(\mathbf{R})$.

下面给出本文的主要结果.

定理 1　$\exists\alpha^*>0$，$a_0>0$，使得若 $u_0\in U_{\alpha_0}$，$u_0=Q+\varepsilon_0$，其中 $\varepsilon_0(x)\in H^5(\mathbf{R})$，满足 $|\varepsilon_0(x)|+|\varepsilon_{0xx}(x)|\leqslant a_0\mathrm{e}^{-\sqrt{3}x/2}$，其中 $x\geqslant 0$，$0<\alpha_0\ll\alpha^*$，$a_0>0$，则 $\exists\theta>0$，使得

$$|\varepsilon(t,x)|+|\varepsilon_{xx}(t,x)|\leqslant\theta(\mathrm{e}^{-\sqrt{3}t/4}+1)\mathrm{e}^{-\sqrt{3}x/2},$$

$\forall t\geqslant 0$，$\forall x\geqslant 0$.

由伸缩变换可得 $\forall A>0$，$c>0$，在行波 $Q_A(x-ct)$ 附近(6)式的解的衰减形式.

1　线性化方程及算子 A_2

令 $v(t,y)=\lambda^{1/2}(t)u(t,y+x(t))$，其中 u 为(6)式的解. 由(8)式得

$$\varepsilon(t,y)=v(t,y)-Q(y)=\lambda^{1/2}(t)u(t,y+x(t))-Q(y).$$

回顾方程(3)，有

$$u_t+uu_x+\int_{\mathbf{R}}P_{2z}(x-z)(u^2+u_z^2/2-u_{zz}^2/2)\,\mathrm{d}z-\frac{3}{2}\int_{\mathbf{R}}P_{2zzz}(x-z)u_z^2\,\mathrm{d}z=0.\tag{9}$$

引理 1(*Q* 附近的线性化方程)　对所有的 $s\geqslant 0$，有

$$\varepsilon_s=\lambda_sQ/(2\lambda)+x_sQ_y+\lambda_s\varepsilon/(2\lambda)+x_s\varepsilon_y-QQ_y-\varepsilon\varepsilon_y-(Q\varepsilon)_y-R_1(\varepsilon),\tag{10}$$

其中

$$R_1(\varepsilon)=\int_{\mathbf{R}}P_{2z}(y-z)(Q^2+Q_z^2/2-Q_{zz}^2/2)\,\mathrm{d}z-\frac{3}{2}\int_{\mathbf{R}}P_{2zzz}(y-z)Q_z^2\mathrm{d}z+\int_{\mathbf{R}}P_{2z}(y-z)(\varepsilon^2+\varepsilon_z^2/2-\varepsilon_{zz}^2/2)\,\mathrm{d}z-\frac{3}{2}\int_{\mathbf{R}}P_{2zzz}(y-z)\varepsilon_z^2\mathrm{d}z+\int_{\mathbf{R}}P_{2z}(y-z)(2Q\varepsilon+Q_z\varepsilon_z-Q_{zz}\varepsilon_{zz})\,\mathrm{d}z-3\int_{\mathbf{R}}P_{2zzz}(y-z)Q_z\varepsilon_z\mathrm{d}z.\tag{11}$$

证　由 $v(t,y)=\lambda^{1/2}(t)u(t,y+x(t))$ 得

$$v_t=\lambda^{-1/2}\lambda_tu/2+\lambda^{1/2}u_t+\lambda^{1/2}x_tu_y,v_y=\lambda^{1/2}u_y,$$

$v_{yy} = \lambda^{1/2} u_{yy}$. 由 $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t = 1/\lambda^{1/2}(t)$ 得,关于 v 的方程

$$v_s + v v_y + \int_{\mathbf{R}} P_{2z}(y-z)(v^2 + v_z^2/2 - v_{zz}^2/2)\,\mathrm{d}z = \lambda_s v/(2\lambda) + x_s v_y + \frac{3}{2}\int_{\mathbf{R}} P_{2zzz}(y-z) v_z^2 \mathrm{d}z. \quad (12)$$

又因为 $v(s,y) = Q(y) + \varepsilon(s,y)$,代入(12)式即得(10)及(11)式,引理 1 得证.

引理 2($A_2 = \sum_{j=0}^{2}(-1)^j \partial_x^{2j}$ 的结构) $\boldsymbol{Q}_x$ 和 $\boldsymbol{Q}_{xx}$ 是算子 A_2 的 2 个线性无关的特征向量.

证 设 ω 是任一 C^∞ 函数,则有$(A_2\boldsymbol{Q}_x,\omega) = 0 \cdot \boldsymbol{Q}_x$,同理$(A_2\boldsymbol{Q}_{xx},\omega) = 0 \cdot \boldsymbol{Q}_{xx}$,所以 $\boldsymbol{Q}_x$ 和 $\boldsymbol{Q}_{xx}$ 是算子 A_2 的特征向量. 不妨设存在非零常数 μ,使得 $\boldsymbol{Q}_x = \mu \boldsymbol{Q}_{xx}$,两边同乘 Q_x 积分得

$$0 \neq \int_{\mathbf{R}} \boldsymbol{Q}_x^2 \mathrm{d}x = \mu \int_{\mathbf{R}} \boldsymbol{Q}_{xx}\boldsymbol{Q}_x \mathrm{d}x = 0,$$

矛盾,即 Q_x 与 Q_{xx} 线性无关,引理 2 得证.

2 平移参数 $x(t)$ 和扩张参数 $\lambda(t)$ 的选择

本部分应用隐函数存在性理论选择 $\lambda(s)$,$x(s)$ 满足 $\varepsilon(s) \perp \boldsymbol{Q}_x$,$\varepsilon(s) \perp \boldsymbol{Q}_{xx}$,$\forall s \geqslant 0$(内积意义下). 讨论 $\lambda(s)$,$x(s)$ 及其导数的有界性. 设 $u \in H^2(\mathbf{R})$,$\lambda_1 > 0$ 及 $x_1 \in \mathbf{R}$,定义 $\varepsilon_{\lambda_1,x_1}(x) = \lambda_1^{1/2} u(x + x_1) - Q(x)$.

