文章编号: 1000-5862(2020) 01-0017-03

MLINEX 损失函数下具有风险相依效应的信度模型

李新鹏[1],吴黎军[2*]

(1. 新疆农业大学数理学院,新疆 乌鲁木齐 830052; 2. 新疆大学数学与系统科学学院,新疆 乌鲁木齐 830046)

摘要: 该文既考虑了制定保费的公平性、合理性,又考虑了各风险组之间的相依效应,利用信度理论的方法得到了 MLINEX 损失函数下 Bühlmann-Straub 模型的具有特殊相依效应的信度保费,进而推导出 MLINEX 损失函数下 Bühlmann 模型的具有此种相依效应的信度保费,也得到了结构参数的估计量,因此,推广了经典信度理论.

关键词: MLINEX 损失函数; 相依效应; 信度保费

中图分类号: O 212 **文献标志码**: A **DOI**: 10. 16357/j. cnki. issn1000-5862. 2020. 01. 04

0 引言

信度理论是一种重要的制定保费方法. 该理论基于投保人过去的赔付额来计算保单组合的未来保费,得到的保费为样本均值和聚合保费的加权和. 现代信度理论开始于文献[1],H. Bühlmann 等[1] 给出了任意分布下的信度保费.

经典信度理论假设在风险参数已知下,保单组合的不同保单赔付额之间独立且同一张保单过去每年赔付额之间也独立. 但在实际情况下,保单赔付额之间是风险相依的,如同一起交通事故可导致多次赔付,地域相近的房屋具有共同的火灾风险等. 郑丹等[2] 研究了基于平方损失函数的具有时间变化效应的信度保费问题,给出了保费计算公式. K. L. Yeo 等[3] 提出了风险间具有共同效应的概念,并且假设赔付额服从正态分布,在此情况下得到了信度模型保费. 温利民等[4] 通过运用正交投影的方法,给出了具有共同随机效应的信度模型保费,推广了经典信度模型. 李新鹏等[5-6] 分别在平衡损失函数、LINEX 损失函数下对具有特殊风险相依效应的信度模型问题进行了研究,也得到了相应的信度保费公式.

经典信度理论运用平方损失函数研究信度模型,但由于平方损失函数是一种对称损失函数,使得收取过高或过低的保费具有同等的惩罚力度. 在实际问题中,保费收取过低可能导致保险公司因偿付能力不足而破产,因此,对于低保费应有更大的惩罚力度,运用非对称损失函数制定的保费更公平、合理. C. K. Podder 等[7] 给出了修正的线性指数损失函数,即 MLINEX 损失函数:

$$L(\theta,\hat{\theta}) = \omega((\hat{\theta}/\theta)^{c} - c\ln(\hat{\theta}/\theta) - 1),\omega > 0,c \neq 0, \tag{1}$$

其中 $\hat{\theta}$ 是参数 θ 的估计,当 $c < 0$ 时,(1) 式刻画了正偏差引起的损失高于负偏差引起的损失. 徐美萍等[8] 给出了 MLINEX 损失函数下一类分布族参数的 Bayes 估计. 房婷婷等[9] 研究了 MLINEX 损失函数下的信度模型,推出了信度保费公式.

本文基于风险之间的相依效应,保费制定的公平性、合理性,运用 MLINEX 损失函数,研究了保单组合的不同保单赔付额之间具有特殊风险相依效应的信度模型问题,得到了模型的信度保费.

1 模型的预备知识

假设由 K 张保单构成一个保单组合,第 i 张保单在过去 n 年赔付额分别为 $X_{i1},X_{i2},\cdots,X_{in}$,第 i 张保单风险参数为 Θ_i,且不同风险参数之间具有特殊相依效应.

