第 44 卷 第 3 期 江西师范大学学报(自然科学版) Vol. 44 No. 3
2020 年 5 月 Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science) May 2020

文章编号:1000-5862(2020)03-0263-06

2*m* 阶 Schrödinger 方程组在实指数 Sobolev 空间中的整体小解

王海龙,郭翠花*
(山西大学数学科学学院,山西 太原 030006)

摘要: Schrödinger 型方程是一类非常重要的发展方程. 通过应用 Banach 不动点定理,该文研究了在任意维数空间中 $2m$ 阶非线性 Schrödinger 方程组

$$\begin{cases} \mathrm{i}u_t+(-\Delta)^m u=a|u|^{\alpha-1}u|v|^{\beta+1}, x\in\mathbf{R}^n, t\geqslant 0,\\ \mathrm{i}v_t+(-\Delta)^m v=b|u|^{\alpha+1}|v|^{\beta-1}v, x\in\mathbf{R}^n, t\geqslant 0,\\ u(x,0)=\varphi(x), v(x,0)=\psi(x), x\in\mathbf{R}^n \end{cases}$$

在实指数 Sobolev 空间 $H^s_{p_1}(\mathbf{R}^n)\times H^s_{p_2}(\mathbf{R}^n)$ 中的整体小解.

关键词: $2m$ 阶耦合 Schrödinger 方程组; 实指数 Sobolev 空间; 整体小解; Banach 不动点原理
中图分类号: O 175 **文献标志码:** A **DOI:** 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2020.03.09

0 引言

本文研究方程组

$$\begin{cases} \mathrm{i}u_t+(-\Delta)^m u=a|u|^{\alpha-1}u|v|^{\beta+1}, x\in\mathbf{R}^n, t\geqslant 0,\\ \mathrm{i}v_t+(-\Delta)^m v=b|u|^{\alpha+1}|v|^{\beta-1}v, x\in\mathbf{R}^n, t\geqslant 0,\\ u(x,0)=\varphi(x), v(x,0)=\psi(x), x\in\mathbf{R}^n \end{cases} \quad (1)$$

的整体小解. 事实上,对于高阶 Schrödinger 方程,已有不少的研究[1-4]. 本文着重研究耦合方程组的整体小解. 该方程组一方面从数学角度上延展了经典 Schrödinger 方程组

$$\begin{cases} \mathrm{i}u_t+\Delta u=a|u|^{\alpha-1}u|v|^{\beta+1}, & x\in\mathbf{R}^n, t\geqslant 0,\\ \mathrm{i}v_t+\Delta v=b|u|^{\alpha+1}|v|^{\beta-1}v, & x\in\mathbf{R}^n, t\geqslant 0,\\ u(x,0)=\varphi(x), v(x,0)=\psi(x), & x\in\mathbf{R}^n \end{cases} \quad (2)$$

的结论. 另一方面对于其他耦合非线性发展波方程组的整体小解的研究具有一定意义. 耦合方程组问题的研究要比单个方程问题的研究更复杂,由于非线性项中涉及到的量更多,因此在构造工作空间时就会更难. 尤其是在用不动点原理时,解算子作用到非线性项以后还得回到原工作空间. 本文主要研究(1)式的整体小解. 下面先给出一些已有的结论.

文献[5-8]建立了非线性 Schrödinger 方程组模型(2). 文献[9-10]研究了(2)式的孤立波解. 有关孤立波解的研究也可参见文献[11-12]. 文献[13]研究了方程组(2)在空间维数 $n=3$ 时的整体解,得到了在 $L^{p_1}(\mathbf{R}^n)\times L^{p_2}(\mathbf{R}^n)$ 空间中整体解的适定性结果. 文献[14]得到了方程组(1)在任意维数空间和整指数 Sobolev $W^{1\times p_1}(\mathbf{R}^n)\times W^{1\times p_2}(\mathbf{R}^n)$ 空间中整体解的适定性结果. 本文在文献[14]的基础上,对任意情形 n,讨论在实指数 Sobolev $H^s_{p_1}(\mathbf{R}^n)\times H^s_{p_2}(\mathbf{R}^n)$ 空间中整体解的适定性结果.

当 $1\leqslant p\leqslant\infty$ 时,空间 $L^p(\mathbf{R}^n)$ 表示 Lebesgue 可测空间,记其范数 $\|u\|_p=(\int_{\mathbf{R}^n}|u(x)|^p\mathrm{d}x)^{1/p}$; $H^s_p(\mathbf{R}^n)$ 表示实指数Sobolev 空间,其范数为 $\|u\|_{H^s_p}=(\int_{\mathbf{R}^n}(1+|\xi|^2)^{s/2}|\tilde{u}(\xi)|^p\mathrm{d}\xi)^{1/p}$,其中 $\tilde{u}$ 表示函数 u 的 Fourier 变换.

在本文中 p_1,p_2 满足

$$(\alpha+1)/p_1-s\alpha/n=1/2, (\beta+1)/p_2-s\beta/n=1/2, \quad (3)$$

$$1/2-m/n<1/p_i<(n-s)/n-2m/(n(\alpha+\beta))\ (i=1,2). \quad (4)$$

收稿日期:2019-09-10
基金项目:国家自然科学基金(61503230)资助项目.
通信作者:郭翠花(1972-),女,山西平遥人,教授,博士,主要从事非线性偏微分方程及其应用研究. E-mail: gchzjq@sxu.edu.cn

还需另外 2 个满足下述条件的参数 θ_1,θ_2:

$$\begin{cases}\theta_1=1/(\alpha+\beta)-n/(2m(\alpha+\beta))-\\ \quad n(\beta-1)/(2mp_1(\alpha+\beta))+n(\beta+\\ \quad 1)/(2mp_2(\alpha+\beta)),\\ \theta_2=1/(\alpha+\beta)-n/(2m(\alpha+\beta))+\\ \quad n(\alpha+1)/(2mp_1(\alpha+\beta))-n(\alpha-\\ \quad 1)/(2mp_2(\alpha+\beta)).\end{cases} \tag{5}$$

将会用到算子半群 $S(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\Delta)^m t}=F^{-1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}|\xi|^{2m}t}F(\cdot))$,由文献[5]知有如下的结论:

$$\|S(t)f\|_{H_p^s}\leqslant C|t|^{-n(1/2-1/p)/m}\|f\|_{H_{p'}^s}, \tag{6}$$

其中 p' 是 p 的对偶数.