引理 3 $\exists \alpha^* > 0$,使得若 $u \in U_{\alpha^*}$,则存在唯一的 C^1 映射$(\lambda_1,x_1):U_{\alpha^*} \to (1-\hat{\lambda},1+\hat{\lambda}) \times \mathbf{R}$,其中 $\hat{\lambda} > 0$,并且 $\varepsilon_{\lambda_1,x_1}$ 满足

$$\varepsilon_{\lambda_1,x_1} \perp \boldsymbol{Q}_x \text{ 及 } \varepsilon_{\lambda_1,x_1} \perp \boldsymbol{Q}_{xx}. \quad (13)$$

进一步,若 $u \in U_\alpha$,其中 $0 < \alpha < \alpha^*$,则存在常数 $C_1 > 0$ 使得

$$\| \varepsilon_{\lambda_1,x_1} \|_{H_2} \leqslant C_1 \alpha,\ |\lambda_1 - 1| + |x_1| \leqslant C_1 \alpha. \quad (14)$$

证 令 $f^1_{\lambda_1,x_1}(u) = \int_{\mathbf{R}} \varepsilon_{\lambda_1,x_1} \boldsymbol{Q}_x \mathrm{d}x$,$f^2_{\lambda_1,x_1}(u) = \int_{\mathbf{R}} \varepsilon_{\lambda_1,x_1} Q_{xx} \mathrm{d}x$,因为 $\partial\varepsilon_{\lambda_1,x_1}/\partial\lambda_1 \Big|_{\lambda_1=1,x_1=0} = u/2$,$\partial\varepsilon_{\lambda_1,x_1}/\partial x_1 \Big|_{\lambda_1=1,x_1=0} = u_x$,于是得 Jacobian 行列式

$$\frac{\partial(f^1_{\lambda_1,x_1}, f^2_{\lambda_1,x_1})}{\partial(\lambda_1,x_1)}\Bigg|_{\lambda_1=1,x_1=0,u=Q} = \begin{vmatrix} \partial f^1_{\lambda_1,x_1}/\partial\lambda_1 & \partial f^1_{\lambda_1,x_1}/\partial x_1 \\ \partial f^2_{\lambda_1,x_1}/\partial\lambda_1 & \partial f^2_{\lambda_1,x_1}/\partial x_1 \end{vmatrix}_{\lambda_1=1,x_1=0,u=Q} = \frac{1}{2}\left(\int_{\mathbf{R}} \boldsymbol{Q}_x^2 \mathrm{d}x\right)^2 \neq 0,$$

所以,由隐函数存在性定理得,$\exists \bar{\alpha} > 0$,在 $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}$ 中以$(1,0)$为心的邻域 $\Omega_{1,0}$ 以及唯一的 C^1 映射 $(\lambda_1,x_1):\{u \in H^5(\mathbf{R});\ \|u - Q\|_{H_2} < \bar{\alpha}\} \to \Omega_{1,0}$,使得$\int_{\mathbf{R}} \varepsilon_{\lambda_1,x_1} \boldsymbol{Q}_x \mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} \varepsilon_{\lambda_1,x_1} \boldsymbol{Q}_{xx} \mathrm{d}x = 0$,则(13)式成立. 若 $\|u - Q\|_{H_2} < \alpha \leqslant \bar{\alpha}$,则 U_α 可确定一个闭区域,由连续映射的性质知,存在常数 $C_1 > 0$,使得 $|\lambda_1 - 1| + |x_1| \leqslant C_1\alpha$,又因为

$$\varepsilon_{\lambda_1,x_1}(x) = \lambda_1^{1/2} u(x + x_1) - Q(x),$$

所以 $\|\varepsilon_{\lambda_1,x_1}\|_{H^2} \leqslant C_1\alpha$. 将映射$(\lambda_1,x_1)$延拓到 U_α 上,再用隐函数存在性定理知,$\exists \alpha^* < \bar{\alpha}$,使得存在唯一的 C^1 映射 $r: U_{\alpha^*} \to \mathbf{R}$,使得对所有的 $u \in U_{\alpha^*}$,有

$$\|u(\cdot) - Q(\cdot - r)\|_{H^2} = \inf_r \|u(\cdot) - Q(\cdot - r)\|_{H^2} < \alpha^* < \bar{\alpha}.$$

令 $\lambda_1(u) = \lambda_1(u(\cdot + r(u)))$,$x_1(u) = x_1(u(\cdot + r(u))) + r(u)$ 使得(13)~(14)式成立,引理 3 得证.

引理 4 若 $\exists \alpha^* > 0$,使得对所有的 $t \geqslant 0$,都有 $u(t) \in U_{\alpha^*}$,其中 u 为(6)式的解,则 $\exists \alpha_0 > 0$,使得 $u_0 \in U_{\alpha_0}$.

证 假设 $\forall \alpha_0 > 0$,都有 $u_0 \notin U_{\alpha_0}$. 因 $u_0 \in H^5(\mathbf{R})$,由守恒量(5)式和分部积分得

$$\|u - Q(\cdot + r)\|^2_{H^2} = \|u_0 - Q(\cdot + r)\|^2_{H^2} + 4\sqrt{3}\,[u(0,-r) - u(t,-r)],$$

两边取下确界得

$$(\alpha^*)^2 \geqslant \inf_r \|u - Q(\cdot + r)\|^2_{H^2} > \alpha_0^2 - 4\sqrt{3}\inf_r [\|u_0\|_{H^2} + \|u\|_{H^2}] = \alpha_0^2 - 8\sqrt{3}\|u_0\|_{H^2}.$$

由 $\alpha_0 > 0$ 的任意性,不妨取 $\alpha_0^2 = (\alpha^*)^2 + 8\sqrt{3}\|u_0\|_{H^2} + 1$,所以$(\alpha^*)^2 > \alpha_0^2 - 8\sqrt{3}\|u_0\|_{H^2} > (\alpha^*)^2 + 1$,矛盾,引理 4 得证.

