文章编号: 1000-5862(2020)01-0001-05

整函数及复合整函数的相对[p,q]级与相对[p,q]型

涂　金[1],孙合庆[1],刘　杰[2]
(1. 江西师范大学数学与信息科学学院,江西 南昌　330022;2. 豫章师范学院小学教育学院,江西 南昌　330103)

摘要: 利用整函数的增长性研究了整函数四则运算后的相对[p,q]级和相对[p,q]型,同时也研究了复合整函数的相对[p,q]级,进一步丰富和完善了原有的结果.

关键词: 整函数; 相对[p,q]级; 相对[p,q]型; 复合整函数
中图分类号: O 174.52　　**文献标志码**: A　　**DOI**: 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2020.01.01

0　引言

本文使用大家熟悉的 Nevanlinna 值分布理论的标准符号[1-3]. 用 $T_f(r) = T(r,f)$ 表示亚纯函数 $f(z)$ 的特征函数,用 $M_f(r) = M(r,f)$ 表示整函数 $f(z)$ 在圆周 $|z| = r > 0$ 上的最大模,由于它是 r 的单调递增函数,故 $M_f(r)$ 存在反函数 $M_f^{-1}(r)$ $(0 < r < \infty)$. 对任意正整数 i,当 r 充分大时,规定 $\log_1 r = \log r$, $\log_{i+1} r = \log(\log_i r)$ 和 $\exp_1 r = e^r$, $\exp_{i+1} r = \exp(\exp_i r)$,特别地,还有 $\exp_0 r = \log_0 r = r$, $\exp_{-1} r = \log_1 r$. 本文中 p,q 均为正整数且满足 $1 \leqslant q \leqslant p$.

定义 1[4-6]　若 $f(z)$ 为整函数,则 $f(z)$ 的[p,q]级和[p,q]下级分别定义为

$$\rho_{[p,q]}(f) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \log_{p+1} M(r,f)/\log_q r,$$

$$u_{[p,q]}(f) = \underline{\lim_{r\to\infty}} \log_{p+1} M(r,f)/\log_q r.$$

定义 2[7-8]　若函数 $f(z)$ 与 $h(z)$ 为整函数,则整函数 $f(z)$ 相对于 $h(z)$ 的增长级 $\rho^h(f)$ 和相对增长下级 $u^h(f)$ 分别定义为

$$\rho^h(f) = \inf\{\rho > 0: M(r,f) < M_h(r^\rho), 0 < r_0(\rho) < r\} = \overline{\lim_{r\to\infty}} \log M_h^{-1}M(r,f)/\log r;$$

$$u^h(f) = \sup\{u > 0: M(r,f) > M_h(r^u), 0 < r_0(u) < r\} = \underline{\lim_{r\to\infty}} \log M_h^{-1}M(r,f)/\log r.$$

当 $0 < \rho^h(f) < \infty$ 时,整函数 $f(z)$ 相对于 $h(z)$ 的相对增长型定义为

$$\tau^h(f) = \inf\{\tau > 0: M(r,f) < M_h(\tau r^{\rho^h(f)}), 0 < r_0(\tau) < r\} = \overline{\lim_{r\to\infty}} M_h^{-1}M(r,f)/r^{\rho^h(f)},$$

其中 $M_h^{-1}(r)$ 表示 $M(r,h)$ 的反函数,$M_h^{-1}M(r,f)$ 表示 $M_h^{-1}(M(r,f))$,特别地,当 $h(z) = e^z$ 时,定义 2 就是整函数级与型的经典定义.

定义 3[9-10]　若函数 $f(z)$ 与 $h(z)$ 为整函数,则 $f(z)$ 相对于 $h(z)$ 的[p,q]级和[p,q]下级分别定义为

$$\rho^h_{[p,q]}(f) = \inf\{\rho > 0: M(r,f) < M_h(\exp_{p-1}(\log_{q-1} r)^\rho), 0 < r_0(\rho) < r\};$$

$$u^h_{[p,q]}(f) = \sup\{u > 0: M(r,f) > M_h(\exp_{p-1}(\log_{q-1} r)^u), 0 < r_0(u) < r\}.$$

当 $0 < \rho^h_{[p,q]}(f) < \infty$ 时,$f(z)$ 相对于 $h(z)$ 的[p,q]增长型定义为

$$\tau^h_{[p,q]}(f) = \inf\{\tau > 0: M(r,f) < M_h(\exp_{p-1}(\tau(\log_{q-1} r)^{\rho^h_{[p,q]}(f)})), 0 < r_0(\tau) < r\}.$$