本文的主要结果如下:

定理 1 设 $\alpha,\beta>1,p_1,p_2$ 满足(3)~(4)式,θ_1 和 θ_2 由(5)式定义,则 $\exists\varepsilon$(与初始条件有关),当初值 $\sup\limits_{t>0}\{t^{\theta_1}\|S(t)\varphi\|_{H_{p_1}^s},t^{\theta_2}\|S(t)\psi\|_{H_{p_2}^s}\}$ 很小时,方程组(1)存在唯一的整体解 (u,v) 满足

$$\sup_{t>0}\{t^{\theta_1}\|u(t)\|_{H_{p_1}^s},t^{\theta_2}\|v(t)\|_{H_{p_2}^s}\}\leqslant\varepsilon. \tag{7}$$

定理 2 在定理 1 的前提下,(u_1,v_1)、(u_2,v_2) 分别是方程组(1)满足初始条件 (φ_1,ψ_1) 和 (φ_2,ψ_2) 的解,则 $\exists\varepsilon$,当初值 $\sup\limits_{t>0}\{t^{\theta_1}\|S(t)\varphi_1\|_{H_{p_1}^s},t^{\theta_2}\|S(t)\psi_1\|_{H_{p_2}^s}\}$ 与 $\sup\limits_{t>0}\{t^{\theta_1}\|S(t)\varphi_2\|_{H_{p_1}^s},t^{\theta_2}\|S(t)\cdot\psi_2\|_{H_{p_2}^s}\}$ 很小时,有

$$\sup_{t>0}\{t^{\theta_1}\|u_1(t)-u_2(t)\|_{p_1},t^{\theta_2}\|v_1(t)-v_2(t)\|_{p_2}\}\leqslant(1-C\varepsilon^{\alpha+\beta})^{-1}\sup_{t>0}\{t^{\theta_1}\|\varphi_1-\varphi_2\|_{p_1},t^{\theta_2}\|\psi_1-\psi_2\|_{p_2}\}. \tag{8}$$

若初值 (φ_1,ψ_1) 和 (φ_2,ψ_2) 满足

$$\sup_{t>0}\{t^{\theta_1+\delta}\|S(t)(\varphi_1-\varphi_2)\|_{p_1},t^{\theta_2+\delta}\|S(t)(\psi_1-\psi_2)\|_{p_2}\}<\infty,$$

其中 $0<\delta<\delta_0=\min\{(n-s)/(2m)-n/(2mp_1)-1/(\alpha+\beta),(n-s)/(2m)-n/(2mp_2)-1/(\alpha+\beta)\}$,则有

$$\sup_{t>0}\{t^{\theta_1+\delta}\|u_1(t)-u_2(t)\|_{p_1},t^{\theta_2+\delta}\|v_1(t)-v_2(t)\|_{p_2}\}\leqslant(1-C\varepsilon^{\alpha+\beta})^{-1}\sup_{t>0}\{t^{\theta_1+\delta}\|S(t)(\varphi_1-\varphi_2)\|_{p_1},t^{\theta_2+\delta}\|S(t)(\psi_1-\psi_2)\|_{p_2}\}. \tag{9}$$

注 1 当 $s=1$ 时,所得结论与文献[4]一致.

注 2 对于如下的耦合系统,用相同的方法,取空间指标 p 满足条件 $(\alpha+2)/p-\alpha s/n=1$,令 $\theta=1/\alpha-n(1/2-1/p)/(m\alpha)$,当初始条件满足 $\sup\limits_{t>0}\{t^{\theta}\|S(t)\varphi\|_{H_p^s},t^{\theta}\|S(t)\psi\|_{H_p^s}\}$ 很小时,系统

$$\begin{cases}\mathrm{i}u_t+(-\Delta u)^m=a(|u|^{\alpha}+|v|^{\alpha})u,x\in\mathbf{R}^n,t\geqslant0,\\ \mathrm{i}v_t+(-\Delta v)^m=a(|u|^{\alpha}+|v|^{\alpha})v,x\in\mathbf{R}^n,t\geqslant0,\\ u(x,0)=\varphi(x),v(x,0)=\psi(x),x\in\mathbf{R}^n\end{cases}$$

在 Sobolev 空间 $H_p^s(\mathbf{R}^n)\times H_p^s(\mathbf{R}^n)$ 中存在整体解.

1 预备知识

先通过计算可知,p_1、p_2、θ_1、θ_2 满足引理 1.

引理 1 假设 $\alpha,\beta>1,p_1>1,p_2>1$ 满足(3)~(4)式,θ_1 和 θ_2 满足(5)式,则有下述结论成立

$$1-n(1/2-1/p_i)/m>0(i=1,2),$$
$$1-\theta_1\alpha-\theta_2(\beta+1)>0,$$
$$1-\theta_1(\alpha+1)-\theta_2\beta>0,$$
$$1-n(1/2-1/p_1)/m-\theta_1(\alpha-1)-\theta_2(\beta+1)=0,$$
$$1-n(1/2-1/p_2)/m-\theta_1(\alpha+1)-\theta_2(\beta-1)=0.$$

其次,给出复合函数求导的估计.

引理 2 $f(u,v)=G(u,\bar{u})\times W(v,\bar{v})$ 是关于 u、v 的 2 元复值函数,$f(u,v)$ 是 N 阶可微的. 当 $0<\mu\leqslant N,1<p<\infty$ 时,有下列结论成立:

(i) 当 $\mu=m$ 为一个正整数时,有

$$\|I^m f\|_p\leqslant C\sum_{k=1}^{m}\|\partial^k f/(\partial u^{k_1}\partial v^{k_2})\|_{q_k}\|I^{k_1}u\|_{r_{k_1}}\cdot\|u\|_{s_{k_1}}^{k_1-1}\|I^{k_2}v\|_{r_{k_2}}\|v\|_{s_{k_2}}^{k_2-1},$$

其中 $k=k_1+k_2,1/p=1/q_k+(k_1/k)/r_{k_1}+(k_1-k_1/k)/s_{k_1}+(k_2/k)/r_{k_2}+(k_2-k_2/k)/s_{k_2},k=1,2,\cdots,m$;

(ii) 当 $0<\mu<1$ 时,有

$$\|I^{\mu}f\|_p\leqslant C\sum_{k_1+k_2=1}^{m}\|\partial f/(\partial u^{k_1}\partial v^{k_2})\|_q(\|I^{\mu}u\|_r+\|I^{\mu}v\|_r);$$

(iii) 当 $\mu=m+v,0<v<1$ 时,有

$$\|I^{\mu}f\|_p\leqslant C\sum_{k=1}^{m+1}\|\partial^k f/(\partial u^{k_1}\partial v^{k_2})\|_{q_k}\|I^{\mu}u\|_{r_{k_1}}^{k_1/k}\cdot\|u\|_{s_{k_1}}^{k_1-k_1/k}\|I^{\mu}v\|_{r_{k_2}}^{k_2/k}\|v\|_{s_{k_2}}^{k_2-k_2/k},$$

其中 $k=k_1+k_2$.