注 1 引理 4 说明若 $u_0 \in U_{\alpha_0}$,$0 < \alpha_0 \ll \alpha^*$,则 $u(t) \in U_{\alpha^*}$,$t \geqslant 0$.

定义 1 设 $\lambda(s)$,$x(s)$ 满足:$\forall s \geqslant 0$,有

$$(\varepsilon(s),\boldsymbol{Q}_x) = (\varepsilon(s),\boldsymbol{Q}_{xx}) = 0.$$

引理 5(λ_s/λ 和 x_s 的方程) 若 $u_0 \in H^3(\mathbf{R})$,$u(t) \in U_{\alpha_1}$,其中 $0 < \alpha_1 < \alpha^*$,且 u 为(6)式的解,则 $\lambda(s)$,$x(s) \in C^1(\mathbf{R}^+)$,满足

$$x_s \int_{\mathbf{R}} \boldsymbol{Q}_y^2 \mathrm{d}y = \int_{\mathbf{R}} Q\boldsymbol{Q}_y^2 \mathrm{d}y - \int_{\mathbf{R}} Q\boldsymbol{Q}_{yy}\varepsilon \mathrm{d}y - \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}} \boldsymbol{Q}_{yy}{}^2 \varepsilon^2 \mathrm{d}y + \int_{\mathbf{R}} R_1(\varepsilon)\boldsymbol{Q}_y \mathrm{d}y, \quad (15)$$

$$\frac{\lambda_s}{2\lambda}\int_{\mathbf{R}} \boldsymbol{Q}_y^2 \mathrm{d}y + x_s \int_{\mathbf{R}} \boldsymbol{Q}_{yyy}\varepsilon \mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}} \boldsymbol{Q}_{yyy}\varepsilon^2 \mathrm{d}y + \int_{\mathbf{R}} Q\boldsymbol{Q}_{yyy}\varepsilon \mathrm{d}y - \int_{\mathbf{R}} R_1(\varepsilon)\boldsymbol{Q}_{yy}\mathrm{d}y. \quad (16)$$

证　取 $\chi(x) \in C^1(\mathbf{R}\backslash\{0\})$ 满足：$\exists C>0$ 使得 $|\chi(x)|+|\chi'(x)| \leqslant Ce^{-|x|/2}, x \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$. 设 $u_0 \in H^2(\mathbf{R})$，因 $u(t) \in U_{\alpha_1}$，由引理 3 知 $\lambda(t), x(t) \in C^1(\mathbf{R}^+)$. 于是，有

$$\frac{d}{ds}\int_{\mathbf{R}}\chi v(s)\,dy = \frac{\lambda_s}{2\lambda}\int_{\mathbf{R}}\chi v dy - x_s\int_{\mathbf{R}}\chi_y v dy + \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}} v^2\chi_y dy - \int_{\mathbf{R}}\chi(P_2 * (v^2 + v_y^2/2 - v_{yy}^2/2 - 3(v_y v_{yy})_y)_y)\,dy.$$

因 $v(s,y) = Q(y) + \varepsilon(s,y)$，代入上式分部积分得

$$\frac{d}{ds}\int_{\mathbf{R}}\chi\varepsilon(s)\,dy = \frac{\lambda_s}{2\lambda}\int_{\mathbf{R}}\chi(Q+\varepsilon)\,dy - x_s\int_{\mathbf{R}}\chi_y(Q+\varepsilon)\,dy + \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}}(Q+\varepsilon)^2\chi_y dy - \int_{\mathbf{R}}\chi R_1(\varepsilon)\,dy. \tag{17}$$

令 $\chi = Q_y$，因为 $(\varepsilon(s), Q_y) = \int_{\mathbf{R}} Q_y\varepsilon dy$，且 $Q(x)$ 是偶的，代入(17)式进行分部积分得

$$0 = \frac{d}{ds}\int_{\mathbf{R}}\boldsymbol{Q}_y\varepsilon dy = x_s\int_{\mathbf{R}}\boldsymbol{Q}_y^2 dy - \int_{\mathbf{R}}Q\boldsymbol{Q}_y^2 dy + \int_{\mathbf{R}}Q\boldsymbol{Q}_{yy}\varepsilon dy + \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}}\boldsymbol{Q}_{yy}\varepsilon^2 dy - \int_{\mathbf{R}}R_1(\varepsilon)\boldsymbol{Q}_y dy.$$

同理，令 $\chi = Q_{yy}$，因为 $(\varepsilon(s), \boldsymbol{Q}_{yy}) = \int_{\mathbf{R}}\boldsymbol{Q}_{yy}\varepsilon dy = 0$，代入(17)式进行分部积分得

$$0 = \frac{d}{ds}\int_{\mathbf{R}}\boldsymbol{Q}_{yy}\varepsilon dy = -\frac{\lambda_s}{2\lambda}\int_{\mathbf{R}}\boldsymbol{Q}_y^2 dy - x_s\int_{\mathbf{R}}\boldsymbol{Q}_{yyy}\varepsilon dy + \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}}\boldsymbol{Q}_{yyy}\varepsilon^2 dy + \int_{\mathbf{R}}Q\boldsymbol{Q}_{yyy}\varepsilon dx - \int_{\mathbf{R}}R_1(\varepsilon)\boldsymbol{Q}_{yy}dy.$$

又 $(\int_{\mathbf{R}}\boldsymbol{Q}_y^2 dy)^2 > 0$，所以 λ_s/λ 和 x_s 可由 $(\partial_y^i\varepsilon)^j$ 与 $(\partial_y^{i_0}Q)^{j_0}(i, i_0 = 0,1,2; j, j_0 = 0,1,2)$ 的内积表示，即 $\lambda(s), x(s)$ 是 $C^1(\mathbf{R})$ 的，且当 $u_0 \in H^3(\mathbf{R})$ 时，(15) ~ (16) 式成立，引理 5 得证.