上面 3 个定义用上下极限表示,则

$$\rho^h_{[p,q]}(f) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \log_p M_h^{-1}M(r,f)/\log_q r,$$

$$\tau^h_{[p,q]}(f) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \log_{p-1} M_h^{-1}M(r,f)/(\log_{q-1} r)^{\rho^h_{[p,q]}(f)},$$

$$u^h_{[p,q]}(f) = \underline{\lim_{r\to\infty}} \log_p M_h^{-1}M(r,f)/\log_q r.$$

1　结果

近年来国内外的一些文献开始研究整函数以及单位圆内解析函数四则运算后的级与型[11-15],其中

收稿日期: 2019-09-10
基金项目: 国家自然科学基金(11561031,11861005),江西省自然科学基金(20161BAB201020)和江西省教育厅基金(GJJ151331)资助项目.
作者简介: 涂　金(1979-),男,江西鹰潭人,教授,博士,主要从事复分析研究. E-mail: tujin2008@sina.com

有以下 2 个结果.

定理 A[15] 假设 $f_1(z)$ 和 $f_2(z)$ 是整函数且满足 $0<\sigma_{[p,q]}(f_1)=\sigma_{[p,q]}(f_2)=\sigma<\infty$ 和 $\tau_1=\tau_{[p,q]}(f_1)<\tau_{[p,q]}(f_2)=\tau_2\leqslant\infty$,则以下结论成立:

(i) 当 $1\leqslant q\leqslant p$ 时,有

$\sigma_{[p,q]}(f_1+f_2)=\sigma,\tau_{[p,q]}(f_1+f_2)=\tau_2$;

(ii) 当 $p>1$ 时,有

$\sigma_{[p,q]}(f_1\cdot f_2)=\sigma,\tau_{[p,q]}(f_1\cdot f_2)=\tau_2$;

(iii) 当 $p=q=1$ 时,有

$$\tau_2-\tau_1\leqslant\tau(f_1\cdot f_2)\leqslant\tau_1+\tau_2.$$

定理 B[15] 假设 $f(z)$ 是整函数且满足 $0<\sigma_{[p,q]}(f)<\infty$,则

$\sigma_{[p,q]}(f)=\sigma_{[p,q]}(f'),\tau_{[p,q]}(f)=\tau_{[p,q]}(f')$.

在文献[16]中,笔者研究了 2 个迭代级整函数复合以后的增长级,当 $p=q=1$ 时,得到以下 2 个结果.

定理 C[16] 若 $f(z)$,$g(z)$ 为有限级超越整函数且满足 $0<u(f)\leqslant\rho(f)<+\infty$,则

$$\rho_2(f(g))=\rho(g).$$

定理 D[16] 若 $f(z)$,$g(z)$ 为有限级超越整函数且满足 $0<u(g)\leqslant\rho(g)<+\infty$,则

$$u(g)\leqslant\rho_2(f(g))\leqslant\rho(g).$$

本文利用相对 $[p,q]$ 级的概念,在定理 A ~ 定理 D 的基础上,且当整函数 $h(z)$ 满足性质(A)的同时,将定理 A ~ 定理 D 的结果推广到整函数的相对 $[p,q]$ 级与相对 $[p,q]$ 型的情形,得到以下定理 1 ~ 定理 5. 但这里必须在整函数 $h(z)$ 满足一定的条件下才得到,下面将给出整函数 $h(z)$ 需要满足的充分条件.

注 1 若 $\forall\omega>1$,以及任意正整数 $n\geqslant2$,当 r 充分大时,整函数 $h(z)$ 的最大模满足不等式 $[M_h(r)]^n<M_h(r^{\omega})$,则称整函数 $h(z)$ 具有性质(A),显然这里 $h(z)$ 为超越整函数.

定理 1 若 $f_1(z)$,$f_2(z)$ 为整函数,$h(z)$ 为超越整函数且满足注 1 中的性质(A),$f_1(z)$,$f_2(z)$ 相对函数 $h(z)$ 的 $[p,q]$ 增长级分别为 $\rho^h_{[p,q]}(f_1)=\sigma_1$,$\rho^h_{[p,q]}(f_2)=\sigma_2$,其中 $\sigma_1\neq\sigma_2$,则

(i) $\rho^h_{[p,q]}(f_1+f_2)=\max\{\sigma_1,\sigma_2\}$,其中 σ_1,σ_2 有 1 个允许为无穷;

(ii) $\rho^h_{[p,q]}(f_1\cdot f_2)=\max\{\sigma_1,\sigma_2\}$.