证 这里只证明(i).(ii)的证明参见文献[6]中命题 3.1 的证明,同时由(i)和(ii)又可以推出(iii)[7].

注意到

$$I^m f(u,v)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{l_1=0}^{k_1}\sum_{l_2=0}^{k_2}\frac{\partial^{l_1}G}{\partial u^{l_1}}\frac{\partial^{k_1-l_1}G}{\partial\bar{u}^{k_1-l_1}}\frac{\partial^{l_2}W}{\partial v^{l_2}}\frac{\partial^{k_2-l_2}W}{\partial\bar{v}^{k_2-l_2}}\cdot\sum_{\alpha,\beta}D^{\alpha_1}uD^{\alpha_2}u\cdots D^{\alpha_{l_1}}uD^{\alpha_{l_1+1}}\bar{u}D^{\alpha_{l_1+2}}\bar{u}\cdots D^{\alpha_{k_1}}\bar{u}D^{\beta_1}vD^{\beta_2}v\cdots\cdot D^{\beta_{l_2}}vD^{\beta_{l_2+1}}\bar{v}D^{\beta_{l_2+2}}\bar{v}\cdots D^{\beta_{k_2}}\bar{v},$$

这里 α、β 表示所有 α_i 与 β_j 的集合,α_i 与 β_j 表示 n 重指标,且有 $|\alpha_1|+|\alpha_2|+\cdots+|\alpha_{k_1}|=k_1$,$|\beta_1|+$

$|\beta_2|+\cdots+|\beta_{k_2}|=k_2,k=k_1+k_2$.

因此当 $1/p=1/p_k+1/q_k$ 时，由 Hölder 不等式得

$$\begin{aligned}\|I^m f(u,v)\|_p = &\sum_{k=1}^{m}\sum_{l_1=0}^{k_1}\sum_{l_2=0}^{k_2}\|\partial^{k_1}G/(\partial u^{l_1}\partial\bar{u}^{k_1-l_1})\cdot \\ &\partial^{k_2}W/(\partial v^{l_2}\partial\bar{v}^{k_2-l_2})\|_{q_k}\sum_{\alpha,\beta}\|D^{\alpha_1}u\|_{p_{k,1}}\|D^{\alpha_2}u\|_{p_{k,2}}\cdots \\ &\|D^{\alpha_{l_1}}u\|_{p_{k,l_1}}\|D^{\alpha_{l_1+1}}\bar{u}\|_{p_{k,l_1+1}}\|D^{\alpha_{l_1+2}}\bar{u}\|_{p_{k,l_1+2}}\cdots \\ &\|D^{\alpha_{k_1}}\bar{u}\|_{p_{k,k_1}}\|D^{\beta_1}v\|_{p_{k,k_1+1}}\|D^{\beta_2}v\|_{p_{k,k_1+2}}\cdots \\ &\|D^{\beta_{l_2}}v\|_{p_{k,k_1+l_2}}\|D^{\beta_{l_2+1}}\bar{v}\|_{p_{k,k_1+l_2+1}}\|D^{\beta_{l_2+2}}\bar{v}\|_{p_{k,k_1+l_2+2}}\cdots \\ &\|D^{\beta_{k_2}}\bar{v}\|_{p_{k,k_1+k_2}},\end{aligned}\tag{10}$$

其中 $1/p_k=1/p_{k,1}+\cdots+1/p_{k,l_1}+1/p_{k,l_1+1}+\cdots+1/p_{k,k_1}+1/p_{k,k_1+1}+\cdots+1/p_{k,k_1+l_2}+1/p_{k,k_1+l_2+1}+\cdots+1/p_{k,k_1+k_2},k=k_1+k_2$.

再由 Gargliardo-Nirenberg 不等式，得

$$\|D^{\alpha_i}u\|_{p_{k,i}}\leqslant\|I^k u\|_{r_{k_1}}^{\theta_i}\|u\|_{s_{k_1}}^{1-\theta_i},$$

其中 $1/p_{k,i}=\theta_i/r_{k_1}+(1-\theta_i)/s_{k_1},\theta_i=|\alpha_i|/k,1\leqslant i\leqslant l_1$;

$$\|D^{\alpha_{l_1+i}}\bar{u}\|_{p_{k,l_1+i}}\leqslant\|I^k u\|_{r_{k_1}}^{\theta_i}\|u\|_{s_{k_1}}^{1-\theta_i},$$

其中 $\theta_i=|\alpha_{l_1+i}|/k,1\leqslant i\leqslant k_1-l_1$;

$$\|D^{\beta_j}v\|_{p_{k,k_1+j}}\leqslant\|I^k v\|_{r_{k_2}}^{\eta_j}\|v\|_{s_{k_2}}^{1-\eta_j},$$

其中 $1/p_{k,k_1+j}=\eta_j/r_{k_2}+(1-\eta_j)/s_{k_2},\eta_j=|\beta_j|/k,1\leqslant j\leqslant l_2$;

$$\|D^{\beta_{l_2+j}}\bar{v}\|_{p_{k,k_1+l_2+j}}\leqslant\|I^k v\|_{r_{k_2}}^{\eta_{l_2+j}}\|v\|_{s_{k_2}}^{1-\eta_{l_2+j}},$$

其中 $\eta_j=|\beta_{l_2+j}|/k,1\leqslant j\leqslant k_2-l_2$.