引理 6（λ_s/λ 和 x_s 的有界性）　在引理 5 条件下，则 $\exists C_2 > 0$，使得

$$|\lambda_s/\lambda| + |x_s - 1| \leqslant C_2\|\varepsilon(s)\|_{H^2}, s \geqslant 0.$$

证　因 $u \in U_{\alpha_1}$，其中 $0 < \alpha_1 < \alpha^*$，由引理 5 知

$$x_s = h_1(s)/\int_{\mathbf{R}}\boldsymbol{Q}_y^2 dy, \lambda_s/\lambda = 2h_2(s)/\int_{\mathbf{R}}\boldsymbol{Q}_y^2 dy,$$

其中

$$h_1(s) = \int_{\mathbf{R}}Q\boldsymbol{Q}_y^2 dy - \int_{\mathbf{R}}Q\boldsymbol{Q}_{yy}\varepsilon dy - \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}}\boldsymbol{Q}_{yy}\varepsilon^2 dy + \int_{\mathbf{R}}R_1(\varepsilon)\boldsymbol{Q}_y dy,$$

$$h_2(s) = x_s\int_{\mathbf{R}}\boldsymbol{Q}_{yy}\varepsilon_y dy + \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}}\boldsymbol{Q}_{yyy}\varepsilon^2 dy + \int_{\mathbf{R}}Q\boldsymbol{Q}_{yyy}\varepsilon dy - \int_{\mathbf{R}}R_1(\varepsilon)\boldsymbol{Q}_{yy}dy.$$

令 $R_1(\varepsilon) = T_1 + T_2$，其中

$$T_1(y) = \int_{\mathbf{R}}P_{2z}(y-z)(Q^2 + \boldsymbol{Q}_z^2/2 - \boldsymbol{Q}_{zz}^2/2)\,dz - \frac{3}{2}\int_{\mathbf{R}}P_{2zzz}(y-z)\boldsymbol{Q}_z^2 dz,$$

$$T_2(s,y) = \int_{\mathbf{R}}P_{2z}(y-z)(2Q\varepsilon + \boldsymbol{Q}_z\varepsilon_z - \boldsymbol{Q}_{zz}\varepsilon_{zz})\,dz - 3\int_{\mathbf{R}}P_{2zzz}(y-z)\boldsymbol{Q}_z\varepsilon_z dz + \int_{\mathbf{R}}P_{2z}(y-z)(\varepsilon^2 + \varepsilon_z^2/2 - \varepsilon_{zz}^2/2)\,dz - \frac{3}{2}\int_{\mathbf{R}}P_{2zzz}(y-z)\varepsilon_z^2 dz.$$

由 $P_2(x) = \sqrt{3}Q(x)/6, Q(x) = 2e^{-\sqrt{3}|x|/2}\sin(|x|/2 + \pi/6)$ 直接计算知

$$T_1(x) = \begin{cases} -2e^{-\sqrt{3}x/2}\sin(x/2) + e^{-\sqrt{3}x}(\sqrt{3} + \sin x - \sqrt{3}\cos x), x \geqslant 0, \\ -2e^{\sqrt{3}x/2}\sin(x/2) - e^{\sqrt{3}x}(\sqrt{3} - \sin x - \sqrt{3}\cos x), x < 0. \end{cases}$$

易验证，$T_1(y)$ 是奇的，直接计算知

$$\int_{\mathbf{R}}\boldsymbol{Q}_y^2 dy = \int_{\mathbf{R}}Q\boldsymbol{Q}_y^2 dy + \int_{\mathbf{R}}T_1(y)\boldsymbol{Q}_y dy = \sqrt{3}/3.$$

估计 $h_1(s), h_2(s)$，它们满足 $x_s - 1 = \sqrt{3}(h_1(s) - \int_{\mathbf{R}}Q\boldsymbol{Q}_y^2 dy - \int_{\mathbf{R}}T_1(y)\boldsymbol{Q}_y dy) := \sqrt{3}h'_1(s)$，

由 Hölder 不等式得

$$|h'_1(s)| \leqslant 3^{-1} \times 16\sqrt{3}\|\varepsilon\|_{H^2} + \|\varepsilon\|_{H^2}^2 + \left|\int_{\mathbf{R}}T_2(y)\boldsymbol{Q}_y dy\right|,$$

其中 $|\int_{\mathbf{R}}T_2(y)Q_2 dy| \leqslant 3^{-1} \times 20\|\varepsilon\|_{H^2}^2 + 3^{-1} \times 56\|Q\|_{H^2}\|\varepsilon\|_{H^2}$，于是，

$$|h_1(s) - \sqrt{3}/3| \leqslant 3^{-1}(16\sqrt{3} + 56\|Q\|_{H^2})\|\varepsilon\|_{H^2} + 3^{-1} \times 23\|\varepsilon\|_{H^2}^2,$$

同理得

$$|h_2(s)| \leqslant (3^{-1} \times 8\sqrt{3}|x_s| + 3^{-1}(8\sqrt{3} + 56)\|Q\|_{H^2})\|\varepsilon\|_{H^2} + 3^{-1} \times 23\|\varepsilon\|_{H^2}^2.$$

综上，存在常数 $C_2 > 0$ 使得

$$|\lambda_s/\lambda| + |x_s - 1| \leqslant C_2\|\varepsilon(s)\|_{H^2}.$$

引理 6 得证.

