第 44 卷 第 1 期　　江西师范大学学报(自然科学版)　　Vol. 44 No. 1
2020 年 1 月　　Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science)　　Jan. 2020

文章编号:1000-5862(2020)01-0006-06

2 类 q-差分微分方程解的增长性

袁钦燚,龙见仁*,秦大专

(贵州师范大学数学科学学院,贵州 贵阳　550025)

摘要:利用亚纯函数的 Nevanlinna 理论,讨论了 2 类 q-差分微分方程解的增长性问题,得到了它们解的增长级估计,并给出了一些例子进行说明.

关键词:q-差分微分方程;增长级;Nevanlinna 理论

中图分类号:O 174.52　　**文献标志码**:A　　**DOI**:10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2020.01.02

0　引言与主要结果

本文默认读者熟悉 Nevanlinna 理论的标准符号和基本结果[1]. $S(r,f)$ 表示为满足 $S(r,f)=o(T(r,f))$ 的集合,其中 $r\to\infty$,可能除去一个对数测度有限的例外集. 集合 E 的对数测度定义为 $m_l(E)=\int_{E\bigcap(1,\infty)}\mathrm{d}r/r$. 用 $\lambda(f)$、$\rho(f)$、$\mu(f)$ 分别表示亚纯函数 $f(z)$ 的零点收敛指数、级、下级,其定义如下:

$$\lambda(f)=\limsup_{r\to\infty}\log^+N(r,1/f)/\log r,$$

$$\rho(f)=\limsup_{r\to\infty}\log^+T(r,f)/\log r,$$

$$\mu(f)=\liminf_{r\to\infty}\log^+T(r,f)/\log r.$$

近年来,关于某些类型的复微分方程、复差分方程、复差分微分方程解的增长性的研究已经引起了广泛关注[1-16],G. Gundersen 等[2] 考虑了一类 q-差分方程亚纯解的增长性问题,得到了以下结果.

定理 A[2]　假设 $f(z)$ 是方程

$$f(qz)=R(z,f(z))=\sum_{i=0}^{k}a_i(z)f^{i}(z)\Big/\sum_{j=0}^{l}b_j(z)f^{j}(z)$$

的超越亚纯解,其中系数 $a_i(z)$ $(i=0,1,\cdots,k)$、$b_j(z)$ $(j=0,1,\cdots,l)$ 是关于 $f(z)$ 的小函数. $q(|q|>1)$ 是一个常数,假设 $a_k(z)\neq0$,$b_l(z)\neq0$,$R(z,f(z))$ 关于 $f(z)$ 不可约,$d=\deg_f R(z,f(z))=\max\{k,l\}\geqslant1$,则

$$\rho(f)=\log d/\log|q|.$$

文献[3]研究了下列 q-差分微分方程亚纯解的增长性,得到了如下结果.

定理 B[3]　假设 $f(z)$ 是方程

$$\sum_{s=1}^{n}\alpha_s(z)f^{(\lambda_s)}(q_sz)=R(z,f(z))=\sum_{i=0}^{k}a_i(z)f^{i}(z)\Big/\sum_{j=0}^{l}b_j(z)f^{j}(z)\tag{1}$$

的解,其中亚纯系数 $\alpha_s(z)$ $(s=1,2,\cdots,n)$、$a_i(z)$ $(i=0,1,\cdots,k)$、$b_j(z)$ $(j=0,1,\cdots,l)$ 是关于 $f(z)$ 的小函数,互异常数 q_s 满足 $|q_s|\geqslant1$,λ_s 是有限非负整数. 假设 $a_k(z)\neq0$,$b_l(z)\neq0$,$R(z,f(z))$ 关于 $f(z)$ 不可约,

$$d=\deg_f R(z,f(z))=\max\{k,l\}\geqslant1,$$

$$\lambda=\sum_{s=1}^{n}\lambda_s,|q|=\max_{1\leqslant s\leqslant n}\{|q_s|\}>1.$$

若 $f(z)$ 是方程(1)的超越亚纯解,且 $n+\lambda<d$,则 $\rho(f)\geqslant\mu(f)\geqslant(\log d-\log(\lambda+n))/\log|q|$;若 $f(z)$ 是方程(1)的超越整函数解,且 $n<d$,则 $\rho(f)\geqslant\mu(f)\geqslant(\log d-\log n)/\log|q|$.