假设 1 对第 i 张保单,给定参数 Θ_i,赔付额 $X_{i1},X_{i2},\cdots,X_{in}$ 之间相互独立,(X_i,Θ_i) 之间也独立,$E(1/X_{ij}^{c}\mid\Theta_i) = \mu(\Theta_i)$,$D(1/X_{ij}^{c}\mid\Theta_i) = u(\Theta_i)/a_{ij}$,

收稿日期: 2019-02-18

基金项目: 国家自然科学基金(11861064) 资助项目.

通信作者: 吴黎军(1961-) ,男,新疆伊犁人,教授,主要从事精算数学方面的研究. E-mail: xjmath@ xju. edu. cn

$i=1,2,\cdots,K,j=1,2,\cdots,n+1$.

假设 2 第 i 张保单的参数 Θ_i 的分布函数为 $\pi(\theta_i)$,且 $E(\mu(\theta_i))=\mu,E(u(\theta_i))=u_i,\mathrm{Cov}(\mu(\Theta_i),\mu(\Theta_l))=\varepsilon_i\varepsilon_l,i,l=1,2,\cdots,K$[2].

记 $\boldsymbol{X}_i=(X_{i1},X_{i2},\cdots,X_{in})',\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{X}_1',\boldsymbol{X}_2',\cdots,\boldsymbol{X}_K')',\boldsymbol{\Theta}=(\Theta_1,\Theta_2,\cdots,\Theta_K)'$,$M$ 为保单组合的过去赔付额的可测函数集,$H_B^i(\boldsymbol{X})$ 为第 i 张保单下一年的 Bayes 保费,则 $H_B^i(\boldsymbol{X})$ 为下述问题的最优解:

$$E(L(X_{i,n+1},H_B^i(\boldsymbol{X})))=\min_{f(X)\in M}E(L(X_{i,n+1},f(\boldsymbol{X}))).$$

引理 1 在 MLINEX 损失函数下,第 i 张保单的下一年 Bayes 保费为

$$H_B^i(\boldsymbol{X})=(1/E(X_{i,n+1}^{-c}\mid \boldsymbol{X}))^{1/c}.$$

证 令

$$\varphi=E\{\omega[(f(\boldsymbol{X})/X_{i,n+1})^c-c\ln(f(\boldsymbol{X})/X_{i,n+1})-1]\mid \boldsymbol{X}\},$$

$$\partial\varphi/\partial f=E(((f(\boldsymbol{X}))^{c-1}/X_{i,n+1}^c-1/f(\boldsymbol{X}))\mid \boldsymbol{X})=0.$$

经过计算得 $f(\boldsymbol{X})=(1/E(X_{i,n+1}^{-c}\mid \boldsymbol{X}))^{1/c}$,因此,$H_B^i(\boldsymbol{X})=(1/E(X_{i,n+1}^{-c}\mid \boldsymbol{X}))^{1/c}$.

引理1给出了在MLINEX损失函数下 $H_B^i(\boldsymbol{X})$ 的计算公式.

下面的引理给出了具有风险相依效应的信度模型的重要性质,记 $Y_{ij}=1/X_{ij}^c,i=1,2,\cdots,K,j=1,2,\cdots,n+1,\boldsymbol{Y}_i=(Y_{i1},Y_{i2},\cdots,Y_{in})',\boldsymbol{Y}=(\boldsymbol{Y}_1',\boldsymbol{Y}_2',\cdots,\boldsymbol{Y}_K')'$.

引理 2[6] 在假设 1 和假设 2 下,有

(i) Y_{ij} 的期望为 $E(Y_{ij})=\mu,i=1,2,\cdots,K,j=1,2,\cdots,n+1$;

(ii) $Y_{i,n+1}$ 与 $\boldsymbol{Y}$ 的协方差为 $\mathrm{Cov}(Y_{i,n+1},\boldsymbol{Y})=\varepsilon_i(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_K)\otimes\boldsymbol{1}_n'$,其中 $\boldsymbol{1}_n$ 为每个元素均为1的 $n\times1$ 向量,$\otimes$ 为矩阵的 Kronecker 积;