把上述这些不等式代入(10)式，有

$$\begin{aligned}\|I^m f(u,v)\|_p\leqslant&\sum_{k=1}^{m}\sum_{l_1=0}^{k_1}\sum_{l_2=0}^{k_2}\|\partial^k f(u,v)/ \\ &(\partial u^{k_1}\partial v^{k_2})\|_{q_k}\sum_{\alpha,\beta}\prod_{i=1}^{l_1}\|I^k u\|_{r_{k_1}}^{\theta_i}\|u\|_{s_{k_1}}^{1-\theta_i}\cdot \\ &\prod_{i=1}^{k_1-l_1}\|I^k u\|_{r_{k_1}}^{\theta_i}\|u\|_{s_{k_1}}^{1-\theta_i}\prod_{j=1}^{l_2}\|I^k v\|_{r_{k_2}}^{\eta_j}\|v\|_{s_{k_2}}^{1-\eta_j}\cdot \\ &\prod_{j=1}^{k_2-l_2}\|I^k v\|_{r_{k_2}}^{\eta_j}\|v\|_{s_{k_2}}^{1-\eta_j}\leqslant\sum_{k=1}^{m}\|\partial^k f(u,v)/(\partial u^{k_1}\partial v^{k_2})\|_{q_k}\cdot \\ &\sum_{\alpha,\beta}\|I^k u\|_{r_{k_1}}^{\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_{k_1}}\|u\|_{s_{k_1}}^{k_1-(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_{k_1})}\cdot \\ &\|I^k v\|_{r_{k_2}}^{\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_{k_2}}\|v\|_{s_{k_2}}^{k_2-(\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_{k_2})}\leqslant\sum_{k=1}^{m}\|\partial^k f(u,v)/ \\ &(\partial u^{k_1}\partial v^{k_2})\|_{q_k}\sum_{\alpha,\beta}\|I^k u\|_{r_{k_1}}^{k_1/k}\|u\|_{s_{k_1}}^{k_1-k_1/k}\|I^k v\|_{r_{k_2}}^{k_2/k}\cdot \\ &\|v\|_{s_{k_2}}^{k_2-k_2/k},\end{aligned}$$

其中 $k=k_1+k_2,1/p=1/q_k+(k_1/k)/r_{k_1}+(k_1-k_1/k)/s_{k_1}+(k_2/k)/r_{k_2}+(k_2-k_2/k)/s_{k_2},k=1,2,\cdots,m$. 引理 2 证毕.

利用引理 2，可以得到如下的非线性项估计.

引理 3　当 p_1、p_2 满足(3)～(4)式时，有

$$\||u(\tau)|^{\alpha-1}u(\tau)|v(\tau)|^{\beta+1}\|_{H^s_{p_1'}}\leqslant C\|u(\tau)\|_{H^s_{p_1}}^{\alpha}\|v(\tau)\|_{H^s_{p_2}}^{\beta+1},\tag{11}$$

$$\||u(\tau)|^{\alpha+1}|v(\tau)|^{\beta-1}v(\tau)\|_{H^s_{p_2'}}\leqslant C\|u(\tau)\|_{H^s_{p_1}}^{\alpha+1}\|v(\tau)\|_{H^s_{p_2}}^{\beta},\tag{12}$$

证　根据定义，有

$$\||u(\tau)|^{\alpha-1}u(\tau)|v(\tau)|^{\beta+1}\|_{H^s_{p_1'}}=\|I^s(|u|^{\alpha-1}u|v|^{\beta+1})\|_{p_1'}+\||u|^{\alpha-1}u|v|^{\beta+1}\|_{p_1'}.\tag{13}$$

当 s 为正整数时，由引理 2 的(i)、Hölder 不等式、Sobolev 嵌入 $H^s_p(\mathbf{R}^n)\subseteq L^q(\mathbf{R}^n)(1/q=1/p-s/n)$ 以及(3)式有

$$\begin{aligned}&\|I^s(|u|^{\alpha-1}u|v|^{\beta+1})\|_{p_1'}\leqslant C\sum_{k=1}^{s}\|\partial^k f/(\partial u^{k_1}\partial v^{k_2})\|_{q_k}\cdot \\ &\|I^{k_1}u\|_{r_{k_1}}\|u\|_{s_{k_1}}^{k_1-1}\|I^{k_2}v\|_{r_{k_2}}\|v\|_{s_{k_2}}^{k_2-1}\leqslant C\sum_{k=1}^{s}\|u\|_{(\alpha-k_1)q_{k_1}}^{\alpha-k_1}\cdot \\ &\|v\|_{(\beta+1-k_2)q_{k_2}}^{\beta+1-k_2}\|I^{k_1}u\|_{r_{k_1}}\|I^{k_2}v\|_{r_{k_2}}\|u\|_{s_{k_1}}^{k_1-1}\|v\|_{s_{k_2}}^{k_2-1} \\ &(1/q_k=1/q_{k_1}+1/q_{k_2})\leqslant C\sum_{k=1}^{s}\|u\|_{H^s_{p_1}}^{\alpha-k_1}\|v\|_{H^s_{p_2}}^{\beta+1-k_2}\cdot \\ &\|I^{k_1}u\|_{p_1}\|I^{k_2}v\|_{p_2}\|u\|_{H^s_{p_1}}^{k_1-1}\|v\|_{H^s_{p_2}}^{k_2-1}\leqslant C\sum_{k=1}^{s}\|u\|_{H^s_{p_1}}^{\alpha-k_1}\cdot \\ &\|v\|_{H^s_{p_2}}^{\beta+1-k_2}\|u\|_{H^s_{p_1}}\|v\|_{H^s_{p_2}}\|u\|_{H^s_{p_1}}^{k_1-1}\|v\|_{H^s_{p_2}}^{k_2-1}\leqslant \\ &C\|u\|_{H^s_{p_1}}^{\alpha}\|v\|_{H^s_{p_2}}^{\beta+1}.\end{aligned}\tag{14}$$

其中 $k=k_1+k_2,1/p'_1=1/q_k+(k_1/k)/r_{k_1}+(k_1-k_1/k)/s_{k_1}+(k_2/k)/r_{k_2}+(k_2-k_2/k)/s_{k_2},1/((\alpha-k_1)q_{k_1})=1/p_1-s/n,1/((\beta+1-k_2)q_{k_2})=1/p_2-s/n,r_{k_1}=p_1,r_{k_2}=p_2,1/s_{k_1}=1/p_1-s/n,1/s_{k_2}=1/p_2-s/n$.

