

文章编号: 1000-5862(2020)04-0345-05

演化区域上的广义 Logistic 模型的扩散特征

徐海燕¹ 葛 静² 林支桂^{1*}

(1. 扬州大学数学科学学院 江苏 扬州 225002; 2. 淮阴师范学院数学与统计学院 江苏 淮安 223300)

摘要: 该文研究广义 Logistic 反应扩散模型,该模型描述了周期演化区域上的物种扩散. 首先由区域的增量为各向同性,将模型转化为固定区域上的反应扩散问题;其次利用特征值问题和上下解方法给出了其正周期解的渐近性态;最后通过对阈值的分析,解释了栖息地区域周期性变化对物种生存产生的影响.

关键词: 扩散模型; 广义 Logistic 方程; 周期演化; 渐近性态

中图分类号: O 175.26 **文献标志码:** A **DOI:** 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2020.04.04

0 单种群生长的广义 Logistic 模型

众所周知,栖息地区域变化会对种群的生存与发展产生影响,而这种栖息地区域变化与种群密度之间存在的规律可以通过方程进行刻画,如单种群生长的广义 Logistic 方程^[1]

$$\frac{dx}{dt} = rx(K - x)/(K + Vx) \quad (1)$$

描述了栖息地随时间变化对种群数量产生的影响,其中 x 为种群的生长量, $r(>0)$ 为种群内禀增长率, $K(>0)$ 为环境容纳量, V 是常数.

当 $V=0$ 时,方程(1)为经典的 Logistic 模型;当 $V>0$ 时,模型(1)的解曲线图像与经典 Logistic 模型一样. 文献[2-3]已经对经典 Logistic 模型进行了研究,所以这里主要讨论当 $-1 < V < 0$ 时方程(1)与经典 Logistic 模型的不同之处.

对广义 Logistic 方程而言,当 $-1 < V < 0$ 时,若取 $K^* = -K/V$,则当初值 $x_0 < K^*$ (小初值)时解趋于稳定的平衡态 K ,而当初值 $x_0 > K^*$ (大初值)时解趋于 $+\infty$,从而发生爆破现象. 考虑个体在空间中的随机游动,在方程(1)中引入扩散项,就得到广义 Logistic 反应扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d\Delta u + ru(K - u)/(K + Vu),$$

其中 $d(>0)$ 为扩散率, $\mu = u(x, t)$ 为种群密度.

1 在周期演化区域上的广义 Logistic 模型

在利用反应扩散模型来刻画种群数量与空间区

域的关系时,通常考虑的区域都是固定区域^[4-9]. 对于区域的变化,一种是未知的变化,如具自由边界的 Logistic 反应扩散模型^[10];另一种是已知的变化,如区域增长 Logistic 模型^[11-12]和区域周期演化模型^[13-14]. 本文考虑在周期演化区域上的广义 Logistic 模型.

设区域 $\Omega(t) \subset \mathbf{R}^n$ 随时间 t 变化,其边界为 $\partial\Omega(t)$. t 时刻的位置为 $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \in \Omega(t)$,记在时刻 t 和位置 $x(t)$ 处的密度为 $u(x(t), t)$,根据质量守恒定律和雷诺输运定理^[11]得

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} u dx + \int_{\partial\Omega(t)} u \vec{a} \cdot \vec{n} dx = \int_{\Omega(t)} d\Delta u + ru(K - u)/(K + Vu) dx,$$

这里 \vec{a} 表示由 $\partial\Omega(t)$ 的变化而产生的流速, $\nabla u \cdot \vec{a}$ 为对流项, $\mu(\nabla \cdot \vec{a})$ 为稀释项,对流项表示在 $\Omega(t)$ 内由 \vec{a} 所决定的物质的传输,稀释项则源于局部体积变化. 考虑齐次 Dirichlet 边界条件,则得到在演化区域 $\Omega(t)$ 上的单种群广义 Logistic 问题

$$\begin{cases} u_t + \nabla u \cdot \vec{a} + u(\nabla \cdot \vec{a}) = d\Delta u + ru(K - u)/(K + Vu) \\ (K + Vu)u(x(t), t) = 0, x(t) \in \partial\Omega(t), t > 0, \\ u(x(t), t) = 0, x(t) \in \partial\Omega(t), t > 0, \\ u(x(0), 0) = u_0(x(0)), x(0) \in \Omega(0), \end{cases} \quad (2)$$

其中函数 $u_0(x(0))$ 正有界, $\Omega(0)$ 为初始区域,假设区域 $\Omega(t)$ 的变化为各向同性,即

$$x(t) = \rho(t)y, y \in \Omega(0),$$

收稿日期: 2020-03-12

基金项目: 国家自然科学基金(11771381, 11701206, 11911540464)资助项目.

