

文章编号:1000-5862(2019)06-0605-08

一类混合双寡头模型的分岔分析与混沌控制

赵娜¹, 周伟^{1*}, 王文瑞²

(1. 兰州交通大学数理学院, 甘肃 兰州 730070; 2. 兰州交通大学经济管理学院, 甘肃 兰州 730070)

摘要:在有限理性的假设下,建立了由公私合营企业和外资企业组成的生产同质产品的动态混合双寡头模型,分析了该系统的均衡点的存在性和稳定性,并推导出均衡点不会通过 Neimark-Sacker 分岔失去稳定性.利用 Matlab 数值模拟了系统在选取不同参数时的动力学行为,结果表明:系统会通过 flip 分岔进入混沌状态,并且在特定的参数条件下会出现多吸引子共存的现象.此外,还发现调整速度的大小会影响系统的稳定状态,当调整速度较大时,系统更容易变得不稳定而进入混沌状态.对于系统的混沌状态,使用延迟反馈方法实施了有效控制.

关键词:混合寡头;分岔;吸引子共存;混沌控制

中图分类号:F 224 文献标志码:A DOI:10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2019.06.09

0 引言

由于寡头市场的复杂性,很多学者都致力于研究寡头市场的结构以及在不同的结构下市场的动力学行为. A. A. Cournot 在 1838 年提出了以产量作为竞争变量的双寡头博弈模型.但是在早期经典的 Cournot 模型中竞争者双方采取的是简单预期,即认为对方在每一时期的决策都会保持不变.但是随着研究的深入,众多学者发现采取简单预期在预测对手下一周期的产量决策时会有一定的局限性.因此,一些学者研究了具有动态调整机制的双寡头模型,参与者通过边际利润得到的部分信息来预测对手下一时期的产量决策^[1-3].在具有有限理性的双寡头模型中研究者们主要研究的是均衡点的存在性和唯一性以及寡头模型复杂的动力学行为. A. Agliari 等^[4]研究了发生全局分岔之后吸引子和它的吸引盆的变化情况. F. Cavalli 等^[5]分析了由于均衡点失去稳定性以及吸引子共存导致的非线性系统的复杂动力学行为.周伟等^[6-7]研究了具有研发溢出效应的 2 阶段 Cournot 双寡头模型的复杂动力学行为.黄东卫等^[8]研究了同质 3 寡头进行研发竞争的动力学行为,分析得出当企业的调整速度过大时会对自身平均利润产生消极影响,而对竞争对手的利润会产生促进作用.张芳等^[9]研究了在集中决策和分散

决策 2 种方式下的静态和动态双渠道供应链博弈模型.

但是,以上讨论的寡头模型都是私有企业,而在实际的市场环境中还存在国有企业与公私合营企业,并且混合寡头模型的研究在最近几年变得越来越流行. T. Matsumura^[10]指出在由公私合营企业和私有企业组成的混合双寡头市场中,完全公有化或完全私有化都不是最优结果. J. C. Bárcena-Ruiz 等^[11]分析了由一家半公有企业和多家私有企业组成的混合寡头在市场上同时做出决策的均衡情况. K. Fujiwara^[12]讨论了在差异化混合寡头模型中国有企业部分私有化后所获得的社会福利情况.对于混合寡头市场的研究,国内的学者也取得了不少的成果.徐晓慧等^[13]分析了在开放环境下民营化程度对于企业政策的决定以及社会福利的影响.张伟^[14]研究了在混合 3 寡头市场中私有化程度对企业的研发投入和社会福利的影响.张伟等^[15]探讨了在部分私有化的混合寡头模型中厂商的产权结构对于企业的研发效率以及福利的影响.叶光亮等^[16]研究了混合寡头市场中企业的产品差异化程度以及公有企业的私有化程度对最优关税的影响.但是对于上述的混合寡头博弈模型的研究都是基于静态博弈,他们只是通过数据分析了在均衡状态下所研究的目标函数的结果,并没有通过动态演化过程来分析模型的动力学行为.

收稿日期:2019-05-10

基金项目:国家自然科学基金(61863022)资助项目.

通信作者:周伟(1980-),男,山东聊城人,副教授,博士,主要从事非线性动力学研究. E-mail: wei_zhou@vip.126.com

本文在上述文献的基础上建立由公私合营企业和外资企业组成的生产同质产品的动态混合双寡头模型,先对模型中均衡点的存在性和稳定性进行分析,再通过数值模拟研究此动态模型的动力学行为.本文的目的是研究调整速度的变化对2家企业的动力学行为的影响,并分析在调整速度改变时企业应如何决定各自的产量以使得各自的目标函数最大化.

1 建立模型

为了描述产量竞争以及具有同质产品的双寡头模型的长期行为,本文建立一个公私合营企业(企业1)和外资企业(企业2)进行产量竞争的混合双寡头模型,企业1和企业2生产的是可替代性产品.假定消费者的效用函数为 $U = a(q_1 + q_2) - (q_1^2 + 2bq_1q_2 + q_2^2)/2$,其中 q_i 是2家企业产品的产量($i = 1, 2$). $a > 0$ 是一个常数 $b \in [0, 1]$ 表示产品间的可替代程度. b 越大表示产品间的可替换性越强, b 越小表示产品间的可替换性越弱,此外,若 $b = 0$ 则2家企业的产品是完全不同的,而 $b = 1$ 表示2家企业的产品是完全相同的.对于企业的逆需求函数可以通过求解效用函数得到,即价格 $p_i = \partial U / \partial q_i, i = 1, 2$,因此企业的逆需求函数可以写为