当 $0<s<1$ 以及 $s=m+v(0<v<1)$，其中 m 为正整数时，同理可得

$$\|I^s(|u|^{\alpha-1}u|v|^{\beta+1})\|_{p_1'}\leqslant C\|u\|_{H^s_{p_1}}^{\alpha}\|v\|_{H^s_{p_2}}^{\beta+1}.\tag{15}$$

当 $1/p'_1=1/p_{11}+1/p_1+1/p_{12},1/p_1-1/(p_{11}\alpha)=s/n,1/p_2-1/(p_{12}(\beta+1))=s/n$ 时，利用 Hölder 不等式、Sobolev 嵌入 $H^s_{p_1}(\mathbf{R}^n)\subseteq L^{p_{11}\alpha}(\mathbf{R}^n)$ 以及 $H^s_{p_2}(\mathbf{R}^n)\subseteq L^{p_{12}(\beta+1)}(\mathbf{R}^n)$，可以得到

$$\begin{aligned}&\||u|^{\alpha-1}u|v|^{\beta+1}\|_{p_1'}\leqslant\||u|^{\alpha-1}\|_{p_{11}}\|u\|_{p_1}\||v|^{\beta+1}\|_{p_{12}}\leqslant \\ &\|u\|_{p_{11}(\alpha-1)}^{\alpha-1}\|u\|_{p_1}\|v\|_{p_{12}(\beta+1)}^{\beta+1}\leqslant C\|u\|_{H^s_{p_1}}^{\alpha-1}\|u\|_{p_1}\cdot \\ &\|v\|_{H^s_{p_2}}^{\beta+1}\leqslant C\|u\|_{H^s_{p_1}}^{\alpha}\|v\|_{H^s_{p_2}}^{\beta+1}.\end{aligned}\tag{16}$$

把(14)～(16)式代入(13)式就可得到(11)式. 与上面证明过程类似，可证(12)式成立. 引理 3 证毕.

同时，定理证明中将会用到下述的不等式:

引理 4　当 p_1、p_2 满足(3)～(4)式时，有

$$\||u_1|^{\alpha-1}u_1|v_1|^{\beta+1}-|u_2|^{\alpha-1}u_2|v_2|^{\beta+1}\|_{p_1'}\leqslant C(\|u_1\|_{H^s_{p_1}}^{\alpha-1}+\|u_2\|_{H^s_{p_1}}^{\alpha-1})(\|v_1\|_{H^s_{p_2}}^{\beta+1}+\|v_2\|_{H^s_{p_2}}^{\beta+1})\cdot$$

$$\|u_1-u_2\|_{p_1}+C(\|u_1\|_{H^s_{p_1}}^{\alpha}+\|u_2\|_{H^s_{p_1}}^{\alpha})(\|v_1\|_{H^s_{p_2}}^{\beta}+\|v_2\|_{H^s_{p_2}}^{\beta})\|v_1-v_2\|_{p_2}. \tag{17}$$

$$\||u_1|^{\alpha+1}|v_1|^{\beta-1}v_1-|u_2|^{\alpha+1}|v_2|^{\beta-1}v_2\|_{p_2'}\leqslant C(\|u_1\|_{H^s_{p_1}}^{\alpha}+\|u_2\|_{H^s_{p_1}}^{\alpha})(\|v_1\|_{H^s_{p_2}}^{\beta}+\|v_2\|_{H^s_{p_2}}^{\beta})\cdot\|u_1-u_2\|_{p_1}+C(\|u_1\|_{H^s_{p_1}}^{\alpha+1}+\|u_2\|_{H^s_{p_1}}^{\alpha+1})(\|v_1\|_{H^s_{p_2}}^{\beta-1}+\|v_2\|_{H^s_{p_2}}^{\beta-1})\|v_1-v_2\|_{p_2}. \tag{18}$$

证 $\||u_1|^{\alpha-1}u_1|v_1|^{\beta+1}-|u_2|^{\alpha-1}u_2|v_2|^{\beta+1}\|_{p_1'}=\||u_1|^{\alpha-1}|v_1|^{\beta+1}(u_1-u_2)+(|u_1|^{\alpha-1}-|u_2|^{\alpha-1})\cdot|v_1|^{\beta+1}u_2+|u_2|^{\alpha-1}(|v_1|^{\beta+1}-|v_2|^{\beta+1})u_2\|_{p_1'}\leqslant\||u_1|^{\alpha-1}|v_1|^{\beta+1}(u_1-u_2)\|_{p_1'}+\|(|u_1|^{\alpha-1}-|u_2|^{\alpha-1})|v_1|^{\beta+1}u_2\|_{p_1'}+\||u_2|^{\alpha}(|v_1|^{\beta+1}-|v_2|^{\beta+1})\|_{p_1'}=I+II+III.$ (19)

所以分别估计 I、II、III.

由 Hölder 不等式,Sobolev 嵌入 $H^s_p(\mathbf{R}^n)\subseteq L^q(\mathbf{R}^n)(1/q=1/p-s/n)$,可以得到

$$I=\||u_1|^{\alpha-1}|v_1|^{\beta+1}(u_1-u_2)\|_{p_1'}\leqslant\||u_1|^{\alpha-1}\|_{r_1}\||v_1|^{\beta+1}\|_{r_2}\|u_1-u_2\|_{p_1}\leqslant C\|u_1\|_{H^s_{p_1}}^{\alpha-1}\|v_1\|_{H^s_{p_2}}^{\beta+1}\|u_1-u_2\|_{p_1},$$

其中 $1/p_1'=1/r_1+1/r_2+1/p_1$,$1/((\alpha-1)r_1)=1/p_1-s/n$,$1/((\beta+1)r_2)=1/p_2-s/n$.

同理可得

$$II=\|(|u_1|^{\alpha-1}-|u_2|^{\alpha-1})|v_1|^{\beta+1}u_2\|_{p_1'}\leqslant C\|(|u_1|^{\alpha-2}+|u_2|^{\alpha-2})|u_1-u_2||v_1|^{\beta+1}u_2\|_{p_1'}\leqslant C\||u_1|^{\alpha-2}+|u_2|^{\alpha-2}\|_{r_3}\|u_2\|_{np_1/(n-sp_1)}\||v_1|^{\beta+1}\|_{r_4}\cdot\|u_1-u_2\|_{p_1}\leqslant C(\|u_1\|_{H^s_{p_1}}^{\alpha-2}+\|u_2\|_{H^s_{p_1}}^{\alpha-2})\cdot\|v_1\|_{H^s_{p_2}}^{\beta+1}\|u_2\|_{H^s_{p_1}}\|u_1-u_2\|_{p_1},$$

其中 $1/p_1'=1/r_3+1/r_4+2/p_1-s/n$,$1/((\alpha-2)r_3)=1/p_1-s/n$,$1/((\beta+1)r_4)=1/p_2-s/n$.