定理 2 假设 $f(z)$ 与 $h(z)$ 为超越整函数,满足 $0<\rho^h_{[p,q]}(f)=\sigma_3<+\infty$ 且当 $0<\tau^h_{[p,q]}(f)<+\infty$ 时,则

(i) $\rho^h_{[p,q]}(f)=\rho^h_{[p,q]}(f')$;(ii) $\tau^h_{[p,q]}(f)=\tau^h_{[p,q]}(f')$.

定理 3 假设超越整函数 $f_1(z)$,$f_2(z)$,$h(z)$ 满足 $0<\rho^h_{[p,q]}(f_1)=\rho^h_{[p,q]}(f_2)=\sigma_4<\infty$,并且有 $0<\tau_1=\tau^h_{[p,q]}(f_1)<\tau_2=\tau^h_{[p,q]}(f_2)\leqslant\infty$,其中 $h(z)$ 还满足性质(A),则

(i) 当 $1\leqslant q\leqslant p$ 时,有

$\rho^h_{[p,q]}(f_1+f_2)=\sigma_4,\tau^h_{[p,q]}(f_1+f_2)=\tau_2$;

(ii) 当 $p>1$ 时,有

$\rho^h_{[p,q]}(f_1\cdot f_2)=\sigma_4,\tau^h_{[p,q]}(f_1\cdot f_2)=\tau_2$.

定理 4 假设 $f(z)$,$g(z)$,$h(z)$ 为超越整函数,满足 $0<u^h(f)\leqslant\rho^h(f)<+\infty$ 及 $0<u_{[p,q]}(g)\leqslant\rho_{[p,q]}(g)<+\infty$,则

$\rho^h_{[p+1,q]}(f(g))=\rho_{[p,q]}(g),u^h_{[p+1,q]}(f(g))=u_{[p,q]}(g)$.

定理 5 假设 $f(z)$,$g(z)$,$h(z)$ 是超越整函数且满足 $0<\rho^h(f)<\infty$ 及 $0<u_{[p,q]}(g)\leqslant\rho_{[p,q]}(g)<\infty$,则 $u_{[p,q]}(g)\leqslant\rho^h_{[p+1,q]}(f(g))\leqslant\rho_{[p,q]}(g)$.

推论 1 若 $f(z)$,$g(z)$,$h(z)$ 是整函数,满足 $0<\rho^h(f)<\infty$,$u_{[p,q]}(g)=\rho_{[p,q]}(g)$,则

$$\rho^h_{[p+1,q]}(f(g))=u^h_{[p+1,q]}(f(g)).$$

2 引理

引理 1[17] (i) 若 $h(z)$ 为超越整函数,则 $\forall\lambda>1$,有 $\lim\limits_{r\to\infty}M(\lambda r,h)/M(r,h)=+\infty$;(ii) 若 $\alpha(r)$,$\beta(r)$ 均为 r 的单调增函数且满足 $\lim\limits_{r\to\infty}\alpha(r)/\beta(r)=0$,则 $\lim\limits_{r\to\infty}M_h(\alpha(r))/M_h(\beta(r))=0$.

引理 2[14] 若 $f(z)$ 在圆盘 $|z|\leqslant\beta r(\beta>1)$ 内解析且满足 $f(0)=1$,则 $\forall\varepsilon(0<\varepsilon<2)$,当 $|z|\leqslant r$ 时,除去一些以 $f(z)$ 的零点为圆心、半径总和不超过 $2\varepsilon e\beta r$ 的例外圆,有

$$\ln|f(z)|>-k(\beta)\ln M(\beta^2r,f),$$

其中 $k(\beta)=2/(\beta-1)+(\ln2-\ln\varepsilon)/\ln\beta$.

引理 3 假设 $f(z)$,$h(z)$ 为整函数,

(i) 若 $\rho^h_{[p,q]}(f)=\rho>0$,则对任意给定的 $0<\varepsilon<\rho$,存在一个对数测度为无穷的集合 E_1,$\forall r\in E_1$,有

$$M(r,f)>M_h(\exp_{p-1}(\log_{q-1}r)^{\rho-\varepsilon});$$

(ii) 若 $0<\rho^h_{[p,q]}(f)=\rho<\infty$,$\tau^h_{[p,q]}(f)=\tau>0$,则对任意给定的 $0<\varepsilon<\tau$,存在一个对数测度为无穷的集合 E_2,$\forall r\in E_2$,有

$$M(r,f)>M_h((\tau-\varepsilon)\exp_{p-1}(\log_{q-1}r)^{\rho}).$$

证 (i) 根据相对 $[p,q]$ 级的定义,存在一个趋于无穷的序列 $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$,满足 $(1+1/n)r_n<r_{n+1}$,且有