$$p_i = a - q_i - bq_j, i, j = 1, 2, i \neq j.$$

假设企业的成本函数为 $C_i = c_i q_i, c_i$ 为企业 i 的边际成本,由于外资企业要在国内占据市场,所以公私合营企业的边际成本要高于外资企业的边际成本,否则外资企业可能无法占据市场,即 $c_1 > c_2$.此外在国内企业和外资企业竞争的过程中,为了激励国内企业,政府会对国内企业进行补贴,假定单位产出补贴为 r ,则政府对企业1的总补贴为 $r q_1$.同时在外资企业进入国内市场时政府会对其征收关税,对单位产品政府征收关税为 t ,因此企业2需要向政府缴纳的总关税为 $t q_2$.根据上述假定,可以得到企业1和2的利润函数分别为

$$\begin{cases} \pi_1 = (a - c_1 + r)q_1 - q_1^2 - bq_1q_2, \\ \pi_2 = (a - c_2 - t)q_2 - q_2^2 - bq_1q_2. \end{cases}$$

由于2家企业的性质不同,他们追求的目标也会不同.对于企业1由于有政府控股,因此在它的目标函数中会考虑社会福利,社会福利包括消费者剩余和企业的利润.由于企业2为外资企业,在社会福利的构成中并不包括它的利润,而是由消费者剩余、企业1的利润以及企业2缴纳的关税构成,即

$$W = (a - c_1)q_1 + tq_2 - q_1^2/2 + q_2^2/2.$$

由企业1的企业性质可知,它的目标函数是想要社会福利和企业利润的加权平均和最大,可以推出企业1的目标函数的形式为

$$V_1 = (1 - \theta)W + \theta\pi_1 = (a - c_1 + r\theta)q_1 + t(1 - \theta)q_2 - (1 + \theta)q_1^2/2 + (1 - \theta)q_2^2/2 - b\theta q_1q_2,$$

其中 $\theta \in (0, 1)$ 是政府在公私合营企业中的控股权,当 $\theta = 0$ 时意味着企业1为纯粹的国有企业,即企业的目标函数为追求社会福利最大化.而当 $\theta = 1$ 时企业为纯粹的私有企业,即它的目标函数仅为追求利润最大化.在本文中考虑的是公私合营企业,所以不考虑 $\theta = 0, 1$ 的情况.

对于企业2只是考虑它自身所能获得的利润,因此它的目标函数只包含它自身的利润,即

$$V_2 = (a - c_2 - t)q_2 - q_2^2 - bq_1q_2,$$

则在点 (q_1, q_2) 处目标函数 V_1, V_2 的1阶条件为

$$\begin{cases} \partial V_1 / \partial q_1 = a - c_1 + r\theta - (1 + \theta)q_1 - b\theta q_2, \\ \partial V_2 / \partial q_2 = a - c_2 - t - bq_1 - 2q_2. \end{cases}$$

在现实的经济系统中,市场上的信息是相对封闭的,因此假定市场上企业获得的信息是不完全的,并且2家企业在做决策时都是有限理性的,即预测对方在 $t + 1$ 周期的策略时都是基于 t 周期的策略状态.基于以上假设,关于企业产品产量的动态调整机制可以表述为

$$\begin{cases} q_1(t + 1) = q_1(t) + u_1 q_1(t) \partial V_1 / \partial q_1, \\ q_2(t + 1) = q_2(t) + u_2 q_2(t) \partial V_2 / \partial q_2, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $u_1, u_2 > 0$ 分别代表企业1和企业2的动态调整速度.通过把 V_1, V_2 的1阶条件代入(1)式,可以建立以下的动态模型:

$$\begin{cases} q_1(t + 1) = q_1(t) + u_1 q_1(t) [(a - c_1 + r\theta) - (1 + \theta)q_1 - b\theta q_2], \\ q_2(t + 1) = q_2(t) + u_2 q_2(t) [(a - c_2 - t) - bq_1 - 2q_2]. \end{cases} \quad (2)$$

2 稳定性分析

本小节将会对模型(2)的均衡点的稳定性进行分析.对于均衡点的求解,令 $q_i(t + 1) = q_i(t)$,通过计算可以得到模型(2)的4个均衡点:

$$\begin{aligned} E_0 &= (0, 0), E_1 = ((a - c_1 + r\theta) / (1 + \theta), 0), \\ E_2 &= (0, (a - c_2 - t) / 2), E_3 = ((2(a - c_1 + r\theta) - b\theta(a - c_2 - t)) / (2(1 + \theta) - b^2\theta), ((1 + \theta)(a - c_2 - t) - b(a - c_1 + r\theta)) / (2(1 + \theta) - b^2\theta)). \end{aligned}$$

把位于坐标轴上的3个均衡点 E_0, E_1, E_2 称为边界均衡点,把均衡点 E_3 称为 Nash 均衡点或内部

均衡点. 通过计算发现 $2(1 + \theta) - b^2\theta > 0$ 恒成立, 所以 Nash 均衡点存在. 同时, 为了保证每个均衡点的非负性, 上面定义的参数必须满足

$$S_1: a - c_2 - t > 0, \quad 2(a - c_1 + r\theta) - b\theta(a - c_2 - t) > 0, \quad (1 + \theta)(a - c_2 - t) - b(a - c_1 + r\theta) > 0.$$

对于模型 (2) 的均衡点的局部稳定性, 可以通过 Jacobian 矩阵的特征值来研究. 模型 (2) 在任意点处的 Jacobian 矩阵为

$$J(q_1, q_2) = \begin{pmatrix} K_1 & -b\theta q_1 u_1 \\ -bq_2 u_2 & K_2 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

其中 $K_1 = 1 + (a - c_1 + r\theta - 2(1 + \theta)q_1 - b\theta q_2)u_1$, $K_2 = 1 + (a - c_2 - t - bq_1 - 4q_2)u_2$.