由 Young 不等式,有

$$\|u_1\|_{H^s_{p_1}}^{\alpha-2}\|u_2\|_{H^s_{p_1}}\leqslant\|u_1\|_{H^s_{p_1}}^{(\alpha-1)(\alpha-2)/(\alpha-2)}/((\alpha-1)/(\alpha-2))+\|u_2\|_{H^s_{p_1}}^{\alpha-1}/(\alpha-1)\leqslant C(\|u_1\|_{H^s_{p_1}}^{\alpha-1}+\|u_2\|_{H^s_{p_1}}^{\alpha-1}).$$

所以 $II\leqslant C(\|u_1\|_{H^s_{p_1}}^{\alpha-1}+\|u_2\|_{H^s_{p_1}}^{\alpha-1})\|v_1\|_{H^s_{p_2}}^{\beta+1}\|u_1-u_2\|_{p_1}$,以及

$$III=\||u_2|^{\alpha}(|v_1|^{\beta+1}-|v_2|^{\beta+1})\|_{p_1'}\leqslant C\||u_2|^{\alpha}\cdot(|v_1|^{\beta}+|v_2|^{\beta})|v_1-v_2|\|_{p_1'}\leqslant C\||u_2|^{\alpha}\|_{r_5}\cdot(\||v_1|^{\beta}\|_{r_6}+\||v_2|^{\beta}\|_{r_6})\|v_1-v_2\|_{p_2}\leqslant C\|u_2\|_{H^s_{p_1}}^{\alpha}\cdot(\|v_1\|_{H^s_{p_2}}^{\beta}+\|v_2\|_{H^s_{p_2}}^{\beta})\|v_1-v_2\|_{p_2},$$

其中 $1/p_1'=1/r_5+1/r_6+1/p_2$,$1/(\alpha r_5)=1/p_1-s/n$,$1/(\beta r_6)=1/p_2-s/n$.

把上述得到的 3 个结论代入(19)式,即得(17)式成立. 与上面证明过程类似,可证(18)式成立. 引理 4 证毕.

2 主要结果的证明

2.1 定理 1 的证明

空间 X 表示 Bochner 可测函数 $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}:(0,+\infty)\to H^s_{p_1}(\mathbf{R}^n)\times H^s_{p_2}(\mathbf{R}^n)$ 的集合,定义其范数为

$$\left\|\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\right\|_X=\left\{\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}:\sup_{t>0}\{t^{\theta_1}\|u(t)\|_{H^s_{p_1}},t^{\theta_2}\cdot\|v(t)\|_{H^s_{p_2}}\}<+\infty\right\}.$$

进一步定义子空间 (X_ε,d) 为 $X_\varepsilon=\left\{\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\in X:\left\|\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\right\|_X\leqslant\varepsilon\right\}$,距离 $d\left(\begin{pmatrix}u_1\\v_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u_2\\v_2\end{pmatrix}\right)=\sup_{t>0}\{t^{\theta_1}\|u_1(t)-u_2(t)\|_{p_1},t^{\theta_2}\|v_1(t)-v_2(t)\|_{p_2}\}$,易证 X_ε 是完备的度量空间.

定义映射 T:

$$T\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}F_\varphi(u,v)\\F_\psi(u,v)\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}S(t)\varphi-\mathrm{i}a\int_0^t S(t-\tau)|u(\tau)|^{\alpha-1}u(\tau)|v(\tau)|^{\beta+1}\mathrm{d}\tau,\\S(t)\psi-\mathrm{i}b\int_0^t S(t-\tau)|u(\tau)|^{\alpha+1}v(\tau)|v(\tau)|^{\beta-1}\mathrm{d}\tau.\end{pmatrix},$$

下证映射 $T\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$ 是空间 X_ε 上的严格的压缩映射.

$\forall\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\in X_\varepsilon$,由(6)式及引理 3 可以得到

$$t^{\theta_1}\|F_\varphi(u,v)\|_{H^s_{p_1}}=t^{\theta_1}\|S(t)\varphi\|_{H^s_{p_1}}+Ct^{\theta_1}\int_0^t\|S(t-\tau)|u(\tau)|^{\alpha-1}u(\tau)|v(\tau)|^{\beta+1}\|_{H^s_{p_1}}\mathrm{d}\tau\leqslant t^{\theta_1}\|S(t)\varphi\|_{H^s_{p_1}}+Ct^{\theta_1}\int_0^t|t-\tau|^{-n(1/2-1/p_1)/m}\cdot\||u(\tau)|^{\alpha-1}u(\tau)|v(\tau)|^{\beta+1}\|_{H^s_{p_1'}}\mathrm{d}\tau\leqslant t^{\theta_1}\|S(t)\varphi\|_{H^s_{p_1}}+Ct^{\theta_1}\int_0^t|t-\tau|^{-n(1/2-1/p_1)/m}\cdot\|u(\tau)\|_{H^s_{p_1}}^{\alpha}\|v(\tau)\|_{H^s_{p_2}}^{\beta+1}\mathrm{d}\tau\leqslant t^{\theta_1}\|S(t)\varphi\|_{H^s_{p_1}}+Ct^{1-n(1/2-1/p_1)/m-\theta_1(\alpha-1)-\theta_2(\beta+1)}B(1-n(1/2-1/p_1)/m,1-\theta_1\alpha-\theta_2(\beta+1))\left\|\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\right\|_X^{\alpha+\beta+1}\leqslant t^{\theta_1}\|S(t)\varphi\|_{H^s_{p_1}}+C\varepsilon^{\alpha+\beta+1}t^{1-n(1/2-1/p_1)/m-\theta_1(\alpha-1)-\theta_2(\beta+1)}B(1-n(1/2-1/p_1)/m,1-\theta_1\alpha-\theta_2(\beta+1)),$$

其中 $B(\cdot,\cdot)$ 是 Beta 函数，再由引理 1 知

$$t^{\theta_1}\|F_\varphi(u,v)\|_{H^s_{p_1}}\le t^{\theta_1}\|S(t)\varphi\|_{H^s_{p_1}}+C\varepsilon^{\alpha+\beta+1}.$$

同理可得

$$t^{\theta_2}\|F_\psi(u,v)\|_{H^s_{p_2}}\le t^{\theta_2}\|S(t)\psi\|_{H^s_{p_2}}+Ct^{1-n(1/2-1/p_1)/m-\theta_1(\alpha+1)-\theta_2(\beta-1)}B(1-n(1/2-1/p_1)/m,1-\theta_1(\alpha+1)-\theta_2\beta))\left\|\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\right\|_X^{\alpha+\beta+1}\le t^{\theta_2}\|S(t)\psi\|_{H^s_{p_2}}+C\varepsilon^{\alpha+\beta+1}.$$

因此有

$$\left\|T\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\right\|_X\le\left\|\begin{pmatrix}\varphi\\\psi\end{pmatrix}\right\|_X+C\varepsilon^{\alpha+\beta+1}.$$

只要选取 $\varepsilon=2\left\|\begin{pmatrix}\varphi\\\psi\end{pmatrix}\right\|_X$ 及初始条件满足 $\left\|\begin{pmatrix}\varphi\\\psi\end{pmatrix}\right\|_X\le(1/(2C))^{1/(\alpha+\beta)}/2$，代入上述不等式可知

$$\left\|T\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\right\|_X\le\left\|\begin{pmatrix}\varphi\\\psi\end{pmatrix}\right\|_X+C\varepsilon^{\alpha+\beta+1}\le\varepsilon,$$

所以 $T\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$ 是空间 X_ε 到自身的映射.