下面研究 2 类 q-差分微分方程亚纯解的增长性,推广了定理 B,具体得到了以下结果.

定理 1　假设 $f(z)$ 是方程

$$\sum_{s=1}^{n}\beta_s(z)(f^{(\lambda_s)}(q_sz))^{m_s}=R(z,f(z))=\sum_{i=0}^{k}a_i(z)f^{i}(z)\Big/\sum_{j=0}^{l}b_j(z)f^{j}(z)\tag{2}$$

收稿日期:2019-09-25

基金项目:国家自然科学基金(11861023,11501142),贵州省科技计划基金(黔科合平台人才[2018]5769-05 号)和贵州省科学技术基金(黔科合 J 字[2015]2112 号)资助项目.

通信作者:龙见仁(1981-),男,贵州锦屏人,教授,博士生导师,主要从事函数论研究. E-mail:longjianren2004@163.com

的解,其中亚纯系数 $\beta_s(z)\ (s=1,2,\cdots,n)$、$a_i(z)\ (i=0,1,\cdots,k)$、$b_j(z)\ (j=0,1,\cdots,l)$ 是关于 $f(z)$ 的小函数,q_s 是非零互异常数,λ_s 和 m_s 是有限非负整数. 假设 $a_k(z)\neq 0$, $b_l(z)\neq 0$, $R(z,f(z))$ 关于 $f(z)$ 不可约,

$$d=\deg_f R(z,f(z))=\max\{k,l\}\geq 1,\lambda=\sum_{s=1}^{n}\lambda_s,$$

$$|q|=\max_{1\leq s\leq n}\{|q_s|\}>0,m=\max_{1\leq s\leq n}\{m_s\},$$

则有下列结论:

(i) 当 $|q|>1$ 时,若 $f(z)$ 是方程(2) 的超越亚纯解,且 $m(\lambda+n)<d$,则

$$\rho(f)\geq\mu(f)\geq(\log d-\log(\lambda+n)-\log m)/\log|q|;$$

若 $f(z)$ 是方程(2) 的超越整函数解,且 $mn<d$,则

$$\rho(f)\geq\mu(f)\geq(\log d-\log n-\log m)/\log|q|.$$

(ii) 当 $|q|<1$ 时,若 $f(z)$ 是方程(2) 的超越亚纯解,则 $m(\lambda+n)\geq d$ 且

$$\rho(f)\leq(\log m+\log(n+\lambda)-\log d)/(-\log|q|);$$

若 $f(z)$ 是方程(2) 的超越整函数解,则 $mn\geq d$ 且

$$\rho(f)\leq(\log m+\log n-\log d)/(-\log|q|);$$

(iii) 当 $|q|=1$ 时,若 $f(z)$ 是方程(2) 的超越亚纯解,则 $m(\lambda+n)\geq d$. 进一步,若 $mn<d\leq m(n+\lambda)$,则 $\lambda(1/f)=\rho(f)$. 若 $f(z)$ 是方程(2) 的超越整函数解,则 $mn\geq d$.

下面举例说明定理 1 的结果是精确的.

例 1　函数 $f(z)=(\mathrm{e}^z+1)/(\mathrm{e}^z-1)$ 是 q-差分微分方程

$$f'(2z)=(-f^4(z)+2f^2(z)-1)/(8f^2(z))$$

的解,其中 $d=4$, $n=1$, $\lambda=1$, $m=1$, $|q|=2$, $m(n+\lambda)=2<4=d$,则 $(\log d-\log(n+\lambda)-\log m)/\log|q|=1=\rho(f)=\mu(f)$.