将均衡点代入 Jacobian 矩阵, 可以得到以下命题.

命题 1 E_0 是一个不稳定结点.

证 在均衡点 E_0 处的 Jacobian 矩阵为

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 + (a - c_1 + r\theta)u_1 & 0 \\ 0 & 1 + (a - c_2 - t)u_2 \end{pmatrix},$$

它的特征值为 $\lambda_1 = 1 + (a - c_1 + r\theta)u_1$, $\lambda_2 = 1 + (a - c_2 - t)u_2$. 由于 $a - c_1 + r\theta > 0$, $a - c_2 - t > 0$ 恒成立且 $u_1, u_2 > 0$, 所以 $\lambda_i > 1 (i = 1, 2)$. 因此 E_0 是一个不稳定的结点.

命题 2 当参数满足非负性条件 S_1 时, 边界均衡点 E_1 是一个鞍点.

证 将 E_1 代入 (3) 式可得

$$J\left(\frac{a - c_1 + r\theta}{1 + \theta}, 0\right) = \begin{pmatrix} 1 - (a - c_1 + r\theta)u_1 & K_3 \\ 0 & K_4 \end{pmatrix},$$

其中 $K_3 = -b\theta(a - c_1 + r\theta)u_1 / (1 + \theta)$, $K_4 = 1 + ((1 + \theta)(a - c_2 - t) - b(a - c_1 + r\theta))u_2 / (1 + \theta)$.

当参数满足非负性条件 S_1 时, 特征值 $\lambda_2 = 1 + ((1 + \theta)(a - c_2 - t) - b(a - c_1 + r\theta))u_2 / (1 + \theta) > 1$, 而特征值 $\lambda_1 = 1 - (a - c_1 + r\theta)u_1 < 1$. 因此边界均衡点 E_1 是一个鞍点. 对于均衡点 E_2 可以得到类似的结果, 在此不再赘述.

接下来主要分析 Nash 均衡点 E_3 的稳定性. 为了简化计算, 对 Nash 均衡点 E_3 的表达式进行变量替换, 令 $a - c_1 + r\theta = A_1$, $a - c_2 - t = A_2$, $1 + \theta = B$, $b\theta = C$, $b^2\theta - 2(1 + \theta) = C_1$, $2(a - c_1 + r\theta) - b\theta(a - c_2 - t) = C_2$, $(1 + \theta)(a - c_2 - t) - b(a - c_1 + r\theta) = C_3$. 通过将 Nash 均衡点 E_3 的具体表达式代入 (3) 式, 可以算出在该点处的 Jacobian 矩阵

$$J(E_3) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{BC_2}{C_1}u_1 & -\frac{CC_2}{C_1}u_1 \\ -\frac{C_3b}{C_1}u_2 & 1 - \frac{2A_2B}{C_1}u_2 \end{pmatrix},$$

在 Nash 均衡点 E_3 处 Jacobian 矩阵的特征多项式可以写为

$$F(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(J(E_3))\lambda + |J(E_3)|.$$

它的迹和行列式分别为

$$\text{tr}(J(E_3)) = 2 - (C_2Bu_1 + 2A_2Bu_2) / C_1,$$

$$|J(E_3)| = (C_1^2 - BC_1C_2u_1 - 2A_2BC_1u_2 + C_2(2A_2B^2 + CC_3b)u_1u_2) / C_1^2.$$

当且仅当满足 Jury 条件^[17]时, 均衡点是稳定的, 即

$$(i) 1 + \text{tr}(J(E_3)) + |J(E_3)| = (4C_1^2 - 2BC_1C_2u_1 - 4A_2BC_1u_2 + C_2(2A_2B^2 + CC_3b)u_1u_2) / C_1^2 > 0,$$

$$(ii) 1 - \text{tr}(J(E_3)) + |J(E_3)| = (2A_2B^2C_2 - CC_2C_3b)u_1u_2 / C_1^2 > 0,$$

$$(iii) 1 - |J(E_3)| = (2A_2BC_1u_2 + BC_1C_2u_1 - C_2(2A_2B^2 - CC_3b)u_1u_2) / C_1^2 > 0.$$

显然, 当参数满足非负性条件 S_1 时, 条件 (ii) 总是成立的, 所以只需讨论其余的 2 个条件是否成立. 若其他 2 个条件成立, 则可以得到

$$(2BC_1C_2u_1 - 4C_1^2) / (C_2(2A_2B^2 + CC_3b)u_1 - 4A_2BC_1) < u_2 < BC_1C_2u_1 / (C_2(2A_2B^2 - CC_3b)u_1 - 2A_2BC_1).$$

令 Jacobian 矩阵 $J(E_3)$ 的一个特征值为 -1 , 可得

$$1 + \text{tr}(J(E_3)) + |J(E_3)| = (4C_1^2 - 2BC_1C_2u_1 - 4A_2BC_1u_2 + C_2(2A_2B^2 + CC_3b)u_1u_2) / C_1^2 = 0,$$

从而有

$$u_1^* = (4A_2BC_1u_2 - 4C_1^2) / (C_2((2A_2B^2 + CC_3b)u_2 - 2BC_1)).$$

换句话说, 若企业 1 的调整速度 $u_1 > u_1^*$, 则 Jacobian 矩阵 $J(E_3)$ 的特征值大于 1, 此时可能会发生 flip 分岔. 在这种情况下, 固定其他的参数, 调整速度的增加会破坏均衡点的稳定性. 此外若令 $1 - |J(E_3)| = 0$, 得到

$$u_1^{**} = 2A_2BC_1u_2 / (C_2(2A_2B^2 + CC_3b)u_2 - BC_1C_2).$$

当 $u_1 > u_1^{**}$ 时, Nash 均衡点 E_3 会由于 Neimark-Sacker 分岔的发生而失去稳定性. 但是由于 Jacobian 矩阵 $J(E_3)$ 的所有特征值都不会是复数, 所以模型 (3) 在 1 周期时不会发生 Neimark-Sacker 分岔, 即均衡点 E_3 不会通过 Neimark-Sacker 分岔失去稳定性.