通信作者: 林支桂(1965-)男,江苏兴化人,教授,博士,博士生导师,主要从事生物数学方面的研究. E-mail: zglin@yzu.edu.cn

其中 $\rho(t)$ 是以 T 为周期的函数, 满足 $\rho(0) = 1$. 假设 $r(t)$ 是 t 的函数(周期为 T), 则问题(2)就转化为

$$\begin{cases} v_t = d\Delta v/\rho^2(t) - \dot{\rho}v/\rho + r(t)v(K-v)/ \\ (K+Vv) \quad y \in \Omega(0) \quad t > 0, \\ v(y, t) = 0 \quad y \in \partial\Omega(0) \quad t > 0, \\ v(y, 0) = u_0(y) \quad y \in \Omega(0). \end{cases} \quad (3)$$

根据偏微分方程理论, 若 ρ, r, u_0 光滑, 则问题(3)存在唯一古典解.

2 在周期演化区域上的广义 Logistic 模型的主特征值

先对问题(3)进行线性化, 根据线性化后的特征值问题来分析其解的渐近性态. 线性化后(3)式为

$$V_t = d\Delta V/(\rho^2(t)) + (-\dot{\rho}/\rho + r(t))V.$$

考虑问题(3)的特征值问题:

$$\begin{cases} \varphi_t - d\Delta\varphi/(\rho^2(t)) = -\dot{\rho}\varphi/\rho + r(t)\varphi/R_0, \\ y \in \Omega(0) \quad t > 0, \\ \varphi(y, t) = 0 \quad y \in \partial\Omega(0) \quad t > 0, \\ \varphi(y, t+T) = \varphi(y, t) \quad y \in \Omega(0) \quad t > 0. \end{cases} \quad (4)$$

下面分析主特征值 R_0 和相应的特征函数 $\varphi(y, t)$ 的性质:

(i) 若 $d > 0$, 函数 $\rho(t), r(t)$ 关于变量 t 连续且以 T 为周期, 则根据文献[15]可知, 特征问题(4)存在唯一的主特征值 R_0 , 且 $R_0 > 0$;

(ii) 主特征值对应的特征函数 $\varphi(y, t)$ 除了相差常数倍外是唯一的, 且当 $(y, t) \in \partial\Omega(0) \times (0, +\infty)$ 时, 有 $\varphi(y, t) > 0$.

由于 R_0 与参数 d, ρ 有关, 不妨设 $R_0 = R_0(d, \rho)$. R_0 关于参数 d, ρ 的光滑性由文献[16]中主特征值的正则性结果给出. 下面讨论 $R_0(d, \rho)$ 的具体表达式.

引理1 若环境关于时间 t 是周期性变化的, 则问题(4)的主特征值的表达式为

$$R_0 = \int_0^T r(t) dt / \int_0^T d\lambda_1/(\rho^2(t)) dt,$$

其中 $\lambda_1 > 0$ 是在 Ω_0 上满足齐次 Dirichlet 边界条件的 $-\Delta$ 的主特征值. 显然 $R_0(d, \rho)$ 关于参数 ρ 单调递增且关于参数 d 单调递减.

证 由于 $r = r(t)$ 不依赖于空间变量 y , 不妨记 $\varphi(y, t) = \alpha(t)\psi_1(y)$, 其中 $\alpha(t)$ 是待定函数, $\psi_1(y) > 0$ 是在问题

$$\begin{cases} -\Delta\psi_1 = \lambda_1\psi_1 \quad y \in \Omega(0) \quad t > 0, \\ \psi_1 = 0, \quad y \in \partial\Omega(0) \quad t > 0 \end{cases} \quad (5)$$

中属于特征值 $\lambda_1 (> 0)$ 的特征函数. 将 $\varphi(y, t) =$

$\alpha(t)\psi_1(y)$ 代入(4)式, 再根据(5)式有

$$\alpha'(t)\psi_1(y) - d\Delta\psi_1/(\rho^2(t)) = -\dot{\rho}\alpha(t)\psi_1/\rho + r(t)\psi_1/R_0.$$

等式两边同时除 $\alpha(t)\psi_1$, 再从 0 到 T 对 t 积分可得

$$\int_0^T \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} dt + \int_0^T \frac{d}{\rho^2(t)} \lambda_1 dt = \int_0^T \frac{r(t)}{R_0} dt.$$

又 $\alpha(t)$ 以 T 为周期, 即

$$\int_0^T \frac{d}{\rho^2(t)} \lambda_1 dt = \frac{1}{R_0} \int_0^T r(t) dt.$$

从而得到主特征值的具体表达式, 而 $R_0(d, \rho)$ 的单调性可从表达式中直接看出.