例 2　函数 $f(z)=\sin z$ 是 q-差分微分方程

$$(f''(2z))^2=-4f^4(z)+4f^2(z)$$

的解,其中 $d=4$, $n=1$, $\lambda=2$, $m=2$, $|q|=2$, $mn=2<4=d$,则

$$(\log d-\log n-\log m)/\log|q|=1=\rho(f)=\mu(f).$$

例 3　函数 $f(z)=\mathrm{e}^z+1$ 是 q-差分微分方程

$$(f'(z))^2+f''(5z)=f^5(z)-5f^4(z)+10f^3(z)-9f^2(z)+3f(z)$$

的解,其中 $d=5$, $n=2$, $\lambda=3$, $m=2$, $|q|=5$, $mn=4<5=d$,则

$$(\log d-\log n-\log m)/\log|q|=1-\log 4/\log 5<\rho(f)=\mu(f)=1.$$

例 4　函数 $f(z)=\mathrm{e}^{z^2}+1$ 是 q-差分微分方程

$$(f'(z/3))^9+(f''(z/2))^4=((2z/3)^9+(z^2+2)^4)f(z)-(2z/3)^9-(z^2+2)^4$$

的解,其中 $d=1$, $n=2$, $\lambda=3$, $m=9$, $|q|=1/2$,则 $mn=18>1=d$,且

$$(\log m+\log n-\log d)/(-\log|q|)=(\log 9+\log 2)/\log 2>2=\rho(f).$$

例 5　函数 $f(z)=(\mathrm{e}^z+1)/z$ 是 q-差分微分方程

$$f'(z)+f(-z)=((z^2-z)f^2(z)+(1-3z)f(z)+1)/(z^2f(z)-z)$$

的解,其中 $d=2$, $n=2$, $\lambda=1$, $m=1$, $|q|=1$,则 $m(n+\lambda)=3>2=d$.

下面考虑方程(3) 的解的增长性,得到如下结果.

定理 2　假设 $f(z)$ 是方程

$$\sum_{s=1}^{n}\beta_s(z)(f^{(\lambda_s)}(q_sz))^{m_s}=R(z,f(p(z)))=\sum_{i=0}^{k}a_i(z)f^i(p(z))\Big/\sum_{j=0}^{l}b_j(z)f^j(p(z))\qquad(3)$$

的解,其中亚纯系数 $\beta_s(z)\ (s=1,2,\cdots,n)$、$a_i(z)\ (i=0,1,\cdots,k)$、$b_l(z)\ (j=0,1,\cdots,l)$ 是关于 $f(z)$ 的小函数,q_s 是互异的非零常数,λ_s 和 m_s 是有限非负整数. $p(z)=c_tz^t+c_{t-1}z^{t-1}+\cdots+c_0$,其中 $c_t(\neq 0)$, $c_{t-1},c_{t-2},\cdots,c_0$ 是复常数,$t(>1)$ 是整数. 假设 $a_k(z)\neq 0$, $b_l(z)\neq 0$, $R(z,f(z))$ 关于 $f(z)$ 不可约,

$$d=\deg_f R(z,f(z))=\max\{k,l\}\geq 1,\lambda=\sum_{s=1}^{n}\lambda_s,$$

$$|q|=\max_{1\leq s\leq n}\{|q_s|\}>0,m=\max_{1\leq s\leq n}\{m_s\}.$$

(i) 若 $f(z)$ 是方程(3) 的超越亚纯解,且 $m(n+\lambda)\geq d$,则 $T(r,f(z))=O((\log r)^{\alpha})$,其中 $\alpha=(\log m+\log(n+\lambda)-\log d)/\log t$;

(ii) 若 $f(z)$ 是方程(3) 的超越整函数解,且 $mn\geq d$,则 $T(r,f(z))=O((\log r)^{\alpha})$,其中 $\alpha=(\log m+\log n-\log d)/\log t$.

当 $t=1$ 时定理 2 失效,下面考虑 $t=1$ 的情形,不妨令 $p(z)=az+b$ 来考虑方程(3),得到下面的结果.

定理 3　在定理 2 中设 $p(z)=az+b$,其中 $a\neq 0$, b 是复常数,定理 2 的其它条件保持不变,则有下列结论:

(i) 当$0<|a|<|q|$时,若$f(z)$是方程(3)的超越亚纯解,且$m(n+\lambda)<d$,则

$$\rho(f)\geqslant\mu(f)\geqslant(\log d-\log(\lambda+n)-\log m)/(\log|q|-\log|a|);$$

若$f(z)$是方程(3)的超越整函数解,且$mn<d$,则

$$\rho(f)\geqslant\mu(f)\geqslant(\log d-\log n-\log m)/(\log|q|-\log|a|);$$

(ii) 当$|a|>|q|$时,若$f(z)$是方程(3)的超越亚纯解,则$m(n+\lambda)\geqslant d$,且

$$\rho(f)\leqslant(\log m+\log(n+\lambda)-\log d)/(\log|a|-\log|q|);$$

若$f(z)$是方程(3)的超越整函数解,则$mn\geqslant d$,且$\rho(f)\leqslant(\log m+\log n-\log d)/(\log|a|-\log|q|)$;

(iii) 当$|a|=|q|$时,若$f(z)$是方程(3)的超越亚纯解,且$m(n+\lambda)<d$,则

$$\rho(f)=\mu(f)=\infty;$$

若$f(z)$是方程(3)的超越整函数解,且$mn<d$,则$\rho(f)=\mu(f)=\infty$.