(iii) $\boldsymbol{Y}$ 的协方差矩阵为

$\mathrm{Cov}(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Y})=\mathrm{diag}(u_i\boldsymbol{M}_i,i=1,2,\cdots,K)+[(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_K)'\otimes\boldsymbol{1}_n'][(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_K)\otimes\boldsymbol{1}_n]$,其中 $\boldsymbol{M}_i^{-1}=\mathrm{diag}(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}),\boldsymbol{a}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})'=\boldsymbol{M}_i^{-1}\boldsymbol{1}_n,\bar{a}_i=\boldsymbol{1}_n'\boldsymbol{a}_i/n,i=1,2,\cdots,K,\mathrm{diag}(\cdot)$ 为对角矩阵;

(iv) $\boldsymbol{Y}$ 的协方差矩阵的逆矩阵为

$$\mathrm{Cov}^{-1}(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Y})=\mathrm{diag}(\boldsymbol{M}_i^{-1}/u_{ii},i=1,2,\cdots,K)-\boldsymbol{\gamma}'\boldsymbol{\gamma}/(1+n\sum_{j=1}^K\bar{a}_j\varepsilon_j^2/u_j),$$

其中 $\boldsymbol{\gamma}=((\varepsilon_1/u_1)\boldsymbol{a}_1',(\varepsilon_2/u_2)\boldsymbol{a}_2',\cdots,(\varepsilon_K/u_K)\boldsymbol{a}_K')$.

引理 3[4] $(\boldsymbol{X}_{1\times r}',\boldsymbol{Y}_{1\times s}')$ 为一随机向量,期望和协方差矩阵分别为 $(\boldsymbol{\mu}_X',\boldsymbol{\mu}_Y')'$ 和 $\begin{pmatrix}\sum_{XX} & \sum_{XY}\\ \sum_{YX} & \sum_{YY}\end{pmatrix}$,则当 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\mu}_Y-\sum_{YX}\sum_{XX}^{-1}\boldsymbol{\mu}_X,\boldsymbol{B}=\sum_{YX}\sum_{XX}^{-1}$ 时,$E(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{X})'(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{X})$ 达到最小.

2 具有特殊风险相依效应的 Bühlmann-Straub 模型的信度保费

由引理 1 知,要计算 MLINEX 损失函数下模型的信度保费,需先计算 $E(X_{i,n+1}^{-c}\mid \boldsymbol{X})$,令 $g(\boldsymbol{X})=E(X_{i,n+1}^{-c}\mid \boldsymbol{X})$,根据经典信度理论中信度保费计算方法,也将估计限定在 $Y_{ij}(i=1,2,\cdots,K,j=1,2,\cdots,n)$ 的线性组合中,则 $g(\boldsymbol{X})$ 为下述问题的最优解:

$$\min_{b_0,b_{ij}\in\mathbf{R},i=1,2,\cdots,K,j=1,2,\cdots,n}E(g(\boldsymbol{X})-b_0-\sum_{i=1}^K\sum_{j=1}^n b_{ij}/X_{ij}^c)^2.\quad(2)$$

定理 1 在假设 1 和假设 2 下,通过求解最优化问题(2),得到 $g(\boldsymbol{X})$ 的最优估计为 $g(\boldsymbol{X})=(1-z_i)\mu+z_i\bar{\bar{Y}}_\varepsilon^a$,则基于 MLINEX 损失函数的具有特殊风险相依效应的保单 i 的 Bühlmann-Straub 模型的信度保费为

$$H_C^i(\boldsymbol{X})=(1/((1-z_i)\mu+z_i\bar{\bar{Y}}_\varepsilon^a))^{1/c},$$

其中 $z_i=(n\varepsilon_i\sum_{j=1}^K\bar{a}_j\varepsilon_j/u_j)/(1+n\sum_{j=1}^K\bar{a}_j\varepsilon_j^2/u_j)$,$\bar{Y}_i^a=\sum_{j=1}^n(a_{ij}/X_{ij}^c)/\sum_{j=1}^n a_{ij}$,$\bar{\bar{Y}}_\varepsilon^a=\sum_{i=1}^K(\bar{a}_i\varepsilon_i/u_i)\bar{Y}_i^a/\sum_{i=1}^K(\bar{a}_i\varepsilon_i/u_i)$.

