文章编号:1000-5862(2020)02-0206-03

一类求解非线性方程的 3 阶收敛迭代格式

开依沙尔·热合曼[1,2]

(1. 新疆大学数学与系统科学学院,新疆 乌鲁木齐 830046;2. 新疆大学数学物理研究所,新疆 乌鲁木齐 830046)

摘要:该文提出了求非线性方程根的 3 阶收敛的牛顿类迭代方法,并对收敛性进行了证明. 该牛顿类迭代方法有效地克服了传统的牛顿迭代方法在目标函数的 1 阶导数等于 0 或者接近于 0 时失效的缺点. 通过数值例子来验证该类迭代格式的有效性.

关键词:非线性方程;牛顿方法;3 阶收敛;迭代方法

中图分类号:O 241.7　　**文献标志码**:A　　**DOI**:10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2020.02.17

0 引言

在许多科学与工程计算中,经常需要对非线性方程 $f(x)=0$ 进行求解. 但该类方程大多数不能用解析方法求出方程的精确解,而只能采用数值方法求出方程的近似解. Newton 迭代方法是求解非线性方程根的一种常用且重要的数值方法[1-2],该方法 2 阶收敛到方程的单根.

这里分析方程 $f(x)=0$ 的单根情况(即 $f(\alpha)=0$, $f'(\alpha)\neq 0$). 方程 $f(x)=0$ 的牛顿迭代格式为

$$x_{k+1}=x_k-f(x_k)/f'(x_k). \tag{1}$$

牛顿迭代方法(1) 在单根 α 的邻近处是平方收敛的[1-4],并满足误差关系式

$$\lim_{k\to\infty}(x_{k+1}-\alpha)/(x_k-\alpha)^2=f''(\alpha)/(2f'(\alpha)).$$

但是当目标函数的 1 阶导数值趋于 0 时牛顿迭代方法是失效的. 为了克服牛顿迭代法的缺点, 吴新元[4] 利用动力系统的李雅普诺夫方法构造了新的“牛顿类” 方法. 这些新的迭代方法保持了牛顿法的收敛速率和计算效能,去除了 $f'(x)\neq 0$ 的约束条件要求,其牛顿迭代格式[4] 为

$$x_{k+1}^*=x_k-f(x_k)/(\lambda f(x_k)+f'(x_k)). \tag{2}$$

为了提高收敛阶,国内外学者提出了 3 阶和 4 阶收敛的各种牛顿迭代算法[5-12]. 文献[5] 运用 Newton-Leibniz 公式和数值求积公式提出了算术平均牛顿法. 在文献[5] 中方程 $f(x)=0$ 可写成

$$f(x)=f(x_k)+\int_{x_k}^{x}f'(t)\,\mathrm{d}t, \tag{3}$$

其中的定积分用矩形公式 $\int_{x_k}^{x}f'(t)\,\mathrm{d}t\approx(x-x_k)\cdot f'(x_k)$ 来代替,再令 $f(x)=0$ 可得到牛顿公式

$$x_{k+1}=x_k-f(x_k)/f'(x_k).$$

将(3) 式中的定积分用梯形公式 $\int_{x_k}^{x}f'(t)\,\mathrm{d}t\approx(x-x_k)(f'(x_k)+f'(x))/2$ 来代替,再令 $f(x)=0$ 得到 3 阶收敛的算术平均牛顿法[5]:

$$x_{k+1}=x_k-2f(x_k)/(f'(x_k)+f'(x_{k+1}^*)), \tag{4}$$

其中 $x_{k+1}^*=x_k-f(x_k)/f'(x_k)$.

文献[6-11] 将(3) 式中的定积分分别应用其他常用的数值积分公式来代替和将(1) 式中的 $f'(x)$ 利用函数的各种平均值来代替并提出了非线性方程求根的 3 阶收敛的迭代方法. 文献[13] 利用 2 种 3 阶收敛迭代格式的加权组合提出了求解非线性方程的 4 阶收敛的各种迭代格式. 虽然文献[5-12] 中的各种迭代格式具有 3 阶和 4 阶收敛速率,但是所有迭代公式是用牛顿格式来预测的,当牛顿格式中的目标函数的 1 阶导数值趋于 0 时,迭代格式无法进行计算. 为了克服该缺点,本文将以改进的“牛顿类” 方法为预测、以算术平均牛顿方法为校正得到一族 3 阶收敛的牛顿类迭代方法,并证明了其收敛性,最后通过数值例子来验证本文迭代格式的有效性.