1 引理

为证明定理,需下面一些辅助结果.

引理1[4] 令$\Phi:(r_0,\infty)\to(1,\infty)$为递增函数,$r_0\geqslant 1$.若对于实常数$\alpha(>1)$,存在一个实数$K>1$,使得$\Phi(\alpha r)>K\Phi(r)$,则

$$\liminf_{r\to\infty}\log\Phi(r)/\log r\geqslant\log K/\log\alpha.$$

引理2[5] 令$\Psi(r)$是一个关于$r(r\geqslant r_0)$的函数,且在任意有限区间内是正的有界函数.假设$\Psi(\mu r^m)\leqslant A\Psi(r)+B$,其中$\mu(>0)$、$m(>1)$、$A(\geqslant 1)$,$B$是常数,则

$$\Psi(r)=O((\log r)^{\alpha}),\alpha=\log A/\log m,$$

除去$A=1,B>0$;若当$A=1,B>0$时,则$\forall\varepsilon>0$,有$\Psi(r)=O((\log r)^{\varepsilon})$.

引理3[6] 设$f(z)$为亚纯函数,q为非零常数,则

$$T(r,f(qz))=T(|q|r,f(z))+O(1),$$

$$\overline{N}(r,f(qz))=\overline{N}(|q|r,f(z))+O(1).$$

引理4[7] 设$f(z)$是一个超越亚纯函数,$p(z)=a_kz^k+a_{k-1}z^{k-1}+\cdots+a_0(a_k\neq 0)$是一个非常数多项式.给定$0<\delta<|a_k|$,令$\lambda=|a_k|+\delta$,$\mu=|a_k|-\delta$,则$\forall\varepsilon>0$和充分大的$r$,有

$$(1-\varepsilon)T(\mu r^k,f(z))\leqslant T(r,f(p(z)))\leqslant(1+\varepsilon)T(\lambda r^k,f(z)).$$

引理5[8] 设$f(z)$是一个亚纯函数,l是正整数,则

$$N(r,f^{(l)})=N(r,f)+l\overline{N}(r,f),$$

$$T(r,f^{(l)})\leqslant T(r,f)+l\overline{N}(r,f)+S(r,f).$$

引理6[9] $g(r)$和$h(r)$是定义在$[0,\infty)$上的连续非减函数,$g(r)\leqslant h(r)$,$r\notin E\cup[0,1]$,$E\subset(1,\infty)$是一个对数测度有限的集合,则对任意常数$\alpha>1$,$\exists r_0=r_0(\alpha)>0$,使得对所有$r\geqslant r_0$,有$g(r)\leqslant h(\alpha r)$.

引理7[2] 令$\Phi:(1,\infty)\to(0,\infty)$是一个递增函数,$f(z)$是非常数亚纯函数.若对实数$\alpha\in(0,1)$,存在实数$K_1>0$,$K_2\geqslant 1$,使得

$T(r,f(z))\leqslant K_1\Phi(r)+K_2T(\alpha r,f(z))+S(\alpha r,f(z))$,

则$\rho(f)\leqslant\log K_2/(-\log\alpha)+\limsup_{r\to\infty}\log\Phi(r)/\log r$.

2 定理的证明

定理1的证明 情形(i) $|q|>1$.