3　$\varepsilon(s)$ 的一致有界性

引理 7（能量关系）　若 $u_0 = Q + \varepsilon_0$，则

$$\|\varepsilon(s)\|_{H^2}^2 = \lambda(s)\|\varepsilon_0\|_{H^2}^2 + 2\sqrt{3}(\lambda(s) - 1) + 4\sqrt{3}(\lambda(s)\varepsilon_0(0) - \varepsilon(s,0)), \forall s \geqslant 0.$$

证　记 $E(u) = \int_{\mathbf{R}}u^2 + u_x^2 + u_{xx}^2 dx = E(u_0)$. 因 $E(Q + \varepsilon(s)) = E(v(s)) = \lambda(s)E(u_0)$，且由

$\| Q \|_{H^2}^2 = 2\sqrt{3}$ 得

$$E(Q+\varepsilon(s)) = \|\varepsilon(s)\|_{H^2}^2 + 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3}\varepsilon(s,0).$$

又 $u_0 = Q + \varepsilon_0$，因此

$$\|\varepsilon(s)\|_{H^2}^2 = \lambda(s)\|\varepsilon_0\|_{H^2}^2 + 2\sqrt{3}(\lambda(s) - 1) + 4\sqrt{3}(\lambda(s)\varepsilon_0(0) - \varepsilon(s,0)).$$

引理 7 得证.

引理 8(**ε 的范数估计**) 若 $u(t) \in U_{\alpha_2}$，其中 $t \geqslant 0, 0 < \alpha_2 \leqslant \alpha < \alpha^*$，且 $u_0 = Q + \varepsilon_0$，满足 $\varepsilon_0 \in H^2(\mathbf{R})$，则存在常数 $C_3 > 0$，使得

$$\|\varepsilon(s)\|_{H^2} \leqslant C_3 \|\varepsilon_0\|_{H^2}^{1/2}, s \geqslant 0.$$

证 因为 $u(t) \in U_{\alpha_2}$，所以由引理 3 得

$$|\lambda(s) - 1| \leqslant C_1\alpha_2 \leqslant C_1\alpha.$$

因此，由引理 7 得

$$\|\varepsilon(s)\|_{H^2}^2 \leqslant a_1\|\varepsilon_0\|_{H^2} + a_2\|\varepsilon(s)\|_{H^2}, s \geqslant 0, \quad (18)$$

其中

$$a_1 = (\|\varepsilon_0\|_{H^2} + 4\sqrt{3})(1 + C_1\alpha), 0 < a_2 < +\infty.$$

反证：假设 $\exists s_0 > 0$ 使得 $\|\varepsilon(s_0)\|_{H^2} \neq 0$，且 $\forall 0 < C_0 < +\infty$ 有 $\|\varepsilon(s)\|_{H^2} > C_0\|\varepsilon_0\|_{H^2}^{1/2}$. 由(18)式得

$$\|\varepsilon(s)\|_{H^2} \leqslant (a_2 + \sqrt{a_2 + 4a_1\|\varepsilon_0\|_{H^2}})/2.$$

由 C_0 的任意性，取

$$C_0 = \|\varepsilon_0\|_{H^2}^{-1/2}(a_2 + \sqrt{a_2 + 4a_1\|\varepsilon_0\|_{H^2}})/2 + 1/2.$$

因此，$(a_3 + \|\varepsilon_0\|_{H^2}^{1/2})/2 < \|\varepsilon(s_0)\|_{H^2} \leqslant a_3/2$，$a_3 = a_2 + \sqrt{a_2 + 4a_1\|\varepsilon_0\|_{H^2}} > 0$，矛盾，引理 8 得证.

4 ε 的衰减性

引理 9 若 $\varepsilon_0 \in H^5(\mathbf{R})$，则 $\varepsilon \in L^\infty([0,T]; H^5(\mathbf{R}))$，$T > 0$，其中 ε 为(10)式的解.

证 由(9)式得

$$\mathrm{d}u/\mathrm{d}t = -uu_x - \int_{\mathbf{R}} P_{2z}(x-z)(u^2 + u_z^2/2 - u_{zz}^2/2)\mathrm{d}z + \frac{3}{2}\int_{\mathbf{R}} P_{2zzz}(x-z)u_z^2\mathrm{d}z. \quad (19)$$

等式两端同乘 $\partial_x^{10}u$，分部积分得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbf{R}} u_{xxxx}^2\mathrm{d}x = -\frac{11}{2}\int_{\mathbf{R}} u_{xxxx}^2 u_x\mathrm{d}x + \frac{55}{2}\int_{\mathbf{R}} u_{xxxx}^2 u_{xx}\mathrm{d}x - \frac{3}{2}\int_{\mathbf{R}}\partial_x^{10}u(x)\int_{\mathbf{R}} P_{2zzz}(x-z)u_z^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \int_{\mathbf{R}}\partial_x^{10}u(x)\int_{\mathbf{R}} P_{2z}(x-z)(u^2 + u_z^2/2 - u_{zz}^2/2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x.$$

因为 $\partial_x^3 P_2$ 在 $x = 0$ 处间断，由 Hölder 不等式和 Minkowski 不等式得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbf{R}} u_{xxxx}^2\mathrm{d}x \leqslant C(\|u\|_{H^2} + \|u\|_{H^4})\|u\|_{H^5}^2.$$

先证 $u \in L^\infty([0,T]; H^4(\mathbf{R}))$. (19)式两端分别乘 $\partial_x^{2k}u(k = 1,2,3,4)$，分部积分，只给出 $k = 4$ 的计算细节，其他情形类似.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbf{R}} u_{xxxx}^2\mathrm{d}x = -\frac{9}{2}\int_{\mathbf{R}} u_{xxxx}^2 u_x\mathrm{d}x + 5\int_{\mathbf{R}} u_{xxx}^3\mathrm{d}x + \frac{3}{2}\int_{\mathbf{R}}\partial_x^8 u(x)\int_{\mathbf{R}} P_{2zzz}(x-z)u_z^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x - \int_{\mathbf{R}}\partial_x^8 u(x)\int_{\mathbf{R}} P_{2z}(x-z)(u^2 + u_z^2/2 - u_{zz}^2/2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x,$$