1 基本定义

定义 1[5,11,13]　迭代序列 $\{x_k\}$ 收敛于方程的根

收稿日期:2019-06-12

基金项目:国家自然科学基金(11461069)和新疆大学博士启动基金(BS150204)资助项目.

作者简介:开依沙尔·热合曼(1978-),男,新疆库车人,副教授,博士,主要从事数值计算及工程优化设计研究. E-mail:kaysar2014@sina.com

α,若存在实数 $p(\geqslant 1)$ 和常数 $C(\neq 0)$,且满足渐近关系式 $\lim\limits_{k\to\infty}(x_{k+1}-\alpha)/(x_k-\alpha)^p = C$,则称迭代序列 $\{x_k\}$ 是 p 阶收敛的,当 $p=1$ 时被称为线性收敛,当 $p>1$ 时被称为超线性收敛,当 $p=2$ 时被称为平方收敛,当 $p=3$ 时被称为 3 阶收敛.

令第 k 次迭代误差 $e_k = x_k-\alpha$,称 $e_{k+1}=Ce_k^p + O(e_k^{p+1})$ 为误差方程,p 是收敛阶.

定义 2[5]　假设 α 是方程 $f(x)=0$ 的根,x_{k+1}、x_k、x_{k-1} 趋近于 α,则计算收敛阶(computational order of convergence)可用如下公式来逼近:

$$C_{OC}\approx \ln|(x_{n+1}-\alpha)/(x_n-\alpha)|/\ln|(x_n-\alpha)/(x_{n-1}-\alpha)|.$$

定义 3[3,11,13]　设迭代序列 $\{x_k\}$ 的收敛阶为 $p(\geqslant 1)$,每迭代一步计算函数值和导数值的工作量为 μ,则称 $E=p^{1/\mu}$ 为迭代法的效能指数,效能指数越大表明算法越好.

2　新的牛顿类迭代方法及收敛性

将以迭代格式(2)为预测和以(4)式为校正,得到一类 3 阶收敛的迭代方法:

$$\begin{cases} x_{k+1}^* = x_k - f(x_k)/(\lambda f(x_k)+f'(x_k)), \\ x_{k+1} = x_k - 2f(x_k)/(f'(x_k)+f'(x_{k+1}^*)), \end{cases} \tag{5}$$

其中 $\lambda\in\mathbf{R}$. 当 $\lambda=0$ 时迭代格式(5)变成文献[5]提出的算术平均牛顿方法. λ 取不同的值得到各种不同的迭代格式,因此迭代格式(4)可看成本文迭代格式(5)的特殊情形.

下面来证明迭代格式(5)的收敛性.

定理 1　设函数 $f:D(\subset\mathbf{R})\to\mathbf{R}$ 在开区间 D 内有单根 $\alpha(f(\alpha)=0, f'(\alpha)\neq 0)$,且 $f(x)$ 在 D 内存在各阶导数,则由(5)式定义的迭代格式具有 3 阶收敛性,并满足误差方程

$$e_{k+1} = (\lambda c_2 + c_2^2 + c_3/2)e_k^3 + O(e_k^4),$$

其中 $c_i = f^{(i)}(\alpha)/(i!f'(\alpha))$.

证　假设 α 是 $f(x)$ 的单根,即 $f(\alpha)=0$,$f'(\alpha)\neq 0$. 令 $x_k=\alpha+e_k$,则 $f(x_k)$ 和 $f'(x_k)$ 在 α 处 Taylor 展开得

$$f(x_k)=f(\alpha+e_k)=f(\alpha)+f'(\alpha)e_k+\frac{1}{2!}f''(\alpha)e_k^2+\frac{1}{3!}f'''(\alpha)e_k^3+O(e_k^4)=f'(\alpha)\Big(e_k+\frac{1}{2!}\frac{f''(\alpha)e_k^2}{f'(\alpha)}+\frac{1}{3!}\frac{f'''(\alpha)e_k^3}{f'(\alpha)}+O(e_k^4)\Big).$$