(a) 设$f(z)$是方程(2)的超越亚纯解.由Valiron-Mohon'ko定理[1,定理2.2.5]、引理3、引理5、方程(2)和定理1的条件得

$$T(r,R(z,f(z)))=T(r,\sum_{i=0}^{k}a_i(z)f^{i}(z)/\sum_{j=0}^{l}b_j(z)f^{j}(z))=dT(r,f(z))+S(r,f(z))=$$
$$T(r,\sum_{s=1}^{n}\beta_s(z)(f^{(\lambda_s)}(q_sz))^{m_s})\leqslant\sum_{s=1}^{n}T(r,f^{(\lambda_s)}(q_sz))^{m_s})+$$
$$S(r,f(z))\leqslant m\sum_{s=1}^{n}[T(r,f(q_sz))+\lambda_s\overline{N}(r,f(q_sz))+$$
$$S(r,f(q_sz))]+S(r,f(z))\leqslant m\sum_{s=1}^{n}[(1+\lambda_s)T(|q_s|r,$$
$$f(z))+S(|q_s|r,f(z))]+S(r,f(z))\leqslant m(n+\lambda)T(|q|r,f(z))+S(|q|r,f(z))+S(r,f(z)),$$

即

$$dT(r,f(z))+S(r,f(z))\leqslant m(n+\lambda)T(|q|r,f(z))+S(|q|r,f(z)),r\notin E,\tag{4}$$

其中$m_l(E)<\infty$.由不等式(4)、引理6知,任意给定$\beta>1$,$\varepsilon>0$,当$r\geqslant r_0$时,有

$$d(1-\varepsilon)T(r,f(z))\leqslant m(n+\lambda)(1+\varepsilon)\cdot T(\beta|q|r,f(z)).\tag{5}$$

考虑 $m(n+\lambda)<d$,即 $d(1-\varepsilon)/(m(n+\lambda)\cdot(1+\varepsilon))>1$. 由引理 1 和不等式(5) 有

$$\mu(f)=\liminf_{r\to\infty}\log^{+}T(r,f)/\log r\geqslant\frac{\log(d(1-\varepsilon)/(m(n+\lambda)(1+\varepsilon)))}{\log(\beta|q|)}=\frac{\log(d(1-\varepsilon))-\log(m(n+\lambda)(1+\varepsilon))}{\log(\beta|q|)}.$$

当 $\varepsilon\to0^{+}$,$\beta\to1^{+}$ 时,有

$$\rho(f)\geqslant\mu(f)\geqslant\frac{\log d-\log(\lambda+n)-\log m}{\log|q|}.$$

(b) 设 $f(z)$ 是方程(2) 的超越整函数解. 类似于情形(i) 中(a) 的证明, 由 Valiron-Mohon´ko 定理[1,定理2.2.5]、引理 3、引理 5、方程(2) 和定理 1 的条件有

$$T(r,R(z,f(z)))=T\Big(r,\sum_{i=0}^{k}a_i(z)f^{i}(z)\Big/\sum_{j=0}^{l}b_j(z)f^{j}(z)\Big)=dT(r,f(z))+S(r,f(z))=T\Big(r,\sum_{s=1}^{n}\beta_s(z)(f^{(\lambda_s)}(q_sz))^{m_s}\Big)\leqslant\sum_{s=1}^{n}T(r,(f^{(\lambda_s)}(q_sz))^{m_s})+S(r,f(z))\leqslant m\sum_{s=1}^{n}[T(r,f(q_sz))+S(r,f(q_sz))]+S(r,f(z))\leqslant mnT(|q|r,f(z))+S(|q|r,f(z))+S(r,f(z)),$$

即

$$dT(r,f(z))+S(r,f(z))\leqslant mnT(|q|r,f(z))+S(|q|r,f(z)),r\notin E,\tag{6}$$

其中 $m_l(E)<\infty$. 由不等式(6) 和引理 6 知, 任意给定 $\beta>1$,$\varepsilon>0$,当 $r\geqslant r_0$ 时,有

$$d(1-\varepsilon)T(r,f(z))\leqslant mn(1+\varepsilon)T(\beta|q|r,f(z)).\tag{7}$$

考虑 $mn<d$,即 $d(1-\varepsilon)/(mn(1+\varepsilon))>1$. 由引理 1 和不等式(7) 有

$$\mu(f)=\liminf_{r\to\infty}\log^{+}T(r,f)/\log r\geqslant(\log(d(1-\varepsilon))-\log(mn(1+\varepsilon)))/\log(\beta|q|).$$

当 $\varepsilon\to0^{+}$,$\beta\to1^{+}$ 时,有

$$\rho(f)\geqslant\mu(f)\geqslant(\log d-\log n-\log m)/\log|q|.$$

情形(ii)　$|q|<1$.