3 模型正周期解的存在唯一性

定义1 称满足问题

$$\begin{cases} U_t - d\Delta U/(\rho^2(t)) = r(t)U(K-U)/ \\ (K+VU) - \dot{\rho}U/\rho \quad y \in \Omega(0) \quad t > 0, \\ U(y, t) = 0 \quad y \in \partial\Omega(0) \quad t > 0, \\ U(y, t+T) = U(y, t) \quad y \in \Omega(0) \quad t > 0 \end{cases} \quad (6)$$

的解 $U(y, t)$ 是对应于问题(3)的周期解.

为了研究问题(3)解的长时间性态, 下面讨论问题(6)正周期解的相关性质.

定理1 设 $r(t), \rho(t)$ 是 T -周期光滑正函数, $-1 < V < 0$, 则当 $R_0 > 1$ 时, 问题(3)存在唯一的正周期解 $U^*(y, t)$, 该周期解对小初值是渐近稳定的; 当 $R_0 < 1$ 时, 问题(3)的平凡解 $U^A(y, t) \equiv 0$ 全局渐近稳定.

证 当 $R_0 < 1$ 时, 显然问题(3)只有平凡解, 类似于文献[11]中定理 28.1, 该平凡解是渐近稳定的.

当 $R_0 > 1$ 时, 取 $\underline{U} = \varepsilon\varphi$, 其中 $0 < \varepsilon < \min_{t \in [0, T]} K(R_0 - 1)/(\rho_0\varphi)$, 则有

$$\underline{U}_t - d\Delta\underline{U}/(\rho^2(t)) - r(t)\underline{U}(K(t) - \underline{U})/(K(t) + V\underline{U}) + \dot{\rho}\underline{U}/\rho < 0.$$

从而 \underline{U} 是问题(6)的一个下解. 注意到, 广义 Logistic 模型不同于经典的 Logistic 模型, 后者容易构造上解, 而前者可能发生爆破. 下面令 $\bar{U} = K^* - \delta$, 选取 δ 充分小, 使得

$$\bar{U}_t - d\Delta\bar{U}/(\rho^2(t)) - r(t)\bar{U}(K - \bar{U})/(K + V\bar{U}) + \dot{\rho}\bar{U}/\rho > 0.$$

从而 \bar{U} 是问题(6)的一个上解, 所以问题(6)至少存在 1 个正周期解. 又令 $f(U) = r(t)U(K(t) - U)/(K(t) + VU) - \dot{\rho}U/\rho$, 注意到 $\partial(f(U)/U)/\partial U <$

0, 故问题 (3) 存在唯一的正周期解.

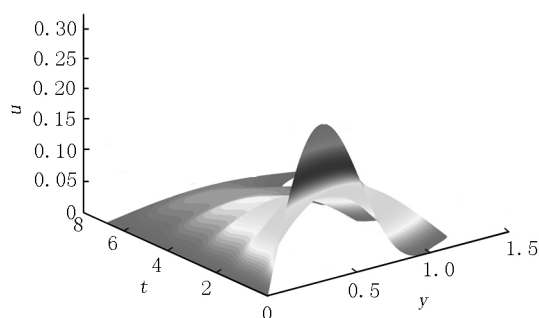
若非负非平凡初值 $u_0(y) < K^*$, 则可以找到 $t_0 > 0$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, 使得 $\varepsilon\varphi \leq v(y, t_0) \leq K^* - \delta$, 于是由迭代法可知周期解对小初值是渐近稳定的, 定理 1 证毕.

定理 2 设 $r(t)$, $K(t)$, $\rho(t)$ 是 T -周期光滑正函数, $-1 < V < 0$, 初值 $u_0(y) < K^*$. 则存在常数 $D > 0$, 使得

(i) 当 $d \in (0, D)$ 时, 问题 (3) 存在唯一的全球渐近稳定的正周期解 $U^*(y, t)$;

(ii) 当 $d \in (D, +\infty)$ 时, 问题 (3) 的平凡周期解 $U^A(y, t) \equiv 0$ 全局渐近稳定.

证 由 R_0 的表达式可知 $R_0 = 1$ 当且仅当 $d = \int_0^T r(t) dt / (\lambda_1 \int_0^T dt / \rho^2(t))$. 取 $D = \int_0^T r(t) dt / (\lambda_1 \cdot \int_0^T dt / \rho^2(t))$.