命题 3 当参数满足非负性条件 S_1 时, 系统的 Nash 均衡点 E_3 不会发生 Neimark-Sacker 分岔.

证 通过上述的分析可以得到

$$(\text{tr}(J(E_3)))^2 - 4|J(E_3)| = ((BC_2u_1 - 2A_2Bu_2)^2 + 4CC_2C_3bu_1u_2) / C_1^2.$$

很显然 $(\text{tr}(J(E_3)))^2 - 4|J(E_3)| > 0$ 是恒成立的,即对于上面的特征多项式,它的所有根都是实数,所以它不会有复特征值使得 $F(\lambda) = 0$,因此对于 Nash 均衡点 E_3 不会发生 Neimark-Sacker 分岔.

对于上述 Nash 均衡点稳定性的分析,通过在调整速度 (u_1, μ_2) 平面上的稳定域来进一步解释. 固定参数为 $a - c_1 = 4.79$, $\mu - c_2 = 7.15$, $b = 0.545$, $\theta = 0.14$, $r = 0.49$, $t = 0.12$. 图 1 展示了在这组参数下 Nash 均衡点的稳定域,其中阴影区域表示系统的稳定区域,超出部分系统处于多周期或混沌状态. 从图 1 可以清楚地看见, Nash 均衡点失去稳定性的途径只有一种,即发生 flip 分岔,这和上面稳定性分析得出的结论相符. 由 Nash 均衡点的精确表达式看出,调整速度的改变对于 Nash 均衡点的值不会产生影响,但是从图 1 中看到,改变调整速度会影响 Nash 均衡点的稳定性. 一旦增加 u_1 或 u_2 的值使得点 (u_1, u_2) 离开稳定域,系统会进入多周期或混沌状态. 2 家企业的产量演化会发生更为复杂的现象. 而当点 (u_1, μ_2) 位于稳定域内时, 2 家企业的产量 q_1, q_2 在经过若干次博弈之后最终会达到 Nash 均衡产量. 从图 1 还可以观察到,对于企业而言,采取较小的调整速度会更容易达到均衡状态.

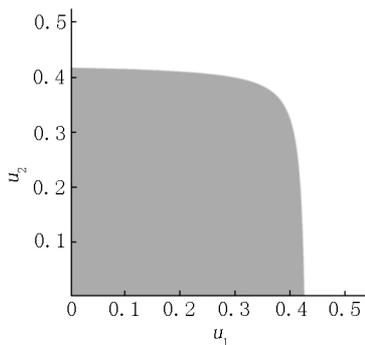


图 1 当参数选取为 $a - c_1 = 4.79$, $\mu - c_2 = 7.15$, $b = 0.545$, $\theta = 0.14$, $r = 0.49$, $t = 0.12$ 时系统的稳定域

3 数值模拟

在第 2 节中讨论了系统均衡点的稳定性条件,但是对于系统的动力学行为往往需要通过数值模拟的方法来直观地解释,所以在这一节中通过数值模拟来分析参数值的变化对系统的 Nash 均衡点稳定性的影响. 用数值模拟的结果来展示调整速度 u_1, u_2 的改变对其系统稳定性的影响. 为了实现这一目标,用到的方法有单参数分岔图、最大 Lyapunov 指数以及吸引盆等.

图 2 是在图 1 的参数下当取 $u_2 = 0.397$ 时所对

应的单参数分岔图和最大 Lyapunov 指数. 图 2(a) 展示了 u_1 作为分岔参数的单参数分岔图,观察到在 $0 \leq u_1 \leq 0.308$ 时 Nash 均衡点是稳定的,之后在 $u_1 = 0.308$ 时系统发生倍周期分岔,即由 1 周期到 2 周期、4 周期等,最后在 $u_1 > 0.505$ 时出现混沌行为,其中在 $0.497 \leq u_1 \leq 0.505$ 时系统处于拟周期状态. 单参数分岔图也更直观地验证了 Nash 均衡点会通过 flip 分岔失去稳定性. 从上述分析发现,当 u_1 的值足够小时,参与者的产量会收敛到 Cournot-Nash 均衡状态. 图 2(b) 是图 2(a) 对应的最大 Lyapunov 指数,当 Lyapunov 指数小于 0 时系统处于周期态,当 Lyapunov 指数等于 0 时系统处于拟周期态或位于分岔点处,而当最大 Lyapunov 指数大于 0 时系统对应于混沌区域,这意味着市场变得不稳定,并且对于较大的 u_1 的值,市场很容易进入混沌状态. 由于图 2(a) 在 $[0.49, 0.53] \times [4.6, 5.2]$ 区域内系统呈现出较为复杂的现象,所以为了更好地分析在此处的动力学行为,对于这一部分进行局部放大,如图 2(c) 所示. 通过与它对应的 Lyapunov 指数(见图 2(d)) 结合可以发现,系统在 $0.497 \leq u_1 \leq 0.505$ 时,最大 Lyapunov 指数都等于 0,系统处于拟周期状态之后进入混沌态,在进入混沌状态之后 Lyapunov 指数会出现小于 0 的情况. 在单参数分岔图中相对应地体现为周期窗口的出现. 为了说明在图 2(c) 中的现象,绘制系统的相图.