(a) 设 $f(z)$ 是方程(2) 的超越亚纯解. 由不等式(4) 和引理 6 知, 对任意给定 $\varepsilon>0$,$\exists\alpha>1$ 使得当 $r\geqslant r_0$ 时,有

$$\alpha|q|<1,d(1-\varepsilon)T(r,f(z))\leqslant m(n+\lambda)(1+\varepsilon)T(\alpha|q|r,f(z)).$$

若 $d>m(n+\lambda)$,则与上述不等式矛盾. 故有 $d\leqslant m(n+\lambda)$,即 $m(n+\lambda)(1+\varepsilon)/(d(1-\varepsilon))\geqslant1$,由引理 7,有

$$\rho(f)\leqslant(\log(m(n+\lambda)(1+\varepsilon))-\log(d(1-\varepsilon)))/(-\log(\alpha|q|)).$$

当 $\varepsilon\to0^{+}$,$\alpha\to1^{+}$ 时,有

$$\rho(f)\leqslant(\log m+\log(n+\lambda)-\log d)/(-\log|q|).$$

(b) 设 $f(z)$ 是方程(2) 的超越整函数解. 类似于情形(ii) 中(a) 的证明,有

$$d\leqslant mn,\rho(f)\leqslant(\log m+\log n-\log d)/(-\log|q|).$$

情形(iii)　$|q|=1$.

(a) 设 $f(z)$ 是方程(2) 的超越亚纯解. 由不等式(4) 有

$$dT(r,f(z))+S(r,f(z))\leqslant m[nT(r,f(z))+\lambda\overline{N}(r,f(z))+S(r,f(z))]\leqslant m(n+\lambda)T(r,f(z))+S(r,f(z)).$$

于是 $m(n+\lambda)\geqslant d$. 若 $mn<d\leqslant m(n+\lambda)$,则有

$$(d-mn)T(r,f(z))/(m\lambda)+S(r,f(z))\leqslant\overline{N}(r,f(z))+S(r,f(z))\leqslant N(r,f(z))+S(r,f(z))\leqslant T(r,f(z))+S(r,f(z)).$$

从而 $\lambda(1/f)=\rho(f)$.

(b) 设 $f(z)$ 是方程(2) 的超越整函数解. 类似于情形(iii) 中(a) 的证明,有 $mn\geqslant d$.

定理 2 的证明　(i) 设 $f(z)$ 是方程(3) 的超越亚纯解. 由 Valiron-Mohon´ko 定理[1,定理2.2.5]、引理 3、引理 5、方程(3) 和定理 2 的条件有

$$T(r,R(z,f(p(z))))=dT(r,f(p(z)))+S(r,f(p(z)))=T\Big(r,\sum_{s=1}^{n}\beta_s(z)(f^{(\lambda_s)}(q_sz))^{m_s}\Big)\leqslant m\sum_{s=1}^{n}[T(r,f(q_sz))+\lambda_s\overline{N}(r,f(q_sz))+S(r,f(q_sz))]+S(r,f(z))\leqslant m\sum_{s=1}^{n}[(1+\lambda_s)T(|q_s|r,f(z))+S(|q_s|r,f(z))]+S(r,f(z))\leqslant m(n+\lambda)T(|q|r,f(z))+S(|q|r,f(z))+S(r,f(z)),$$

即

$$dT(r,f(p(z)))+S(r,f(p(z)))\leqslant m(n+\lambda)T(|q|r,f(z))+S(|q|r,f(z)).\tag{8}$$

由引理 4 知,给定 $0<\delta<|c_t|$,$\mu=|c_t|-\delta$,

$\forall \varepsilon > 0$,有

$$(1-\varepsilon)T(\mu r^t, f(z)) \leqslant T(r, f(p(z))).$$

结合上式和不等式(8)得

$$d(1-\varepsilon)T(\mu r^t, f(z)) \leqslant m(n+\lambda)(1+\varepsilon)\cdot T(|q|r, f(z)), r \notin E, \tag{9}$$

其中 $m_l(E) < \infty$. 由不等式(9)和引理6知,$\forall \beta > 1, r \geqslant r_0$,有

$$d(1-\varepsilon)T(\mu r^t, f(z)) \leqslant m(n+\lambda)(1+\varepsilon)\cdot T(\beta|q|r, f(z)). \tag{10}$$