令 $c_i = f^{(i)}(\alpha)/(i!f'(\alpha))$,则

$$f(x_k)=f'(\alpha)(e_k+c_2e_k^2+c_3e_k^3+O(e_k^4)),$$

$$f'(x_k)=f'(\alpha+e_k)=f'(\alpha)+f''(\alpha)e_k+\frac{1}{2!}f'''(\alpha)e_k^2+O(e_k^3)=f'(\alpha)(1+f''(\alpha)e_k/f'(\alpha)+f'''(\alpha)e_k^2/(2!f'(\alpha))+O(e_k^3))=f'(\alpha)(1+2c_2e_k+3c_3e_k^2+O(e_k^3)),$$

所以

$$f(x_k)/(\lambda f(x_k)+f'(x_k)) = e_k-(c_2+\lambda)e_k^2+(2c_2^2+2c_2\lambda+\lambda^2-2c_3)e_k^3+O(e_k^4),$$

$$x_{k+1}^* = x_k - f(x_k)/(\lambda f(x_k)+f'(x_k)) = \alpha+(c_2+\lambda)e_k^2+(2c_3-2c_2^2-2c_2\lambda-\lambda^2)e_k^3+O(e_k^4).$$

从而得到牛顿迭代格式的误差格式

$$x_{k+1}^*-\alpha = (c_2+\lambda)e_k^2+(2c_3-2c_2^2-2c_2\lambda-\lambda^2)e_k^3+O(e_k^4), \tag{6}$$

$$f'(x_{k+1}^*) = f'(\alpha)+(x_{k+1}^*-\alpha)f''(\alpha)+(x_{k+1}^*-\alpha)^2f'''(\alpha)/2!+O(e_k^3). \tag{7}$$

将(6)式代入(7)式得

$$f'(x_{k+1}^*) = f'(\alpha)+((c_2+\lambda)^2e_k^2+(2c_3-2c_2^2-2c_2\lambda-\lambda^2)e_k^3)f''(\alpha)+O(e_k^4) = f'(\alpha)(1+2((c_2+\lambda)e_k^2+(2c_3-2c_2^2-2c_2\lambda-\lambda^2)e_k^3)\cdot(f''(\alpha)/(2f'(\alpha))))+O(e_k^4)=f'(\alpha)(1+(2c_2^2+2c_2\lambda)e_k^2+(4c_2c_3-4c_2^3-4c_2^2\lambda-2c_2\lambda^2)e_k^3)+O(e_k^4)$$

所以

$$f'(x_k)+f'(x_{k+1}^*) = 2f'(\alpha)(1+c_2e_k+3c_3/2+c_2^2+\lambda c_2)e_k^2+(2c_4+2c_2c_3-2c_2^3-2c_2^2\lambda-c_2\lambda^2)e_k^3+O(e_k^4)),$$

$$2f(x_k)/(f'(x_k)+f'(x_{k+1}^*)) = e_k-(\lambda c_2+c_2^2+c_3/2)e_k^3+O(e_k^4),$$

由 $x_{k+1}=x_k-2f(x_k)/(f'(x_k)+f'(x_{k+1}^*))$ 得 $e_{k+1}=(\lambda c_2+c_2^2+c_3/2)e_k^3+O(e_k^4)$.

由定义 1 可知格式(5)具有 3 阶收敛性.

3　数值实验与结果分析

下面给出 6 个数值例子来说明本文格式的有效性.

(i) $f_1(x) = x\sin x+\cos x-0.6$,

(ii) $f_2(x)=x^3-3x+1$,

(iii) $f_3(x)=\mathrm{e}^{-x}+2\sin x-x+3.5$,

(iv) $f_4(x)=\ln(1+x)$,

(v) $f_5(x)=x\mathrm{e}^{-x}-0.1$,

(vi) $f_6(x)=1/x-1$.

在各种迭代算法中取 $\varepsilon = 1\times 10^{-5}$,迭代停止准则为 $|f(x_{k+1})|<\varepsilon$ 和最大迭代次数为 200.

在格式(5)中取 $\lambda=1$ 进行数值比较. 表 1 给出了牛顿迭代方法、算术平均牛顿迭代方法和本文迭代格式在(i)~(vi)6 种函数下的不同特殊初始值、迭代次数、迭代根和计算收敛阶. 从表 1 可以看出牛顿迭代方法、算术平均牛顿方法在给定的特殊初始

值时大多数无法进行计算(因为该点上 $f'(x_0)=0$),而在能计算的情况下牛顿迭代方法的迭代次数却相当大,但本文格式(5)对给出的特殊初始值均有效. 在表 1 中最后一栏给出了本文格式的计算收敛阶,从表 1 可以看出本文格式具有 3 阶收敛速率,这个结果表明理论与实验较符合.