证 最优化问题(2) 等价于

$$\min_{A,\boldsymbol{B}}E[g(\boldsymbol{X})-A-\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}]'[g(\boldsymbol{X})-A-\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}],\quad(3)$$

其中 $A=b_0,\boldsymbol{b}_i=(b_{i1},b_{i2},\cdots,b_{in})',\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{b}_1',\boldsymbol{b}_2',\cdots,\boldsymbol{b}_K')$,$\boldsymbol{Y}$ 如前所述. 根据引理 3 可得,最优化问题(3) 的解为 $g(\boldsymbol{X})=\mu_{Y_{i,n+1}}+\sum_{Y_{i,n+1}\boldsymbol{Y}}\sum_{\boldsymbol{YY}}^{-1}(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{Y}})$. 所以,

$$g(\boldsymbol{X})=\mu+\varepsilon_i(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_K)\otimes\boldsymbol{1}_n'(\mathrm{diag}(\boldsymbol{M}_i^{-1}/u_i,i=1,2,\cdots,K)-1/(1+n\sum_{j=1}^K\bar{a}_j\varepsilon_j^2/u_j)\boldsymbol{\gamma}'\boldsymbol{\gamma})(Y_{11}-\mu,Y_{12}-\mu,\cdots,Y_{Kn}-\mu)'=\mu+\frac{\varepsilon_i}{1+n\sum_{j=1}^K\bar{a}_j\varepsilon_j^2/u_j}(a_{11}\varepsilon_1/u_1,\cdots,a_{1n}\varepsilon_1/u_1,\cdots,a_{K1}\varepsilon_K/u_K,\cdots,a_{Kn}\varepsilon_K/u_K)(Y_{11}-\mu,\cdots,Y_{Kn}-\mu)'=\mu+\varepsilon_i[n\bar{a}_1\varepsilon_1(\bar{Y}_1^a-\mu)/u_1+\cdots+n\bar{a}_K\varepsilon_K(\bar{Y}_K^a-\mu)/u_K]/(1+n\sum_{j=1}^K\bar{a}_j\varepsilon_j^2/u_j)=\mu+n\varepsilon_i\sum_{j=1}^K\bar{a}_j\varepsilon_j/u_j(\sum_{j=1}^K((\bar{a}_j\varepsilon_j/u_j)\bar{Y}_j^a)/\sum_{j=1}^K(\bar{a}_j\varepsilon_j/u_j)-\mu)/(1+n\sum_{j=1}^K\bar{a}_j\varepsilon_j^2/u_j)=(1-z_i)\mu+z_i\bar{\bar{Y}}_\varepsilon^a.$$

根据引理 1 可知,保单 i 的 Bühlmann-Straub 模型的信度保费为

$$H_C^i(\boldsymbol{X}) = (1/((1-z_i)\mu + z_i\overline{\overline{Y}}_\varepsilon^a))^{1/c},$$

这里 z_i, $\overline{\overline{Y}}_\varepsilon^a$ 如定理 1 所述.

注 1　当 $a_{ij} = 1$ 时, $z_i = n\varepsilon_i \sum_{j=1}^{K} \varepsilon_j/u_j \Big/ (1 + n\sum_{j=1}^{K} \varepsilon_j^2/u_j)$, $\overline{\overline{Y}}_\varepsilon^a = \sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_i/(u_i X_{ij}^c) \Big/ (\sum_{i=1}^{K} n\varepsilon_i/u_i) = \overline{\overline{Y}}_\varepsilon$, $\overline{Y}_i^a = \sum_{j=1}^{n}(1/X_{ij}^c)/n$,则 $H_C^i(\boldsymbol{X}) = (1/((1-z_i)\mu + z_i\overline{\overline{Y}}_\varepsilon^a))^{1/c}$ 为在 MLINEX 损失函数下具有特殊风险相依效应的 Bühlmann 模型的信度保费.