令 $R = \beta|q|r$,不等式(10)变为

$$T\left(\frac{\mu R^t}{\beta^t|q|^t}, f(z)\right) \leqslant \frac{m(n+\lambda)(1+\varepsilon)T(R, f(z))}{d(1-\varepsilon)}.$$

若 $m(n+\lambda) \geqslant d$,则 $m(n+\lambda)(1+\varepsilon)/(d(1-\varepsilon)) \geqslant 1$. 当 $\mu/(\beta^t|q|^t) > 0, t > 1$ 时,由引理2有

$$T(r, f(z)) = O((\log r)^{\alpha}),$$

其中

$\alpha = (\log(m(n+\lambda)(1+\varepsilon)) - \log(d(1-\varepsilon)))/\log t = (\log m + \log(n+\lambda) + \log(1+\varepsilon) - \log d - \log(1-\varepsilon))/\log t \to (\log m + \log(n+\lambda) - \log d)/\log t(\varepsilon \to 0)$.

(ii) 设 $f(z)$ 是方程(3)的超越整函数解,并且 $d \leqslant mn$. 类似于(i)的证明有

$$T(r, f(z)) = O((\log r)^{\alpha}),$$

其中 $\alpha = (\log m + \log n - \log d)/\log t$.

定理3的证明 情形(i) $0 < |a| < |q|$.

(a) 设 $f(z)$ 是方程(3)的超越亚纯解. 由 Valiron-Mohon´ko 定理[1,定理2.2.5]、引理3、引理5、方程(3)和定理3的条件,有不等式(8)成立. 由引理4知,给定 $0 < \delta < |a|$,令 $\mu = |a| - \delta (0 < \mu < |q|)$,$\forall \varepsilon > 0$,有

$$d(1-\varepsilon)T(\mu r, f(z)) \leqslant m(n+\lambda)(1+\varepsilon)\cdot T(|q|r, f(z)), r \notin E, \tag{11}$$

其中 $m_l(E) < \infty$. 由不等式(11)和引理6,$\forall \beta > 1$,$\exists r_0 > 0$,使得对所有 $r \geqslant r_0$,有

$$d(1-\varepsilon)T(\mu r, f(z)) \leqslant m(n+\lambda)(1+\varepsilon)\cdot T(\beta|q|r, f(z)).$$

于是

$$\frac{d(1-\varepsilon)T(r, f(z))}{m(n+\lambda)(1+\varepsilon)} \leqslant T\left(\frac{\beta|q|r}{\mu}, f(z)\right). \tag{12}$$

考虑 $m(n+\lambda) < d$,即 $d(1-\varepsilon)/(m(n+\lambda)(1+\varepsilon)) > 1$. 由引理1和不等式(12)有

$$\mu(f) \geqslant \frac{\log(d(1-\varepsilon)/(m(n+\lambda)(1+\varepsilon)))}{\log(\beta|q|/\mu)}.$$

当 $\varepsilon \to 0^+, \delta \to 0^+, \beta \to 1^+$ 时,有

$$\mu(f) \geqslant \frac{\log d - \log(\lambda+n) - \log m}{\log|q| - \log|a|}.$$

(b) 设 $f(z)$ 是方程(3)的超越整函数解. 类似于情形(i)中(a)的证明,当 $mn < d$ 时,可得 $\mu(f) \geqslant (\log d - \log n - \log m)/(\log|q| - \log|a|)$.

情形(ii) $|a| > |q|$.

(a) 设 $f(z)$ 是方程(3)的超越亚纯解. 由类似于情形(i)中(a)的证明方法可得

$$d(1-\varepsilon)T(\mu r, f(z)) \leqslant m(n+\lambda)(1+\varepsilon)\cdot T(|q|r, f(z)), r \notin E,$$

其中 $\mu = |a| - \delta, \delta > 0, \mu > |q|, m_l(E) < \infty$,由引理6知,$\exists \alpha > 1$,使得

$$\alpha|q| < \mu, T(r, f(z)) \leqslant m(n+\lambda)(1+\varepsilon)\cdot T(\alpha|q|r/\mu, f(z))/(d(1-\varepsilon)). \tag{13}$$

由不等式(13)可知 $m(n+\lambda) \geqslant d$. 由引理7有

$$\rho(f) \leqslant \frac{\log(m(n+\lambda)(1+\varepsilon)/(d(1-\varepsilon)))}{-\log(\alpha|q|/\mu)}.$$

当 $\varepsilon \to 0^+, \delta \to 0^+, \alpha \to 1^+$ 时,有

$$\rho(f) \leqslant \frac{\log m + \log(\lambda+n) - \log d}{\log|a| - \log|q|}.$$

(b) 设 $f(z)$ 是方程(3)的超越整函数解. 类似于情形(ii)中(a)的证明方法可得

$$mn \geqslant d, \rho(f) \leqslant \frac{\log m + \log n - \log d}{\log|a| - \log|q|}.$$

情形(iii) $|a| = |q|$.