(a) 立体图

当 $d \in (D, +\infty)$ 时 $R_0 < 1$; 当 $d \in (0, D)$ 时, $R_0 > 1$, 且在小初值以及 $-1 < V < 0$ 的条件下, 由定理 1 直接证得.

注 1 假设环境的边沿不适合生存, 则根据定理 2 可知, 当扩散系数小于临界值 D 时, 预测种群可以持续生存; 当扩散系数大于临界值 D 时, 该种群密度就会趋于 0, 最终走向灭亡.

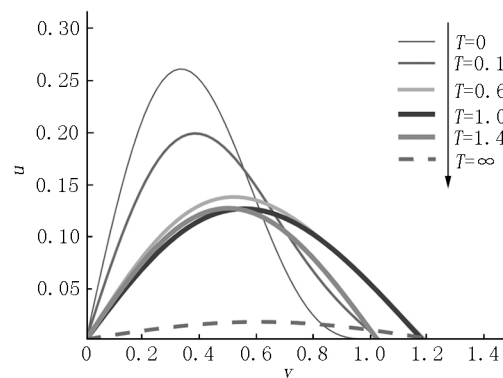
4 数值模拟和讨论

本部分通过模拟说明上面的理论结果. 首先取定一些参数: $d = 0.1$, $V = -0.2$, $k = 2$, $\rho(t) = e^{0.1(1-\cos 4t)}$, $\Omega(0) = (0, 1)$.

例 1 选取 $r = 0.5$, 此时

$$R_0 = \int_0^T r(t) dt / \int_0^T \frac{d\lambda_1}{\rho^2(t)} dt = \frac{5}{\pi^2 T} \int_0^T \rho^{-2}(t) dt < 1.$$

由定理 1 知, 对于任何非负初值, 解总是退化到平凡解. 图 1 选取初值 $u = 0.2\sin(\pi x) + 0.1\sin(2\pi x)$, 图形表明区域周期性变化, 密度最终收敛于 0.



(b) 截面图

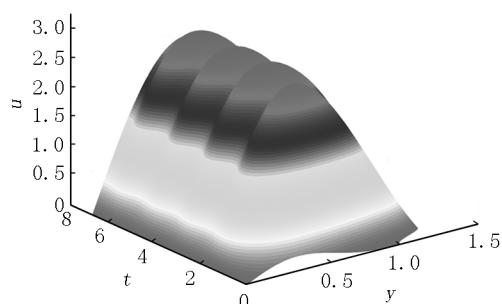
图 1 当 $R_0 < 1$ 时, 解逐渐趋于 0

例 2 选取 $r = 5$, 此时

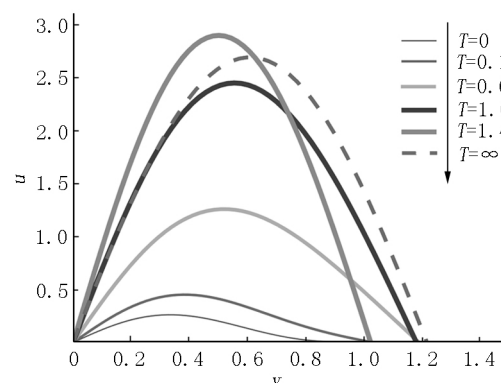
$$R_0 = \int_0^T r dt / \int_0^T \frac{d\lambda_1}{\rho^2(t)} dt = \frac{50}{\pi^2 T} \int_0^T \rho^{-2}(t) dt > 1.$$

由定理 1 知, 对于小初值解是渐近稳定于 1 个

正周期解. 图 2 选取例 1 中的初值, 结果表明区域周期性变化, 密度最终稳定于一个正解. 而对于大的初值, 如在图 3 中选取 $u = 8\sin(\pi x) + 6\sin(2\pi x)$, 解随着时间的增大而增加, 最终发生爆破.

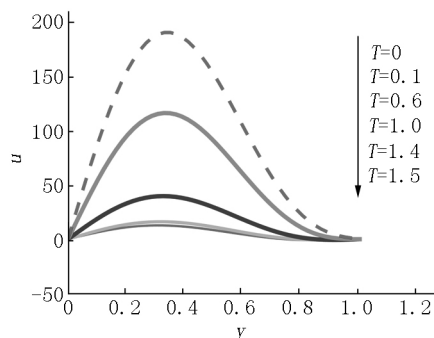


(a) 立体图



(b) 截面图

图 2 当 $R_0 > 1$ 时, 取小初值 ($u_0(y) < K^*$), 解逐渐呈现周期震荡

图3 当 $R_0 > 1$ 时,取大初值,解发生爆破

5 区域演化对物种生存的影响

若区域是固定的,则 $\Omega(t) = \Omega(0)$, 即 $\rho(t) \equiv 1$, 将问题(3)中的 $\rho(t)$ 以 1 代替,即考虑广义 Logistic 反应扩散模型

$$\begin{cases} \bar{u}_t - d\Delta \bar{u} = r(t) \bar{u} (K - \bar{u}) / (K + V\bar{u}), \\ y \in \Omega(0) \quad t > 0, \\ \bar{u}(y, t) = 0 \quad y \in \partial\Omega(0) \quad t > 0, \\ \bar{u}(y, t+T) = \bar{u}(y, t) \quad y \in \Omega(0) \quad t \geq 0. \end{cases} \quad (7)$$