表 1 各种迭代格式的迭代次数、迭代根和计算收敛阶

试验函数与初始值		迭代次数			迭代根	计算收敛阶
试验函数	初值 x_0	牛顿格式	算术平均牛顿格式	本文格式	本文格式	本文格式
(i)	0	失败	失败	6	−2.546 231 731 428 410	2.990 325 096 886 130
(ii)	1.0	失败	发散	3	0.347 296 355 333 860	2.926 156 061 315 080
(iii)	0	失败	失败	4	3.273 938 123 136 760	2.992 388 821 516 320
(iv)	2.0	失败	发散	5	0.000 000 000 000 000	3.072 412 850 418 990
(v)	1.1	111	失败	5	0.111 832 559 158 963	3.005 286 501 871 670
(vi)	2.0	失败	发散	4	1.000 000 000 000 000	3.200 232 757 588 380

4 结论

1)迭代格式(5)克服了牛顿迭代法和迭代格式(4)[3]的缺点,且本文迭代格式具有与迭代格式(4)同样的收敛阶,每次迭代只需要计算 2 次导数值和 1 次函数值(效能指数 $\sqrt[3]{3}\approx 1.442\ 2$,而牛顿迭代法的效能指数为 $\sqrt{2}\approx 1.414\ 2$);

2)λ 取不同的值得到各种不同的 3 阶收敛迭代格式,当 $\lambda=0$ 时,格式(5)即为格式(4);

3)类似地,若以格式(2)为预测和以其他 3 阶收敛的迭代格式为校正格式,则可以构造更多类型的迭代格式. 总体上本文方法在理论和实用方面均有一定的价值.

5 参考文献

[1] Burden R L,Faires J D. Numerical analysis [M]. Seventh Edition. Beijing:Higher Education Press,2001.

[2] 李庆扬,王能超,易大义. 数值分析 [M]. 4 版. 北京:清华大学出版社,2001.

[3] 冯果忱,黄明游,刘停战,等. 数值分析:上册 [M]. 北京:高等教育出版社,2007.

[4] 吴新元. 对牛顿迭代法的一个重要修改 [J]. 应用数学与力学,1999,20(8):863-866.

[5] Weerakoon S,Fernando T G I. A variant of Newton's method with accelerated third-order convergence [J]. Applied Mathematics Letters,2000,13(8):87-93.

[6] Özban A Y. Some new variants of Newton's method [J]. Applied Mathematics Letters,2004,17(6):677-682.

[7] Frontini M,Sormani E. Some variant of Newton's method with third-order convergence [J]. Applied Mathematics and Computation,2003,140(2/3):419-426.

[8] Homeier H H H. On Newton-type methods with cubic convergence [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics,2005,176(2):425-432.

[9] Lukić T,Ralević N M. Geometric mean Newton's method for simple and multiple roots [J]. Applied Mathematics Letters,2008,21(1):30-36.

[10] 危地,吴根秀. 非线性方程求解的新算法 [J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2006,30(2):190-192.

[11] 艾合麦提尼亚孜·艾合麦提江,开依沙尔·热合曼. 非线性方程求根的平方根牛顿方法 [J]. 佳木斯大学学报:自然科学版,2011,29(2):271-273.

[12] 夏红卫,文传军. 一般非线性约束优化问题的信赖域法 [J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2012,36(3):253-256.

[13] 开依沙尔·热合曼,热合买提江·依明江,买买提明·艾尼. 求解非线性方程根 4 阶收敛的迭代格式 [J]. 数学的实践与认识,2013,43(7):236-240.

One Class of Third-Order Iteration Methods for Solving Non-Linear Equations

KAYSAR Rahman[1,2]

(1. College of Mathematics and System Science,Xinjiang University,Urumqi Xinjiang 830046,China;
2. Institute of Mathematical Physics,Xinjiang University,Urumqi Xinjiang 830046,China)

Abstract:In this paper,one class of modified Newton methods for solving non-linear equations is presented. Analysis of convergence shows that the new method is cubically convergent. The main advantage of this method is that it can overcome the shortcoming of Newton's method which the derivative of the function is either zero or very small of the required root. The effectiveness of the present method is demonstrated by some numerical examples.

Key words:nonlinear equations;Newton's method;third-order convergence;iterative methods

(责任编辑:曾剑锋)