注 2　由于结构参数(ε_i, u_i)较多,故假设 $\varepsilon_i = \varepsilon$, $u_i = u$, $i = 1, 2, \cdots, K$,则结构参数 μ 的无偏估计量为 $\hat{\mu} = \frac{1}{nK}\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{n} 1/X_{ij}^c$,结构参数 u 的无偏估计量为

$$\hat{u} = \frac{1}{(n-1)K}\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{n}(1/X_{ij}^c - \overline{Y}_i)^2,$$

其中 $\overline{Y}_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} 1/X_{ij}^c$. 结构参数 ε^2 的无偏估计量为 $\hat{\varepsilon}^2 = \frac{1}{K-1}\sum_{i=1}^{K}(\overline{Y}_i - \overline{\overline{Y}})^2 - \hat{u}/n$, 其中 $\overline{\overline{Y}} = \frac{1}{nK}\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{n} 1/X_{ij}^c$.

3　结论

本文采用 MLINEX 损失函数作为逼近准则,研究了具有特殊风险相依效应的 Bühlmann-Straub 模型,得到了模型的信度保费公式,并且依据所得结论推出了在 MLINEX 损失函数下具有特殊风险相依效应的 Bühlmann 模型的信度保费公式,也给出了结构参数 μ、u、ε^2 的无偏估计量.

4　参考文献

[1] Bühlmann H, Gisler A. A course in credibility theory and its applications [M]. Netherlands: Springer, 2005: 77-264.

[2] 郑丹,章溢,温利民. 具有时间变化效应的信度模型 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2012, 36(3): 249-252.

[3] Yeo K L, Valdez E A. Claim dependence with common effects in credibility models [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2006, 38(3): 609-629.

[4] Wen Limin, Wu Xianyi, Zhou Xian. The credibility premiums for models with dependence induced by common effects [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2009, 44(1): 19-25.

[5] Li Xinpeng, Wu Lijun. The credibility models with risks dependence structure under balanced loss function [J]. Chinese Journal of Applied Probability and Statistics, 2015, 31(5): 457-468.

[6] 李新鹏,德娜·吐热汗,腾叶,等. LINEX 损失函数下具有风险相依结构的信度模型 [J]. 山东理工大学学报: 自然科学版, 2015, 29(4): 11-15.

[7] Podder C K, Roy M K, Bhuiyan K J, et al. Minimax estimation of the parameter of the pareto distribution under quadratic and MLINEX loss functions [J]. Pakistan Journal of Statistics, 2004, 20(1): 137-149.

[8] 徐美萍,于健,莫立坡. Mlinex 损失函数下一类分布族参数的 Bayes 估计 [J]. 数学的实践与认识, 2014, 44(12): 219-223.

[9] 房婷婷,吴黎军. Mlinex 损失函数下的信度保费 [J]. 吉首大学学报: 自然科学版, 2017, 38(5): 12-15.

The Credibility Models with Risks Dependence Effects under MLINEX Loss Function

LI Xinpeng[1], WU Lijun[2*]

(1. College of Mathematics and Physics, Xinjiang Agriculture University, Urumqi Xinjiang 830052, China;

2. College of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang 830046, China)

Abstract: Considering the premium´s equity, various risk groups´ dependent effects, using of the credibility theory method, the Bühlmann-Straub model is considered with special risks dependence effects under MLINEX loss function and the credibility premium is obtained. Furthermore, the Bühlmann model´s premium is derived with the risks dependence effects under MLINEX loss function, and the estimators of structure parameters are obtained, therefore generalizing the classical credibility theory.

Key words: MLINEX loss function; dependence effects; credibility premium

(责任编辑: 曾剑锋)