2 维相图相较于单参数分岔图等的显著优点是可以更为详细地描述系统轨迹的演化过程,从 2 维相图中可以清楚地分辨出系统处于何种状态. 图 3 展示了当 u_1 取不同值时在图 2(c) 的放大区域中的相图. 从单参数分岔图中可以看到,系统发生 flip 分岔由周期变为拟周期最终进入混沌,因此,在 $u_1 = 0.497$ 之前,系统的相图表现为周期性的点,分别是 1 周期、2 周期、4 周期,而在图 2(c) 中主要展示的是系统处于拟周期状态和混沌状态. 因此接下来在图 3 中也主要展示了对应的相图. 当 $u_1 = 0.497$ 时,系统对应于单参数分岔图中的拟周期状态,此时的相轨迹为拟周期环,由于系统是由 4 周期演化进入拟周期状态,所以在相图中会看到 4 个拟周期环的存在,如图 3(a) 所示. 随着 u_1 的增大,系统进入混沌状态,此时的吸引子为混沌吸引子,在每张相图中都有 4 片形状相似的混沌吸引子,如图 3(b) ~ 3(d) 所示. 从图 3 中可以看到,当系统处于混沌状态时,随着 u_1 值的增大,呈现出的混沌吸引子的形态也会发生改变,虽然吸引子的形态会随着 u_1 值的变化而发生改变,但是每片吸引子的相对位置以及吸引子的数量

并不会随着 u_1 的变化而变化.