$$\lim_{r\to\infty}\log_pM_h^{-1}M(r_n,f)/\log_qr_n=\rho,$$

对任意的给定的 $\varepsilon(0<\varepsilon<\rho)$,存在正整数 n_0,当

$n>n_0$ 时,有 $\log_p M_h^{-1}M(r_n,f)>(\rho-\varepsilon/2)\log_q r_n$,即

$$M(r_n,f)>M_h\{\exp_p((\rho-\varepsilon/2)\log_q r_n)\}.$$

不妨令集合 $E_1=\bigcup_{n=n_0}^{\infty}[r_n,(1+1/n)r_n]$,当 $r\in[r_n,(1+1/n)r_n]$ 时,有

$$M(r,f)\geqslant M(r_n,f)>M_h\{\exp_p((\rho-\varepsilon/2)\cdot(\log_q r_n))\}\geqslant M_h\{\exp_p((\rho-\varepsilon/2)\log_q(nr/(n+1)))\}\geqslant M_h\{\exp_p((\rho-\varepsilon)\log_q r)\},$$

其中 $m_lE_1=\sum_{n=n_0}^{\infty}\int_{r_n}^{(1+1/n)r_n}\mathrm{d}r/r=\sum_{n=n_0}^{\infty}\log(1+1/n)=\infty$,故结论(i)得证.

结论(ii)的证明和结论(i)的证明类似,略.

引理 4[18]　若 $f(z)$ 与 $g(z)$ 为整函数,满足 $g(0)=0$,令 $\psi(\lambda)=(1-\lambda)^2/(4\lambda)\ (0<\lambda<1)$,则当 $r>0$ 时,有

$$M(M(r,g),f)\geqslant M(r,f(g))\geqslant M(\psi(\lambda)M(\lambda r,g),f).$$

3　定理的证明

定理 1 的证明　(i) 为方便起见,不妨设 $\sigma_1<\sigma_2$,由相对 $[p,q]$ 增长级的定义知,$\forall\varepsilon>0$,$\exists r_0>0$,当 $r>r_0$ 且趋于无穷时,有

$$M(r,f_1+f_2)\leqslant M(r,f_1)+M(r,f_2)\leqslant M_h(\exp_{p-1}(\log_{q-1}r)^{\sigma_1+\varepsilon})+M_h(\exp_{p-1}(\log_{q-1}r)^{\sigma_2+\varepsilon})\leqslant 2M_h(\exp_{p-1}(\log_{q-1}r)^{\sigma_2+\varepsilon})\leqslant M_h(\exp_{p-1}(\log_{q-1}r)^{\sigma_2+2\varepsilon}).$$

从而有

$$\log_p M_h^{-1}M(r,f_1+f_2)\leqslant(\sigma_2+2\varepsilon)\log_q r,$$

由定义可得 $\rho_{[p,q]}^h(f_1+f_2)\leqslant\sigma_2$.

另一方面,$\forall\varepsilon>0$,存在一趋于无穷的序列 $\{r_n\}$,有

$$M(r_n,f_1+f_2)\geqslant M(r_n,f_2)-M(r_n,f_1)\geqslant M_h(\exp_{p-1}(\log_{q-1}r_n)^{\sigma_2-\varepsilon})-M_h(\exp_{p-1}(\log_{q-1}r_n)^{\sigma_1+\varepsilon}),$$

分别由引理 1 的性质(ii)和性质(i),选取 ε 满足 $0<2\varepsilon<\sigma_2-\sigma_1$,有

$$M(r_n,f_1+f_2)\geqslant M_h(\exp_{p-1}(\log_{q-1}r_n)^{\sigma_2-\varepsilon})/2\geqslant M_h(\exp_{p-1}(\log_{q-1}r_n)^{\sigma_2-2\varepsilon}).$$

由定义得 $\rho_{[p,q]}^h(f_1+f_2)\geqslant\sigma_2$,因此 $\rho_{[p,q]}^h(f_1+f_2)=\sigma_2$,即结论(i)得证;

(ii) 同样,不妨设 $\sigma_1<\sigma_2$,由相对 $[p,q]$ 级的定义可知,$\forall\varepsilon>0$,当 r 充分大时,有

$$M(r,f_1\cdot f_2)\leqslant M(r,f_1)\cdot M(r,f_2)\leqslant M_h(\exp_{p-1}(\log_{q-1}r)^{\sigma_1+\varepsilon})\cdot M_h(\exp_{p-1}(\log_{q-1}r)^{\sigma_2+\varepsilon}),$$

由 $h(z)$ 满足性质(A)可得

$$M(r,f_1\cdot f_2)\leqslant[M_h(\exp_{p-1}(\log_{q-1}r)^{\sigma_2+\varepsilon})]^2\leqslant M_h(\exp_{p-1}(\log_{q-1}r)^{\sigma_2+2\varepsilon}),$$

从而有 $\log_p M_h^{-1}M(r,f_1\cdot f_2)\leqslant(\sigma_2+2\varepsilon)\log_q r$,根据定义和 ε 的任意性,有 $\rho_{[p,q]}^h(f_1\cdot f_2)\leqslant\sigma_2$.