因此，

$$\partial_t\int_{\mathbf{R}} u_{xxxx}^2\mathrm{d}x \leqslant C(\|u\|_{H^2} + \|u\|_{H^3})\|u\|_{H^4}^2.$$

同理，存在常数 $C > 0$，使得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u(t)\|_{H^4}^2 = \sum_{i=0}^{4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbf{R}}(\partial_x^i u)^2\mathrm{d}x \leqslant C(\|u(t)\|_{H^2} + \|u(t)\|_{H^3}^2)\|u(t)\|_{H^4}^2.$$

因 $u_0 \in H^3(\mathbf{R})$，由文献[17]定理 2.4 知，$u \in L^\infty([0,T]; H^3(\mathbf{R}))$，即 $\exists C' > 0$，使得

$$\|u(t)\|_{H^3} \leqslant C', \forall t \in [0,T].$$

由 Gronwall 不等式得

$$\|u\|_{H^4}^2 \leqslant \mathrm{e}^{C\int_0^t(\|u\|_{H^2} + \|u\|_{H^3}^2)\mathrm{d}t}\|u_0\|_{H^4}^2 \leqslant \mathrm{e}^{C(\|u_0\|_{H^2} + C'^2)t}\|u_0\|_{H^4}^2,$$

其中 $t \geqslant 0$，所以 $u \in L^\infty([0,T]; H^4(\mathbf{R}))$.

同理，$u \in L^\infty([0,T]; H^5(\mathbf{R}))$，$T > 0$.

又因 $\varepsilon(t,y) = \lambda^{1/2}(t)u(t, y + x(t)) + Q(y)$，所以 $\varepsilon \in L^\infty([0,T]; H^5(\mathbf{R}))$，$T > 0$，引理 9 得证.

令 $\eta(s,x) = \lambda^{-1/2}(s)\varepsilon(s,x)$，直接计算得

$$\lambda^{1/2}\eta_s - \lambda^{1/2}x_s\eta_x = f_1(s,x) - f_2(s,x) - f_3(s,x),$$

其中

$$f_1(s,x) = 2^{-1}\lambda_s\lambda^{-1}Q + x_sQ_x - QQ_x,$$

$$f_2(s,x) = \varepsilon\varepsilon_x + (Q\varepsilon)_x, f_3(s,x) = R_1(\varepsilon).$$

又 $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t = \lambda^{-1/2}(t)$，所以

$$\eta_t - x_t\eta_x = g_1(t,x) - g_2(t,x) - g_3(t,x), \quad (20)$$

其中

$$g_1 = 2^{-1}\lambda_t\lambda^{-3/2}Q + x_t\lambda^{-1/2}Q_x - \lambda^{-1}QQ_x,$$

$$g_2 = \eta\eta_x + \lambda^{-1/2}(Q\eta)_x, g_3 = \lambda^{-1}R_1(\varepsilon).$$

因 $\lambda(0) = 1$，(20)式的初值条件为

$$\eta(0) = \lambda^{-1/2}(0)\varepsilon_0(x) = \varepsilon_0(x).$$

下面先证明：若 $\exists a_0 > 0$，使得

$$|\varepsilon_0(x)| + |\varepsilon_{0xx}(x)| \leqslant a_0\mathrm{e}^{-\sqrt{3}x/2},$$

则 $\exists \theta_1 > 0$，使得

$$|\eta(t,x)| + |\eta_{xx}(t,x)| \leqslant \theta_1(\mathrm{e}^{-\sqrt{3}t/4} + 1)\mathrm{e}^{-\sqrt{3}x/2}, \quad t \geqslant 0, x \geqslant 0. \quad (21)$$

引理 10 若 $\exists a_0 > 0$，使得

$$|\varepsilon_0(x)| + |\varepsilon_{0xx}(x)| \leqslant a_0\mathrm{e}^{-\sqrt{3}x/2},$$

则 $\exists \theta_2 > 0$，使得

$$|\eta(t,x)| + |\eta_{xx}(t,x)| \leqslant \theta_2(a_0 + \alpha)\mathrm{e}^{-\sqrt{3}(x+t)/2},$$

$t \in (0,t_0)$,$x \geq 0$,其中 $t_0 = t_0(a_0,\alpha) > 0$.

由于篇幅有限,该引理的证明过程省略.

定义 $t^* = \sup\{t \geq 0, \forall s \in (0,t), \forall x \geq 0, |\eta| + |\eta_{xx}| \leq \theta_2(a_0+\alpha+1)(e^{-\sqrt{3}t/4}+1)e^{-\sqrt{3}x/2}\}$,当 $a_0 > 0$ 和 $t_0 > 0$ 足够小时,t^* 的定义对 $t^* = t_0$ 成立,因此,t^* 的定义合理.