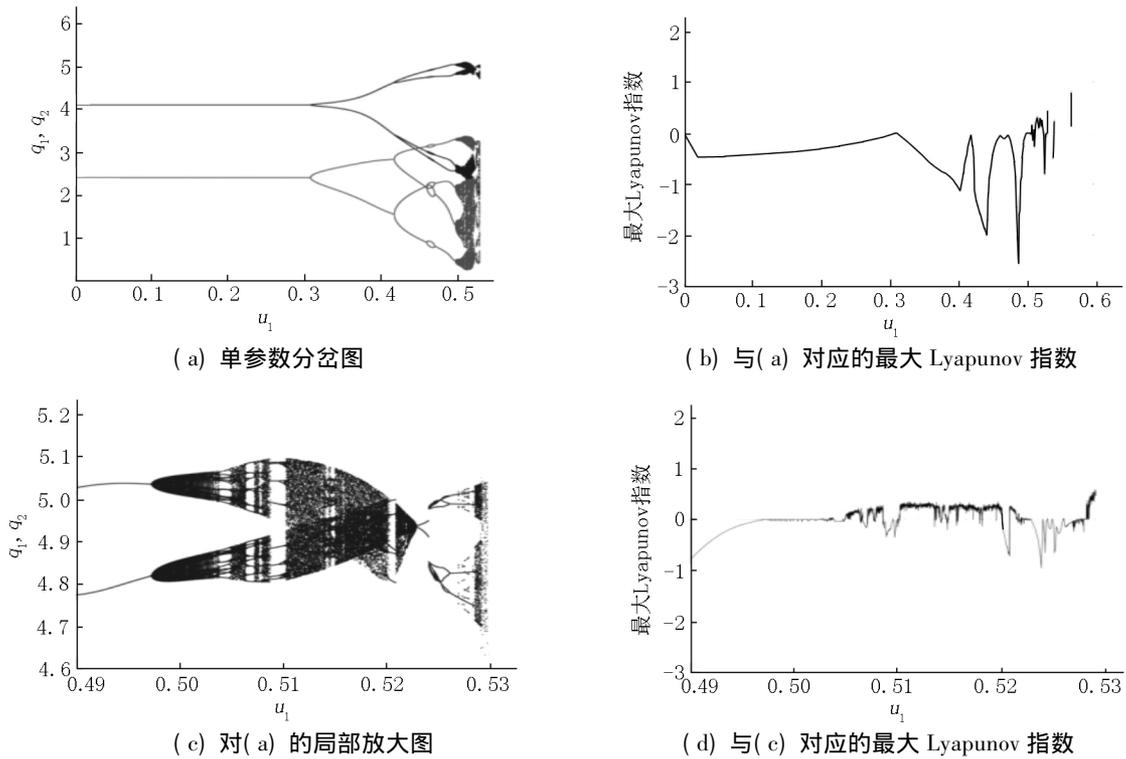


图 2 在相同参数下当 $u_2 = 0.397$ 时所对应的单参数分岔图和最大 Lyapunov 指数

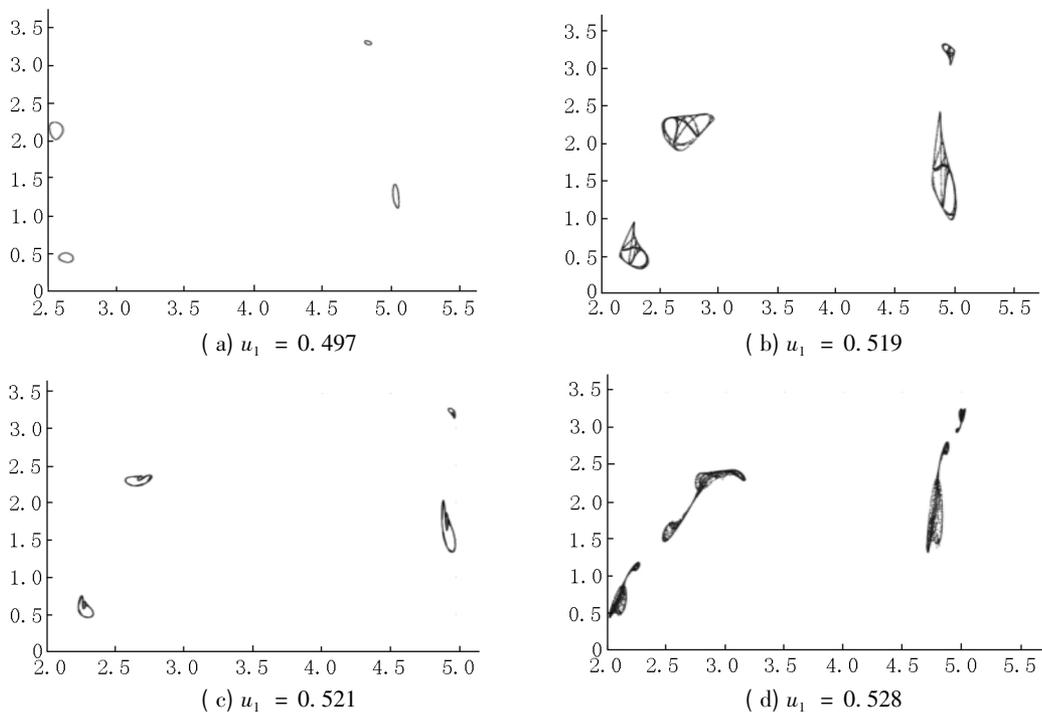


图 3 随着调整速度 u_1 的变化系统的相轨迹

在上述的参数条件下系统只出现了一种均衡存在的情况,然而,在一些经济系统中往往可能会出现多均衡共存的现象,随着初值的变化这些均衡的稳定性可能会发生改变.在经济学中这种现象被称为路径依赖,即企业长期选择哪种均衡取决于企业初值的选择.从动力学行为的角度来分析主要是由

于对于同样的条件系统可能会有多种分岔,这就使得系统表现出复杂的动力学行为,例如多个吸引子共存.多个吸引子共存意味着系统存在多稳态,多稳态主要是由于系统初值不同而导致系统出现多种分岔行为,也就是说,随着初值的改变,解的数目会由于系统的分岔发生变化.对于系统中的多稳态现

象用单参数分岔图和吸引盆来研究.

接下来主要分析改变调整速度 u_2 对系统全局动力学行为的影响. 参数选取为 $a - c_1 = 5.20$ $\mu - c_2 = 7.14$ $b = 0.07$ $\theta = 0.62$ $r = 0.213$ $t = 0.41$ $\mu_1 = 0.43$ 在这组参数下,通过数值模拟,发现对于不同的初值,系统会展现不同的复杂动力学行为. 首先通过单参数分岔图来解释,选取调整速度 u_2 作为分岔参数. 图 4(a) 和图 4(b) 在参数选取上的唯一差别是初值选取不同,图 4(a) 选取的初值为 (2.5, 2.0), 图 4(b) 的初值为 (3.8, 1.8). 从图 4(a) 和图 4(b) 中可以看出,对于相同的参数和不同的初值,分岔图会有不同的形状. 2 张分岔图都是

经过 flip 分岔进入混沌,但是进入混沌状态的快慢有所不同. 对比发现初值选取为 (2.5, 2.0) 的系统进入混沌的速度比初值为 (3.8, 1.8) 的速度更快,而且在图 4(b) 中系统出现了跳跃现象. 在多初值分岔图中,若分岔参数的值相同,而对应的 2 张分岔图的形状不同,则这意味着在不同点处可能会出现吸引子共存现象;很显然在这 2 组初值下取相同的分岔参数,单参数分岔图表现出的差别不止一处,即这意味着系统吸引子共存的类型不止一种,在本文中着重讨论图中画竖线处,即 $u_2 = 0.4$ 处的吸引子共存.

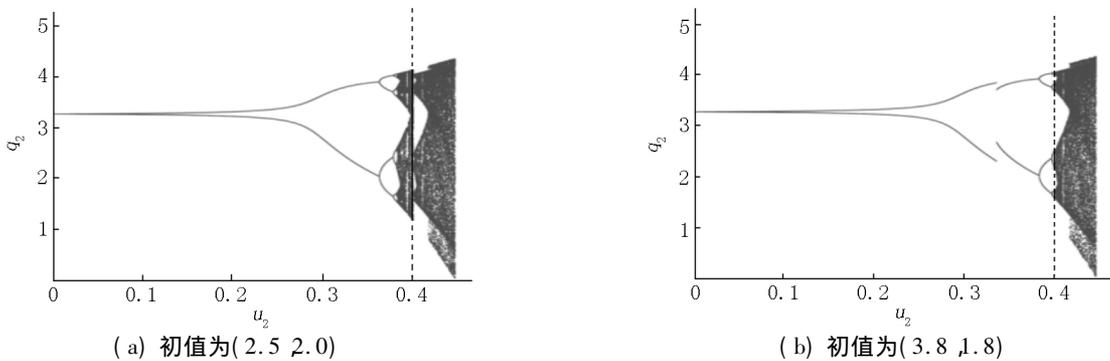


图 4 当参数选取为 $a - c_1 = 5.20$ $\mu - c_2 = 7.14$ $b = 0.07$ $\theta = 0.62$ $r = 0.213$ $t = 0.41$ $\mu_1 = 0.43$ 时对于不同的初值系统关于调整速度 u_2 的单参数分岔图