(a) 设 $f(z)$ 是方程(3)的超越亚纯解. 当 $m(n+\lambda) < d$ 时,令 $\mu = |a| - \delta$(取 $0 < \delta < 1$,使得 $0 < \mu < |q|$),使用类似于情形(i)中(a)的证明,可得 $\mu(f) \geqslant \infty$,即

$$\rho(f) = \mu(f) = \infty.$$

(b) 设 $f(z)$ 是方程(3)的超越整函数解. 当 $mn < d$ 时,使用类似于情形(i)中(b)的证明,可得 $\rho(f) = \mu(f) = \infty$.

3 参考文献

[1] Laine I. Nevanlinna theory and complex differential equations [M]. Berlin: Walter de Gruyter,1993.

[2] Gundersen G, Heittokangas J, Laine I, et al. Meromorphic solutions of generalized schröder equations [J]. Aequ Math, 2002, 63(1): 110-135.
[3] Chen Mingfeng, Jiang Yeyang, Gao Zongsheng. Growth of meromorphic solutions of certain types of q-difference differential equations [J]. Adv Differ Equ, 2017, 37: 1-16.
[4] Rieppo J. On a class of complex functional equations [J]. Ann Acad Sci Fenn Math, 2007, 32(1): 151-170.
[5] Goldstein R. On meromorphic solutions of certain functional equations [J]. Aequ Math, 1978, 18(1): 112-157.
[6] Bergweiler W, Ishizaki K, Yanagihara N. Meromorphic solutions of some functional equations [J]. Methods Appl Anal, 1998, 5(3): 248-258.
[7] Goldstein R. Some results on factorization of meromorphic functions [J]. J Lond Math Soc, 1971, 4(2): 357-364.
[8] Hayman W K. Meromorphic functions [M]. Oxford: Clarendon Press, 1964.
[9] Gundersen G. Finite order solutions of second order linear differential equations [J]. Trans Am Math Soc, 1988, 305(1): 415-429.
[10] Latreuch Z. On the existence of entire solutions of certain class of nonlinear difference equations [J]. Mediterr J Math, 2017, 14(3): 115.
[11] Liu Kai, Cao Tingbin, Liu Xinling. The properties of differential-difference polynomials [J]. Ukr Math J, 2017, 69(1): 85-100.
[12] Zheng Xiumin, Chen Zongxuan. Some properties of meromorphic solutions of q-difference equations [J]. J Math Anal Appl, 2010, 361(2): 472-480.
[13] Qi Xiaoguang, Liu Yong, Yang Lianzhong. A note on solutions of some differential-difference equations [J]. J Contemp Math Anal Armen Acad Sci, 2017, 52(3): 128-133.
[14] Chen Mingfeng, Gao Zongsheng, Zhang Jilong. Entire solutions of certain type of non-linear difference equations [J]. Comput Methods Funct Theory, 2019, 19: 17-36.
[15] Li Haichou. On existence of solutions of differential-difference equations [J]. Math Methods Appl Sci, 2016, 39(1): 144-151.
[16] Wang Jun. Growth and poles of meromorphic solutions of some difference equations [J]. J Math Anal Appl, 2011, 379(1): 367-377.

The Growth of Solutions of Two Certain Types of q-Difference Differential Equations

YUAN Qinyi, LONG Jianren*, QIN Dazhuan
(School of Mathematical Sciences, Guizhou Normal University, Guiyang Guizhou 550025, China)

Abstract: The growth of solutions of two kinds of q-difference differential equations is studied by using Nevanlinna theory of meromorphic functions. Some estimations of growth of solutions of these equations are obtained, and some examples are given to show ours results.

Key words: q-difference differential equation; the growth of order; Nevanlinna theory

(责任编辑: 王金莲)