另一方面,由引理 2 可知,取 $\beta=2$,对任意给定的 $\varepsilon(0<\varepsilon<2)$,存在一个对数测度有限的集合 E_0,当所有的 $|z|=r\notin E_0$ 时,有

$$|f_1(z)|>1/[M(4r,f_1)]^{k(2)},\tag{1}$$

其中 $k(2)=2+(\ln 2-\ln\varepsilon)/\ln 2$. 由引理 3 结论(i)可知,存在一个无限对数测度的集合 E_1,使得 $\forall r\in E_1$,有

$$M(r,f_2)\geqslant M_h(\exp_{p-1}(\log_{q-1}r)^{\sigma_2-\varepsilon}).\tag{2}$$

因为整函数 $h(z)$ 满足性质(A),则 $\forall r\in E_1\backslash E_0$,由(1)~(2)式,有

$$M(r,f_1\cdot f_2)\geqslant|f_1(z)|\cdot M(r,f_2)\geqslant\frac{M(r,f_2)}{[M(4r,f_1)]^{k(2)}}\geqslant\frac{M_h(\exp_{p-1}(\log_{q-1}r)^{\sigma_2-\varepsilon})}{[M(4r,f_1)]^{k(2)}}\geqslant\frac{[M_h(\exp_{p-1}(\log_{q-1}r)^{\sigma_2-2\varepsilon})]^2}{M_h[(\exp_{p-1}(\log_{q-1}4r)^{\sigma_1+\varepsilon})^2]}\geqslant\frac{[M_h(\exp_{p-1}(\log_{q-1}r)^{\sigma_2-2\varepsilon})]^2}{M_h(\exp_{p-1}(\log_{q-1}4r)^{\sigma_1+2\varepsilon})}\geqslant M_h(\exp_{p-1}(\log_{q-1}r)^{\sigma_2-2\varepsilon}),$$

其中上式 ε 满足 $0<4\varepsilon<\sigma_2-\sigma_1$,当 $r\to\infty$ 时,有

$$M(r,f_1\cdot f_2)\geqslant M_h(\exp_{p-1}(\log_{q-1}r)^{\sigma_2-2\varepsilon}),$$

可得 $\rho_{[p,q]}^h(f_1\cdot f_2)\geqslant\sigma_2$,因此有 $\rho_{[p,q]}^h(f_1\cdot f_2)=\sigma_2$,即结论(ii)得证.

定理 2 的证明　(i) 为方便起见,不妨记 $\rho_{[p,q]}^h(f')=\sigma_3'$,因为

$$\int_0^z f'(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta=f(z)-f(0),$$

其中积分路线是从 0 到 z 的直线段,因 $f(z)$ 超越,$\forall\varepsilon>0$ 及充分大的 r,有

$$M(r,f)\leqslant|f(0)|+rM(r,f')\leqslant M_h(\exp_{p-1}(\log_{q-1}r)^{\sigma_3'+\varepsilon}).\tag{3}$$

另一方面,有

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2}\mathrm{d}\xi,$$

其中积分曲线 C 为圆周 $|\xi|=R>|z|>r$ 有

$$M(r,f')\leqslant\frac{1}{2\pi}\frac{M(R,f)}{(R-r)^2}\cdot 2\pi R.$$

不妨令 $R=\upsilon r(\upsilon>1)$,当 $r>\upsilon/(\upsilon-1)^2$ 时,有

$$M(r,f')\leqslant\upsilon M(\upsilon r,f)/((\upsilon-1)^2r)\leqslant M(\upsilon r,f)\leqslant M_h(\exp_{p-1}(\log_{q-1}(\upsilon r))^{\sigma_3+\varepsilon}),\tag{4}$$

根据相对 $[p,q]$ 级的定义和(3)~(4)式,可得 $\sigma_3=\sigma_3'$,即结论(i)成立.