断定 $t^* = +\infty$,考虑反证法,不妨设 $t^* < +\infty$. 下面在区间 $(0,t^*)$ 上估计 $\eta(t,x)$ 和 $\eta_{xx}(t,x)$. 考虑如下 Cauchy 问题

$$\begin{cases}\eta_t - x_t\eta_x = g_1(t,x) - g_2(t,x) - \\ g_3(t,x), (t,x) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}, \\ \eta(0,x) = \varepsilon_0(x), x \in \mathbf{R},\end{cases} \tag{22}$$

其中 $\varepsilon_0(x) \in H^5(\mathbf{R})$. 由线性方程的叠加原理,(22) 式的解可分解为如下 2 个 Cauchy 问题的解:

$$\begin{cases}\eta_t - x_t\eta_x = 0, (t,x) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}, \\ \eta(0,x) = \varepsilon_0(x), x \in \mathbf{R},\end{cases} \tag{23}$$

$$\begin{cases}\eta_t - x_t\eta_x = g_1(t,x) - g_2(t,x) - \\ g_3(t,x), (t,x) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}, \\ \eta(0,x) = 0, x \in \mathbf{R},\end{cases} \tag{24}$$

即若 $\eta_I(t,x)$,$\eta_{II}(t,x)$ 分别是(23) 式和(24) 式的解,则 $\eta(t,x) = \eta_I(t,x) + \eta_{II}(t,x)$ 是(22) 式的解.

取 $\alpha < \alpha_1 < \alpha^*$,由引理 3 和引理 6 知,存在常数 $C_4 > 0$,使得

$$|\lambda_s/\lambda| + |x_s - 1| + \|\varepsilon(s)\|_{H^2} \leq C_4\alpha, s \geq 0. \tag{25}$$

由引理 3 知 $|\lambda(s) - 1| \leq C_1\alpha$,取 $\alpha \leq (5C_1)^{-1}$,则 $4/5 \leq \lambda(s) \leq 6/5$,$s \geq 0$. 又由(25) 式,$|x_s - 1| \leq C_4\alpha$ 及 $x_s = \lambda^{1/2}x_t$ 得 $|x_s - 1| = |\lambda^{1/2}x_t - 1| \leq C_4\alpha$,所以 $x_t \geq (5/6)^{1/2}(1 - C_4\alpha)$,取

$$\alpha \leq (1 - (1/2)(6/5)^{1/2})C_4^{-1},$$

则 $(5/6)^{1/2}(1 - C_4\alpha) \geq 12$,所以 $x_t(t) \geq 1/2$. 因此,

$$x(t) - x(t') \geq (t - t')/2, \forall t,t' \geq 0. \tag{26}$$

引理 11(线性估计)　设 $\eta_I \in L^\infty([0,t^*]; H^5(\mathbf{R}))$ 为(23) 式的解,若

$$|\varepsilon_0(x)| + |\varepsilon_{0xx}(x)| \leq a_0 e^{-\sqrt{3}x/2},$$

则存在与 a_0 无关的 $\theta_0 > 0$,使得

$$|\eta_I(t,x)| + |(\eta_I)_{xx}(t,x)| \leq \theta_0 a_0 e^{-\sqrt{3}(2x+t)/4},$$

$x \geq 0$,$t \in [0,t^*]$.

证　对(23) 式,$\eta_I(t,x) = \varepsilon_0(x + x(t))$,$(t,x) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}$. 因 $x(0) = 0$,由引理条件及(26) 式得

$$|\eta_I(t,x)| = |\varepsilon_0(x + x(t))| \leq a_0 e^{-\sqrt{3}(2x+t)/4},$$

$x \geq 0$,$t \geq 0$.

同理

$$|\eta_{Ixx}(t,x)| = |\varepsilon_{0xx}(x + x(t))| \leq a_0 e^{-\sqrt{3}(2x+t)/4},$$

$x \geq 0$,$t \geq 0$.

引理 11 得证.

引理 12(非线性估计)　设 $\eta_{II} \in L^\infty([0,t^*]; H^5(\mathbf{R}))$ 为(24) 式的解,则存在与 θ_2,a_0,α 无关的常数 $C > 0$,使得

$$|\eta_{II}(t,x)| + |(\eta_{II})_{xx}(t,x)| \leq C\theta_2^2(a_0 + \alpha + 1)^2(e^{-\sqrt{3}t/4} + 1)e^{-\sqrt{3}x/2}, x \geq 0, t \in [0,t^*].$$

由于篇幅有限,该引理的证明过程省略.

又因(22) 式的解为

$$\eta(t,x) = \eta_I(t,x) + \eta_{II}(t,x),$$

结合引理 11 和引理 12 得

$$|\eta(t,x)| + |\eta_{xx}(t,x)| \leq C'_0\theta_2^2(a_0 + \alpha + 1)^2(e^{-\sqrt{3}/4} + 1)e^{-\sqrt{3}x/2}, x \geq 0, t \in [0,t^*]. \tag{27}$$

定理 1 的证明　设 $0 < t'_0 < t^*/2$,定义 $\tilde{\eta}(t,x) = \eta(t + t^* - t'_0/2, x)$,由(27) 式知,

$$|\tilde{\eta}(0,x)| + |\tilde{\eta}_{xx}(0,x)| \leq C\theta_2(a_0 + \alpha)e^{-\sqrt{3}(x+2^{-1}t'_0)/2}, x \geq 0,$$

然后,完全类似于引理 10 的论证,$\exists t'_0 > 0$,使得

$$|\tilde{\eta}(t,x)| + |\tilde{\eta}_{xx}(t,x)| \leq C\theta_2(a_0 + \alpha)e^{-\sqrt{3}(x+t)/2}, x \geq 0, t \in (0,t'_0)$$

(t'_0 依赖于 a_0,α). 因此,得

$$|\eta(t,x)| + |\eta_{xx}(t,x)| \leq C\theta_2(a_0 + \alpha)e^{-\sqrt{3}(x+2^{-1}t'_0)/2}, \forall x \geq 0, t^* < t <^* + t'_0/2. \tag{28}$$

在区间 $[0,t^* + \delta^*]$ 上估计 $\eta(t,x)$:将区间 $(t^*, t^* + t'_0/2)$ 上的估计(28) 式与 $(0,t^*)$ 上的估计(27) 式合并,于是 $0 < \delta^* < t'_0/2$,$\forall t \in [0,t^* + \delta^*]$,$\forall x > 0$,有

$$|\eta(t,x)| + |\eta_{xx}(t,x)| \leq C''\theta_2^2(a_0 + \alpha + 1)^2(e^{-\sqrt{3}t/4+1}e^{-\sqrt{3}x/2} + C\theta_2(a_0 + \alpha)e^{-\sqrt{3}(x+t'_0+\delta^*)/2}).$$