对于描述吸引子共存的另一主要工具是吸引盆. 相较于多初值分岔图,吸引盆不仅可以直观地看到吸引子共存的类型、数目,还可以清楚地看到每个吸引子的吸引域的大小. 图 5 展示了在 $u_2 = 0.4$ 的情况下的吸引盆,其中深色的区域表示逃逸区. 从图 5 可以看到此时吸引子共存的类型为: 位于浅色吸引域上的 2 片混沌吸引子和位于空白吸引域上的 8 周期的周期性吸引子. 这与图 4 展示的结果一致. 并且还可以观察到对于每个吸引子的吸引域都会存在一定的自相似结构. 从图 5 可以清楚地看到混沌吸引子的吸引域的面积要远远大于周期性吸引子的吸引域,借助于图 4 可以知道,随着 u_2 值的增大,吸引子共存的现象会随之消失,此时只会剩下混沌吸引子,即空白吸引域会彻底消失. 从经济学意义来说,若企业的初始产量选在浅色吸引域上,则最终也会收敛到浅色域上达到均衡状态. 同样地,若初始产量选在空白吸引域上,最终会收敛到空白域上达到均衡状态. 相反地,若初始产量选在深色区域,则企业最终不会收敛到任何均衡状态,所以,从长期来看企业不会在此区域中选择各自的初始产量. 从上述分析可以知道,通过数值模拟吸引盆会对企业的产量决策产生一定的指导作用.

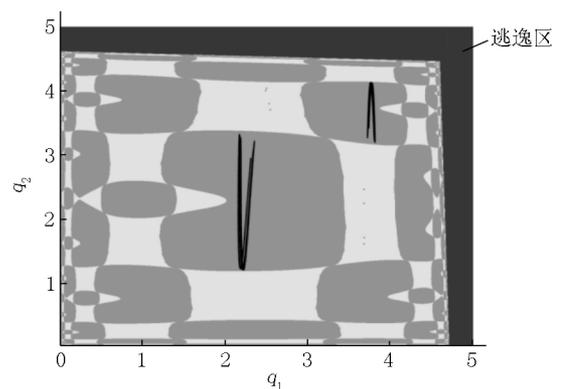


图 5 图 4 中当 $u_2 = 0.4$ 时的吸引盆

4 混沌控制

从上述的数值模拟中可以看到,调整速度的改变对于系统的稳定性会有较大的影响. 若模型的参数没有位于所需要的稳定区域内,则系统会呈现出非常复杂的动力学行为. 由于混沌状态的不可预测性,在一个现实的经济体系中往往需要避免混沌现象的发生,或者通过控制使得动态系统变得更好运作. 但是,因为应用的限制,很多控制方法不能应用于经济系统. 在这一部分通过使用延迟反馈控制方法^[18]来控制系统的混沌现象,这种方法仅仅取决于

系统的当前状态与延迟状态之间的差异.

在此给定一个延迟反馈系统:

$$y(t+1) = D(y(t), v(t)),$$

其中 $y(\cdot)$ 表示状态变量 $v(\cdot)$ 表示控制信号,在此令 $v(t) = k(y(t+1-\tau) - y(t+1))$ τ 表示延迟时间且 $t > \tau$ k 表示反馈增益.为了简化控制系统,只考虑 $\tau = 1$ 的情况,即 $v(t) = k(y(t) - y(t+1))$.

通过添加延迟反馈,取状态变量 $q_1(t)$ 作为延迟状态变量,系统(2)变为

$$\begin{cases} q_1(t+1) = q_1(t) + u_1 q_1(t) (a - c_1 + r\theta - (1 + \theta) q_1 - b\theta q_2) / (1 + k), \\ q_2(t+1) = q_2(t) + u_2 q_2(t) (a - c_2 - t - b q_1 - 2q_2). \end{cases} \quad (4)$$

从图 2 的单参数分岔和最大 Lyapunov 指数可以看到当企业 1 的调整速度 $u_1 = 0.529$ 时系统处于混沌状态,因此研究在此时加入控制之后的演化情况.图 6 是在混沌状态时加入控制之后的随着参数 k 变化的系统(4)的单参数分岔图.从图 6 可以发现倍周期分岔消失,当 $k < 0.063$ 时系统仍旧处于混沌状态或拟周期状态,此后系统发生了逆向的倍周期分岔,最终在 $k = 0.720$ 时进入 1 周期运动状态,其中在 $k = 0.125 \sim 0.150$ 之间产生了周期泡.在加入控制之后,系统的混沌现象逐渐消失并且当参数 k 足够大时系统变得稳定.

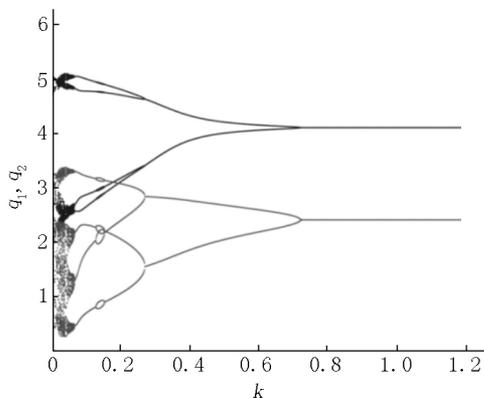


图 6 在图 2 的参数条件下,控制系统(7)的关于参数 k 的单参数分岔图

5 结论

本文研究了一个由公私合营企业和外资企业组成的混合双寡头模型的复杂动力学行为.在这个模型中,推导了系统有 3 个边界均衡点和 1 个 Nash 均衡点,并分析了各个均衡点的稳定性条件,验证了模型不会发生 Neimark-Sacker 分岔.与此同时,通过绘

制 (u_1, μ_2) 平面稳定域来分析了系统均衡点失去稳定性的路径.