(ii) 令 $\rho_{[p,q]}^h(f)=\rho_{[p,q]}^h(f')=\rho$,$\tau_{[p,q]}^h(f)=$

$\tau,\tau_{[p,q]}^{h}(f')=\tau'$,根据(3) ~(4) 式,$\forall\varepsilon>0$,当 r 充分大时,有

$$M(r,f)\leqslant|f(0)|+rM(r,f')\leqslant M_h(\exp_{p-1}((\tau'+2\varepsilon)(\log_{q-1}r)^{\rho})),\tag{5}$$

另一方面,$\forall\upsilon>1$,当 $r>\upsilon/(\upsilon-1)^2$ 时,有

$$M(r,f')\leqslant M(\upsilon r,f)\leqslant M_h(\exp_{p-1}((\tau+\varepsilon)(\log_{q-1}(\upsilon r))^{\rho})).\tag{6}$$

根据(5) ~(6) 式和相对 $[p,q]$ 型的定义,可得 $\tau_{[p,q]}^{h}(f)=\tau_{[p,q]}^{h}(f')$,结论(ii) 得证.

定理 3 的证明 (i) 由相对 $[p,q]$ 型的定义,$\forall\varepsilon>0$,当 r 充分大时,有

$$M(r,f_i)\leqslant M_h(\exp_{p-1}((\tau_i+\varepsilon)(\log_{q-1}r)^{\sigma_4})),$$

其中 $i=1,2$. 由最大模的性质,在圆周 $|z|=r>0$ 上有 $M(r,f_1+f_2)\leqslant M(r,f_1)+M(r,f_2)$,由于 $\tau_1<\tau_2$,故

$$M(r,f_1+f_2)\leqslant 2M_h(\exp_{p-1}((\tau_2+\varepsilon)\cdot(\log_{q-1}r)^{\sigma_4})).\tag{7}$$

另一方面,$\forall\varepsilon>0$ 存在一趋于无穷的点列 $\{r_n\}$,使得

$$M(r_n,f_2)\geqslant M_h(\exp_{p-1}((\tau_2-\varepsilon)(\log_{q-1}r_n)^{\sigma_4})),$$

从而有

$$M(r_n,f_1+f_2)\geqslant M(r_n,f_2)-M(r_n,f_1)\geqslant M_h(\exp_{p-1}((\tau_2-\varepsilon)(\log_{q-1}r_n)^{\sigma_4})-M_h(\exp_{p-1}((\tau_1+\varepsilon)(\log_{q-1}r_n)^{\sigma_4})).$$

根据引理 1 的性质(ii) 和性质(i),选取 ε 满足 $(0<2\varepsilon<\tau_2-\tau_1)$ 以及充分大的 r_n,有

$$M(r_n,f_1+f_2)\geqslant M_h(\exp_{p-1}((\tau_2-2\varepsilon)\cdot(\log_{q-1}r_n)^{\sigma_4})).\tag{8}$$

根据(7) ~(8) 式,当 $1\leqslant q\leqslant p$ 时,有

$$\rho_{[p,q]}^{h}(f_1+f_2)=\sigma_4,\tau_{[p,q]}^{h}(f_1+f_2)=\tau_2,$$

即结论(i) 成立.

(ii) 由相对 $[p,q]$ 型的定义,$\forall\varepsilon>0$ 以及充分大的 r,结合性质(A) 有

$$M(r,f_1\cdot f_2)\leqslant M(r,f_1)\cdot M(r,f_2)\leqslant M_h(\exp_{p-1}((\tau_2+\varepsilon)(\log_{q-1}r)^{\sigma_4}))\cdot M_h(\exp_{p-1}((\tau_1+\varepsilon)(\log_{q-1}r)^{\sigma_4}))\leqslant[M_h(\exp_{p-1}((\tau_2+\varepsilon)(\log_{q-1}r)^{\sigma_4}))]^2\leqslant M_h(\exp_{p-1}((\tau_2+\varepsilon)(\log_{q-1}r)^{\sigma_4+\varepsilon})).\tag{9}$$

另一方面,由引理 2 可知,当 $\beta=2$ 时,对任意给定的 $0<\varepsilon<2$,存在一个有限对数测度集合 E_0,当 $|z|=r\notin E_0$ 时,有 $|f_1(z)|>1/[M(4r,f_1)]^{k(2)}$,其中 $k(2)=2+(\ln 2-\ln\varepsilon)/\ln 2$.