$\forall\begin{pmatrix}u_1\\v_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u_2\\v_2\end{pmatrix}\in X_\varepsilon$，由(6)式以及引理 1 和引理 4 得

$$t^{\theta_1}\|F_\varphi(u_1,v_1)-F_\varphi(u_2,v_2)\|_{p_1}\le Ct^{\theta_1}\cdot\int_0^t\|S(t-\tau)(|u_1(\tau)|^{\alpha-1}u_1(\tau)|v_1(\tau)|^{\beta+1}-|u_2(\tau)|^{\alpha-1}u_2(\tau)\cdot|v_2(\tau)|^{\beta+1})\|_{p_1}\mathrm{d}\tau\le Ct^{\theta_1}\int_0^t|t-\tau|^{-n(1/2-1/p_1)/m}\cdot\||u_1(\tau)|^{\alpha-1}u_1(\tau)|v_1(\tau)|^{\beta+1}-|u_2(\tau)|^{\alpha-1}u_2(\tau)\cdot|v_2(\tau)|^{\beta+1}\|_{p_1'}\mathrm{d}\tau\le Ct^{\theta_1}\int_0^t|t-\tau|^{-n(1/2-1/p_1)/m}\tau^{-\theta_1\alpha-\theta_2(\beta+1)}\cdot\max\left(\left\|\begin{pmatrix}u_1\\v_1\end{pmatrix}\right\|_X,\left\|\begin{pmatrix}u_2\\v_2\end{pmatrix}\right\|_X\right)^{\alpha+\beta}d\left(\begin{pmatrix}u_1\\v_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u_2\\v_2\end{pmatrix}\right)\mathrm{d}\tau\le Ct^{1-n(1/2-1/p_1)/m-\theta_1(\alpha-1)-\theta_2(\beta+1)}\varepsilon^{\alpha+\beta}B(1-n(1/2-1/p_1)/m,1-\theta_1\alpha-\theta_2(\beta+1))d\left(\begin{pmatrix}u_1\\v_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u_2\\v_2\end{pmatrix}\right)\le C\varepsilon^{\alpha+\beta}\cdot d\left(\begin{pmatrix}u_1\\v_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u_2\\v_2\end{pmatrix}\right).$$

同理可得

$$t^{\theta_2}\|F_\psi(u_1,v_1)-F_\psi(u_2,v_2)\|_{p_2}\le C\varepsilon^{\alpha+\beta}d\left(\begin{pmatrix}u_1\\v_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u_2\\v_2\end{pmatrix}\right),$$

因此有

$$d\left(T\begin{pmatrix}u_1\\v_1\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}u_2\\v_2\end{pmatrix}\right)\le C\varepsilon^{\alpha+\beta}d\left(\begin{pmatrix}u_1\\v_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u_2\\v_2\end{pmatrix}\right).$$

注意到 $\varepsilon=2\left\|\begin{pmatrix}\varphi\\\psi\end{pmatrix}\right\|_X\le(1/2C)^{1/(\alpha+\beta)}$，从而 $C\varepsilon^{\alpha+\beta}\le1/2$，由此可得

$$d\left(T\begin{pmatrix}u_1\\v_1\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}u_2\\v_2\end{pmatrix}\right)\le\frac{1}{2}d\left(\begin{pmatrix}u_1\\v_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u_2\\v_2\end{pmatrix}\right).$$

由此可见 $T\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$ 是 X_ε 到自身的严格的压缩映射. 由 Banach 不动点定理，$T\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$ 在空间 X_ε 上有唯一的不动点 $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$ 满足

$$\begin{cases}u(t)=S(t)\varphi-\mathrm{i}a\int_0^tS(t-\tau)|u(\tau)|^{\alpha-1}\cdot u(\tau)|v(\tau)|^{\beta+1}\mathrm{d}\tau,\\ v(t)=S(t)\psi-\mathrm{i}b\int_0^tS(t-\tau)|u(\tau)|^{\alpha+1}\cdot v(\tau)|v(\tau)|^{\beta-1}\mathrm{d}\tau,\end{cases}$$

由 $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\in X_\varepsilon$，即得(7)式成立. 定理 1 证毕.

2.2　定理 2 的证明

由定理 1 可知 $T\begin{pmatrix}u_1\\v_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_1\\v_1\end{pmatrix}$，$T\begin{pmatrix}u_2\\v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_2\\v_2\end{pmatrix}$. 与定理 1 的证明类似，可得

$$t^{\theta_1}\|F_{\varphi_1}(u_1,v_1)-F_{\varphi_2}(u_2,v_2)\|_{p_1}\le d\left(\begin{pmatrix}\varphi_1\\\psi_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\varphi_2\\\psi_2\end{pmatrix}\right)+C\varepsilon^{\alpha+\beta}d\left(\begin{pmatrix}u_1\\v_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u_2\\v_2\end{pmatrix}\right),$$

$$t^{\theta_2}\|F_{\psi_1}(u_1,v_1)-F_{\psi_2}(u_2,v_2)\|_{p_2}\le d\left(\begin{pmatrix}\varphi_1\\\psi_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\varphi_2\\\psi_2\end{pmatrix}\right)+C\varepsilon^{\alpha+\beta}d\left(\begin{pmatrix}u_1\\v_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u_2\\v_2\end{pmatrix}\right),$$

所以

$$d\left(\begin{pmatrix}u_1\\v_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u_2\\v_2\end{pmatrix}\right)=d\left(T\begin{pmatrix}u_1\\v_1\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}u_2\\v_2\end{pmatrix}\right)\le d\left(\begin{pmatrix}\varphi_1\\\psi_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\varphi_2\\\psi_2\end{pmatrix}\right)+C\varepsilon^{\alpha+\beta}d\left(\begin{pmatrix}u_1\\v_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u_2\\v_2\end{pmatrix}\right),$$

即

$$d\left(\begin{pmatrix}u_1\\v_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u_2\\v_2\end{pmatrix}\right)\le(1-C\varepsilon^{\alpha+\beta})^{-1}d\left(\begin{pmatrix}\varphi_1\\\psi_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\varphi_2\\\psi_2\end{pmatrix}\right),$$

故(8)式成立. 下证(9)式成立.