接下来对系统的演化过程进行了数值模拟,包括分岔图、最大 Lyapunov 指数、相图以及吸引盆等.通过分岔分析很清楚地看到系统会经过 flip 分岔进入混沌状态,并且吸引子的演化过程也进一步地验证了从分岔图中观察到的结论.特别地,在一些给定的参数条件下,会观察到吸引子共存的现象,用多初值分岔图和吸引盆 2 种工具相结合来解释该现象,造成这种现象的原因在于相同参数下选取的初值不同.通过数值模拟发现对于较大的调整速度,系统很容易进入不稳定或混沌状态.由于混沌状态的不确定性,在现实的经济体系中往往要避免混沌状态的发生.最后通过添加延迟反馈控制使得系统的混沌行为趋于稳定态.

6 参考文献

- [1] Agiza H N, Hegazi A S, Elsadany A A. Complex dynamics and synchronization of a duopoly game with bounded rationality [J]. Mathematics and Computers in Simulation, 2002, 58(2): 133-146.
- [2] Puu T. The chaotic duopolists revisited [J]. Journal of Economic Behavior and Organization, 1998, 33(3/4): 385-394.
- [3] Ding Zhanwei, Wang Qiao, Jiang Shumin. Analysis on the dynamics of a Cournot investment game with bounded rationality [J]. Economic Modelling, 2014, 39: 204-212.
- [4] Agliari A, Naimzada A K, Pecora N. Nonlinear dynamics of a Cournot duopoly game with differentiated products [J]. Applied Mathematics and Computation, 2016, 281: 1-15.
- [5] Cavalli F, Naimzada A. Complex dynamics and multistability with increasing rationality in market games [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2016, 93: 151-161.
- [6] Zhou Jie, Zhou Wei, Chu Tong, et al. Bifurcation, intermittent chaos and multi-stability in a two-stage Cournot game with R&D spillover and product differentiation [J]. Applied Mathematics and Computation, 2019, 341: 358-378.
- [7] Zhang Yahui, Zhou Wei, Chu Tong, et al. Complex dynamics analysis for a two-stage Cournot duopoly game of semi-collusion in production [J]. Nonlinear dynamics, 2018, 91(2): 819-835.
- [8] 黄东卫,付玉霞,于沈新.同质企业研发竞争行为的动力学性态分析 [J]. 天津工业大学学报, 2015, 34(3): 73-77, 84.
- [9] 张芳,张婷婷,马小林.双渠道供应链博弈模型的复杂

- 性分析 [J]. 天津工业大学学报, 2015, 34(3): 78-84.
- [10] Matsumura T. Partial privatization in mixed duopoly [J]. *Journal of Public Economics*, 1998, 70(3): 473-483.
- [11] Bárcena-Ruiz J C, Garzón M B. Endogenous timing in a mixed oligopoly with semipublic firms [J]. *Portuguese Economic Journal*, 2010, 9(2): 97-113.
- [12] Fujiwara K. Partial privatization in a differentiated mixed oligopoly [J]. *Journal of Economics*, 2007, 92(1): 51-65.
- [13] 徐晓慧, 李杰. 混合寡头市场下的民营化和战略政策 [J]. *中国经济问题*, 2016(6): 96-108.
- [14] 张伟. 基于外资渗透和部分私有化的混合多寡头研发投入研究 [J]. *科技管理研究*, 2015, 35(9): 105-109.
- [15] 张伟, 于良春. 混合寡头厂商的合作研发及反垄断控制研究 [J]. *中国工业经济*, 2014(5): 44-56.
- [16] 叶光亮, 邓国营. 最优关税和部分私有化战略: 产品差异的混合寡头模型 [J]. *经济学: 季刊*, 2010, 9(2): 597-608.
- [17] Askar S S, Alshamrani A M, Alnowibet K. Dynamic Cournot duopoly games with nonlinear demand function [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2015, 259: 427-437.
- [18] Pyragas K. Continuous control of chaos by self-controlling feedback [J]. *Physics Letters A*, 1992, 170(6): 421-428.

The Bifurcation Analysis and Chaos Control of a Mixed Duopoly Model

ZHAO Na¹, ZHOU Wei^{1*}, WANG Wenrui²

(1. School of Mathematics and Physics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou Gansu 730070, China;

2. School of Economics and Management, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou Gansu 730070, China)

Abstract: Under the assumption of bounded rationality, a dynamical mixed duopoly model consisting of a public-private joint firm and a foreign enterprise is established. The existence and stability of equilibrium point of the system are analyzed, and it is concluded that the equilibrium point cannot lose its stability via Neimark-Sacker bifurcation. The dynamical behaviors of the system when selecting different parameters is numerically simulated by Matlab, the results show that the system will enter the chaotic state through the flip bifurcation. And under some certain parameter conditions, the phenomenon of coexistence of multiple attractors can be found. In addition, it is also found that the speed of adjustment affects the steady state of the built model. When the speed of adjustment is selected large enough, the system is more likely to become unstable and enter a chaotic state. The chaotic state of the system is controlled successfully using the so-called delay feedback method.

Key words: mixed duopoly; bifurcation; coexistence of attractors; chaos control

(责任编辑: 曾剑锋)