由引理 3 结论(ii) 知,对任意给定的 $0<\varepsilon<\tau_2$,存在一个无限对数测度集合 E_2,使得 $\forall r\in E_2$,有

$$M(r,f_2)\geqslant M_h(\exp_{p-1}((\tau_2-\varepsilon)(\log_{q-1}r)^{\sigma_4})),$$

则 $\forall r\in E_2\backslash E_0$,有

$$M(r,f_1\cdot f_2)\geqslant|f_1(z)|\cdot M(r,f_2)\geqslant M(r,f_2)/[M(4r,f_1)]^{k(2)},$$

由于 $h(z)$ 满足性质(A) 和 $p>1$,则有

$$M(r,f_1\cdot f_2)\geqslant\frac{M_h(\exp_{p-1}((\tau_2-\varepsilon)(\log_{q-1}r)^{\sigma_4}))}{[M(4r,f_1)]^{k(2)}}\geqslant\frac{[M_h(\exp_{p-1}((\tau_2-2\varepsilon)(\log_{q-1}r)^{\sigma_4}))]^2}{M_h(\exp_{p-1}((\tau_1+2\varepsilon)(\log_{q-1}4r)^{\sigma_4}))},$$

选取 $\varepsilon>0$ 满足 $0<4\varepsilon<\tau_2-\tau_1$,当 $r\in E_2\backslash E_0$ 时,有

$$M(r,f_1\cdot f_2)\geqslant M_h(\exp_{p-1}((\tau_2-2\varepsilon)(\log_{q-1}r)^{\sigma_4})).\tag{10}$$

根据(9) ~(10) 式,当 $p>1$ 时,有 $\rho_{[p,q]}^{h}(f_1\cdot f_2)=\sigma_4,\tau_{[p,q]}^{h}(f_1\cdot f_2)=\tau_2$. 即结论(ii) 成立,定理 3 得证.

定理 4 的证明 根据定义有

$$\rho^h(f)=\varlimsup_{r\to\infty}\log M_h^{-1}M(r,f)/\log r,$$
$$u^h(f)=\varliminf_{r\to\infty}\log M_h^{-1}M(r,f)/\log r.$$
$$\rho_{[p,q]}(g)=\varlimsup_{r\to\infty}\log_{p+1}M(r,g)/\log_q r,$$
$$u_{[p,q]}(g)=\varliminf_{r\to\infty}\log_{p+1}M(r,g)/\log_q r.$$

$\forall\varepsilon>0$ 以及当 r 充分大时,有

$$M(r,f)\leqslant M_h(r^{\rho^h(f)+\varepsilon}),M(r,f)\geqslant M_h(r^{u^h(f)-\varepsilon}),\tag{11}$$
$$M(r,g)\leqslant\exp_p((\log_{q-1}r)^{\rho_{[p,q]}(g)+\varepsilon}),\tag{12}$$
$$M(r,g)\geqslant\exp_p((\log_{q-1}r)^{u_{[p,q]}(g)-\varepsilon}).$$

另外,由引理 4 并结合(11) ~(12) 式,有

$$M(r,f(g))\leqslant M(M(r,g),f)\leqslant M_h[(\exp_p((\log_{q-1}r)^{\rho_{[p,q]}(g)+\varepsilon}))^{\rho^h(f)+\varepsilon}]\tag{13}$$

以及

$$M(r,f(g))\geqslant M[\psi(\lambda)M(\lambda r,g),f]\geqslant M_h[(\psi(\lambda)\exp_p((\log_{q-1}(\lambda r))^{u_{[p,q]}(g)-\varepsilon}))^{u^h(f)-\varepsilon}].\tag{14}$$

由 ε 的任意性,当 $\lambda\to1^-$ 和(13) ~(14) 式时,有

$$\rho_{[p+1,q]}^{h}(f(g))\leqslant\rho_{[p,q]}(g),u_{[p+1,q]}^{h}(f(g))\geqslant u_{[p,q]}(g).\tag{15}$$

另一方面,$\forall\varepsilon(0<\varepsilon<u^h(f))$,存在 2 个趋于无穷的点列 $\{r_n\}$、$\{r_m\}$,有

$$M(r_n,f(g))\geqslant M[(\psi(\lambda)M(\lambda r_n,g),f]\geqslant M_h[(\psi(\lambda)\exp_p((\log_{q-1}(\lambda r_n))^{\rho_{[p,q]}(g)-\varepsilon}))^{u^h(f)-\varepsilon}],\tag{16}$$
$$M(r_m,f(g))\leqslant M(M(r_m,g),f)\leqslant M_h[(\exp_p((\log_{q-1}r_m)^{u_{[p,q]}(g)+\varepsilon}))^{\rho^h(f)+\varepsilon}].\tag{17}$$

根据定义,由(16) ~(17) 式,有

$$\rho_{[p+1,q]}^{h}(f(g))\geqslant\rho_{[p,q]}(g),u_{[p+1,q]}^{h}(f(g))\leqslant u_{[p,q]}(g).\tag{18}$$

结合(15)、(18) 式有

$$\rho_{[p+1,q]}^{h}(f(g))=\rho_{[p,q]}(g),u_{[p+1,q]}^{h}(f(g))=u_{[p,q]}(g),$$

定理 4 得证.