若令 $d_\delta\left(\begin{pmatrix}u_1\\v_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u_2\\v_2\end{pmatrix}\right)=\sup\limits_{t>0}\{t^{\theta_1+\delta}\|u_1(t)-u_2(t)\|_{p_1},t^{\theta_2+\delta}\|v_1(t)-v_2(t)\|_{p_2}\}$，类似于上面的证明可得

$$t^{\theta_1+\delta}\|F_{\varphi_1}(u_1,v_1)-F_{\varphi_2}(u_2,v_2)\|_{p_1}\le d_\delta\left(\begin{pmatrix}\varphi_1\\\psi_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\varphi_2\\\psi_2\end{pmatrix}\right)+C\varepsilon^{\alpha+\beta}d_\delta\left(\begin{pmatrix}u_1\\v_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u_2\\v_2\end{pmatrix}\right),$$

$$t^{\theta_2+\delta}\|F_{\psi_1}(u_1,v_1)-F_{\psi_2}(u_2,v_2)\|_{p_2}\le$$

$d_\delta\left(\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \psi_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\varphi_2\\ \psi_2\end{pmatrix}\right)+C\varepsilon^{\alpha+\beta}d_\delta\left(\begin{pmatrix}u_1\\ v_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u_2\\ v_2\end{pmatrix}\right).$

所以有

$$d_\delta\left(\begin{pmatrix}u_1\\ v_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u_2\\ v_2\end{pmatrix}\right)=d_\delta\left(T\begin{pmatrix}u_1\\ v_1\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}u_2\\ v_2\end{pmatrix}\right)\leqslant$$

$$d_\delta\left(\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \psi_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\varphi_2\\ \psi_2\end{pmatrix}\right)+C\varepsilon^{\alpha+\beta}d_\delta\left(\begin{pmatrix}u_1\\ v_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u_2\\ v_2\end{pmatrix}\right),$$

即(9)式成立. 从而定理 2 证毕.

3 参考文献

[1] Karpman V I. Stabilization of soliton instability by higher-order dispersion: fourth-order nonlinear Schrödinger-type equations [J]. Phys Rev, 1996, 53(2): 1336-1339.

[2] Miao CHANGXING. The global strong solution for Schrödinger equation of higher order [J]. Acta Math Appl Sinnica, 1996, 19(2): 213-221.

[3] Saanouni T. Global well-posedness of some high-order semilinear wave and Schrödinger type equations with exponential nonlinearity [J]. Commun Pure Appl Anal, 2014, 13(1): 273-291.

[4] Saanouni T. A note on the critical nonlinear high-order Schrödinger equation [J]. J Math Anal Appl, 2017, 451(2): 736-756.

[5] Hayata K, Koshiba M. Multidimensional solItions in cubic nonlinear media [J]. Optics Letters, 1994, 19(21): 1717-1719.

[6] Radhakrishnan R, Sahadevan R, Lakshmana M. Integrability and singularity structure of coupled nonlinear Schrödinger equations [J]. Chaos, Solitions and Fractals, 1995, 5(12): 2315-2327.

[7] Newboult G K, Parker D F, Faulkner T R. Coupled nonlinear Schrödinger equations arising in the study of monomode step-index optical fiber [J]. J Math Phys, 1989, 30(4): 930-936.

[8] Wadati M, Lizuka T, Hisakado M. A coupled nonlinear Schrödinger equations and optical solitions [J]. J Phys Soc Japan, 1992, 61(7): 2241-2245.

[9] 甘在会,张健. 一类耦合非线性 Schrödinger 方程组的孤立子波 [J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2003, 40(2): 234-239.

[10] 甘在会,谭良. 2 维空间中耦合非线性 Schrödinger 方程组的孤立子波 [J]. 四川师范大学学报: 自然科学版, 2004, 27(1): 14-17.

[11] Yu Fajun, Li Li. Inverse scattering transformation and soliton stability for a nonlinear Gross-Pitaevskii equation with external potentials [J]. Appl Math Lett, 2019, 91: 41-47.

[12] Yu Fajun. Localized analytical solutions and numerically stabilities of generalized Gross-Pitaevskii ($GP(p,q)$) equation with specific external potentials [J]. Appl Math Lett, 2018, 85: 1-7.

[13] 叶耀军,甘在会,汪松玉. 3 维空间中耦合非线性 Schrödinger 方程组的整体解 [J]. 四川师范大学学报: 自然科学版, 2006, 29(5): 534-538.

[14] 郭翠花,王海龙. n 维空间耦合高阶非线性 Schrödinger 方程组的整体解 [J]. 山西大学学报: 自然科学版, doi: 10.13451/j.sxu.ns.2019074.

[15] 郭翠花. Schrödinger 型非线性偏微分方程初值问题在 Sobolev 空间中的适定性 [D]. 广州: 中山大学, 2006.

[16] Christ F M, Weinstein M I. Dispersive of small amplitude solutions of the generalized Korteweg-de Vries equation [J]. J Funct Anal, 1991, 100(1): 87-109.

[17] Cui Shangbin, Guo Cuihua. Well-posedness of higher-order nonlinear Schrödinger equations in Sobolev spaces $H^s(\mathbf{R}^n)$ and applications [J]. Nonlinear Anal, 2007, 67(3): 687-707.

The Small Global Solution for the Coupled 2*m*th-order Nonlinear System on Real Index Sobolev Space

WANG Hailong, GUO Cuihua*

(School of Mathematical Sciences, Shanxi University, Taiyuan Shanxi 030006, China)

Abstract: Schrödinger type equation plays an important role in evolution equations. By using Banach fixed point theorem, the small global solutions of the following 2*m*th-order nonlinear Schrödinger system

$$\begin{cases} \mathrm{i}u_t+(-\Delta)^m u=a|u|^{\alpha-1}u|v|^{\beta+1}, x\in\mathbf{R}^n, t\geqslant 0,\\ \mathrm{i}v_t+(-\Delta)^m v=b|u|^{\alpha+1}|v|^{\beta-1}v, x\in\mathbf{R}^n, t\geqslant 0,\\ u(x,0)=\varphi(x), v(x,0)=\psi(x), x\in\mathbf{R}^n \end{cases}$$

in arbitrary dimensions are studied on the Sobolev space $H^s_{p_1}(\mathbf{R}^n)\times H^s_{p_2}(\mathbf{R}^n)$.

Key words: coupled 2*m*th-order Schrödinger system; real index Sobolev space; small global solution; Banach fixed point theorem

(责任编辑:曾剑锋)