因此,取合适的 $\theta_2 > 0$ 及充分小的 a_0,$\alpha > 0$,对足够小的 $\delta^* > 0$,得到与 t^* 的定义相矛盾的 $\eta(t,x)$ 的估计. 所以,

$$|\eta(t,x)| + |\eta_{xx}(t,x)| \leq \theta_1(e^{-\sqrt{3}t/4} + 1)e^{-\sqrt{3}x/2},$$

$\forall x \geq 0$,$\forall t \geq 0$,

其中 $\theta_1 = \theta_2(a_0 + \alpha + 1)$. 于是,(21) 式得证.

因 $4/5 \leq \lambda(s) \leq 6/5$,$\mathrm{d}s/\mathrm{d}t = \lambda^{-1/2}(t)$,得

$$2\sqrt{5}s/5 \leq t \leq \sqrt{30}s/5,$$

又 $\varepsilon(s,x) = \lambda^{1/2}\eta(s,x)$,调整常数 θ_1,$\exists \theta = \theta_1$,使得

$$|\varepsilon(t,x)| + |\varepsilon_{xx}(t,x)| \leq \theta(e^{-\sqrt{3}t/4} + 1)e^{-\sqrt{3}x/2},$$

$\forall x \geqslant 0, \forall t \geqslant 0.$

定理 1 **得证**.

5 参考文献

[1] Constantin A,Kolev B. Geodesic flow on the diffeomorphism group of the circle [J]. Comment Math Helv,2003,78(4):787-804.

[2] Camassa R,Holm D. An integrable shallow water equation with peaked soliton [J]. Phys Rev Lett,1993,71:1661-1664.

[3] Bressan A,Constantin A. Global conservative solutions of the Camassa-Holm equation [J]. Arch Ration Mech Anal,2007,183(2):215-239.

[4] Coclite G M,Holden H,Karlsen K H. Wellposedness of solutions of a parabolic-elliptic system [J]. Discrete Contin Dyn Syst,2005,13(3):659-682.

[5] Constantin A,Escher J. Global existence and blow-up for a shallow water equation [J]. Ann Sc Norm Super Pisa CI Sci,1998,26(2):303-328.

[6] Constantin A,Escher J. Global weak solutions for a shallow water equation [J]. Indiana Univ Math J,1998,47(4):1527-1545.

[7] Constantin A,Escher J. On the structure of a family of quasi-linear equations arising in shallow water theory [J]. Math Ann,1998,312(3):403-416.

[8] Constantin A,Escher J. Wave breaking for nonlinear nonlocal shallow water equations [J]. Acta Math,1998,181(2):229-243.

[9] Constantin A,Escher J. Well-posedness,global existence,and blowup phenomena for a periodic quasi-linear hyperbolic equation [J]. Comm Pure Appl Math,1998,51(5):475-504.

[10] Constantin A,Molinet L. Global weak solutions for a shallow water equation [J]. Comm Math Phys,2000,211(1):45-61.

[11] Constantin A,Molinet L. Orbital stability of solitary waves for a shallow water equation [J]. Commun Math Phys,2001,157(1):75-89.

[12] Constantin A,Strauss W A. Stability of peakons [J]. Comm Pure Appl Math,2000,53(5):603-610.

[13] Ding Danping,Tian Lixin,Xu Gang. The study on solutions to Camassa-Holm equation with weak dissipation [J]. Commun Pure Appl Anal,2006,5(3):483-492.

[14] Holden H,Raynaud X. Periodic conservative solutions of the Camassa-Holm equation [J]. Ann Inst Fourier,2008,58(3):945-988.

[15] Tian Lixin,Fang Guochang,Gui Guilong. Well-posedness and blow-up for an integrable shallow water equation with strong dispersive term [J]. Int J Nonlinear Sci,2006,1(1):3-13.

[16] Xin Zhouping,Zhang Ping. On the weak solutions to a shallow water equation [J]. Comm Pure Appl Math,2000,53(11):1411-1433.

[17] Coclite G M,Holden H,Karlsen K H. Well-posedness of Higher-order Camassa-Holm equations [J]. J Differential Equations,2009,246(3):929-963.

[18] Ding Danping,Lv Peng. Conservative solutions for higher-order Camassa-Holm equation [J]. J Math Phys,2010,51:072701.

[19] Coclite G M,di Ruvo L. A note on the convergence of the solution of the high order Camassa-Holm equation to the entropy ones of a scalar conservation law [J]. Discrete Contin Dyn Syst,2017,37(3):1247-1282.

[20] Ding Danping. Traveling solutions and evolution properties of the higher order Camassa-Holm equation [J]. Nonlinear Anal,2017,152:1-11.

[21] Martel Y,Merle F. Instability of solitons for the critical generalized Korteweg-de Vries equation [J]. Geom Funct Anal,2001,11(1):74-123.

The Decay Property of Solutions Near the Traveling Waves for the Second-Order Camassa-Holm Equation

DING Danping,WANG Kai

(Faculty of Science,Jiangsu University,Zhenjiang Jiangshu 212013,China)

Abstract: The decay properties of solutions around the traveling waves for Cauchy problem of the second-order Camassa-Holm(CH) equation is studied. Applying the extended pseudo-conformal transformation methods that appear the relevant works on the generalized Korteweg-de Vries equation(KdV) from Martel and Merle,the solution is controlled by the decaying function with exponential speed, corresponding to the initial data and its second derivative with exponential decay.

Key words: second-order Camassa-Holm equation; traveling wave; pseudo-conformal transformation; decay

(责任编辑:曾剑锋)