定理 5 的证明　由(15)式可得

$$\rho^{h}_{[p+1,q]}(f(g)) \leqslant \rho_{[p,q]}(g),$$

接下来只需证 $\rho^{h}_{[p+1,q]}(f(g)) \geqslant u_{[p,q]}(g)$.

由定义知 $\forall \varepsilon(0 < \varepsilon < \min\{\rho^{h}(f), u_{[p,q]}(g)\})$,存在趋于无穷的序列$\{r_n\}$,有

$$M(r_n,f) \geqslant M_h(r_n^{\rho^{h}(f)-\varepsilon}).$$

则根据定义和引理 4,有

$$M(r_n,f(g)) \geqslant M[\psi(\lambda)M(\lambda r_n,g),f] \geqslant M_h[(\psi(\lambda)\exp_p((\log_{q-1}(\lambda r_n))^{u_{[p,q]}(g)-\varepsilon}))^{\rho^{h}(f)-\varepsilon}].$$

由上式可得 $\rho^{h}_{[p+1,q]}(f(g)) \geqslant u_{[p,q]}(g)$.

综上所述,定理 5 得证.

4　参考文献

[1] 杨乐. 值分布理论及其新研究 [M]. 北京: 科学出版社,1982.

[2] 仪洪勋,杨重骏. 亚纯函数唯一性理论 [M]. 北京: 科学出版社,1995.

[3] Hayman W. Meromorphic functions [M]. Oxford: Clarendon Press,1964.

[4] Juneja O P,Kapoor G P,Bajpai S K. On the (p,q)-type and lower (p,q)-type of an entire function [J]. J Reine Angew Math,1977,290: 180-190.

[5] Liu Jie,Tu Jin,Shi Lingzhi. Linear differential equations with entire coefficients of (p,q) order in the complex plane [J]. J Math Anal Appl,2010,372(1): 55-67.

[6] 涂金,时玲芝. 系数为[p,q]级整函数的高阶线性微分方程解的增长性 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版,2010,34(3): 11-17.

[7] Bernal L. Orden relative de crecimiento de functiones enteras [J]. Collect Math,1988,39: 209-229.

[8] Lahiri B K,Banerjee D. Relative order of entire and meromorphic functions [J]. Proc Nat Acad Sci India,1999,69A(3): 339-354.

[9] Lahiri B K,Banerjee D. Entire functions of relative order (p,q) [J]. Soochow Journal of Mathematics,2005,31(4): 497-513.

[10] Datta S K,Biswas T,Ghosh C. On relative (p,q)-th order based growth measure of entire functions [J]. Filomat,2016,30(7): 1723-1735.

[11] 黄跃华,涂金. 整函数与亚纯函数的级与型 [J]. 南昌大学学报: 理科版,2014,38(3): 210-213.

[12] 涂金,刘翠云,徐洪焱. 亚纯函数相对于 $\varphi(r)$ 的[p,q]增长级 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版,2012,36(1): 1-4.

[13] 涂金,黄海霞,徐洪焱. 单位圆内亚纯函数与解析函数的级与型 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版,2013,36(1): 1-4.

[14] Tu Jin,Zeng Yun,Xu Hongyan. The order and type of meromorphic functions and entire functions of finite iterated order [J]. J Computational Analysis and Applications,2016,21(5): 994-1003.

[15] 李琴,刘杰. 整函数的[p,q]级与[p,q]型 [J]. 江西科学,2016,34(3): 294-296.

[16] Tu Jin,Chen Zongxuan,Zheng Xiumin. Composition of entire functions with finite iterated order [J]. J Math Anal Appl,2009,353(1): 295-304.

[17] Goodstein R L. Complex functions [M]. New York: McGraw-Hill,1965.

[18] Clunie J. The composition of entire and meromorphic functions [M]. Ohio: Ohio University Press,1970: 75-92.

The Relative [p,q] Order and Relative [p,q] Type of Entire Functions and Composite Entire Functions

TU Jin[1],SUN Heqing[1],LIU Jie[2]

(1. College of Mathematics and Information Science,Jiangxi Normal University,Nanchang Jiangxi 330022,China;
2. School of Primary Education,Yuzhang Normal University,Nanchang Jiangxi 330103,China)

Abstract: In this paper,the relative [p,q] order and relative [p,q] type of entire functions of four arithmetic operations are investigated by the growth of entire function,at the same time the relative [p,q] order of the composite entire function are also studied. The obtained results enrich and improve the previous results.

Key words: entire functions; relative [p,q] order; relative [p,q] type; composite entire functions

(责任编辑: 王金莲)