同理,对上述问题进行线性化,考虑问题(7)的特征值问题

$$\begin{cases} \varphi_t - d\Delta \varphi = r(t) \varphi / R_0^* \quad y \in \Omega(0) \quad t > 0, \\ \varphi(y, t) = 0, \quad y \in \partial\Omega(0) \quad t > 0, \\ \varphi(y, t+T) = \varphi(y, t) \quad y \in \Omega(0) \quad t \geq 0. \end{cases}$$

由引理 1 知 R_0^* 可表示为

$$R_0^* = \int_0^T r(t) dt / (\lambda_1 \int_0^T dt).$$

与定理 2 一样,定理 3 给出问题(7)在固定区域 $\Omega(0)$ 上相应的全局动力学性态.

定理 3 设 $r(t)$ 是 T -周期光滑正函数, $-1 < V < 0$, 初值 $u_0(y) < K^*$, 则存在常数 $D^* > 0$, 使得

(i) 当 $d \in (0, D^*)$ 时,问题(7)存在唯一的全局渐近稳定的正周期解 $U^*(y, t)$;

(ii) 当 $d \in (D^*, +\infty)$ 时,问题(7)的平凡周期解 $U^A(y, t) \equiv 0$ 全局渐近稳定.

证 显然 $R_0^* = 1$ 当且仅当 $\int_0^T r(t) dt = \lambda_1 T$,

故取 $D^* = \int_0^T r(t) dt / (\lambda_1 T)$. 由 $d \in (0, D^*)$ 得 $R_0^* > 1$,

根据定理 1,问题(7)存在唯一的全局渐近稳定的正周期解, (i) 得证. 同理可证 (ii).

通过以下 2 个定理来比较固定区域和周期演化区域阈值的异同.

定理 4 设 $r(t)$ 、 $\rho(t)$ 是 T -周期光滑正函数,

$-1 < V < 0$, 初值 $u_0(y) < K^*$,

(i) 若 $\frac{1}{T} \int_0^T dt / \rho^2(t) = 1$, 则 $R_0 = R_0^*$;

(ii) 若 $\frac{1}{T} \int_0^T dt / \rho^2(t) < 1$, 则 $R_0 > R_0^*$;

(iii) 若 $\frac{1}{T} \int_0^T dt / \rho^2(t) > 1$, 则 $R_0 < R_0^*$.

定理 5 设 $r(t)$ 、 $\rho(t)$ 是 T -周期光滑正函数, $-1 < V < 0$, 初值 $u_0(y) < K^*$,

(i) 若 $\frac{1}{T} \int_0^T dt / \rho^2(t) = 1$, 则 $D = D^*$;

(ii) 若 $\frac{1}{T} \int_0^T dt / \rho^2(t) < 1$, 则 $D < D^*$;

(iii) 若 $\frac{1}{T} \int_0^T dt / \rho^2(t) > 1$, 则 $D > D^*$.

注 2 区域演化对物种产生影响的生物学解释. 令 $\bar{\rho}^{-2} = \frac{1}{T} \int_0^T dt / \rho^2(t)$, 其中 $\rho(t)$ 表示区域演化

率,由定理 5 和注 1 可知 $\bar{\rho}^{-2}$ 是一个阈值,该值对物种在周期演化区域上的生存或死亡产生影响. 假设 $-1 < V < 0$, $u_0(y) < K^*$, 下面给出具体说明:

(i) 若 $\bar{\rho}^{-2} > 1$, 即 $D > D^*$, 则物种要在演化的栖息地上生存,就必须减少其扩散,这说明当阈值大于 1 时,固定区域比演化区域更有利于物种的生存;

(ii) 若 $\bar{\rho}^{-2} < 1$, 即 $D < D^*$, 则与固定区域相比,在演化区域上的物种可以在更大的扩散率下存活,这说明当阈值小于 1 时,固定区域更不利于物种生存;

(iii) 若 $\bar{\rho}^{-2} = 1$, 即 $D = D^*$, 则固定区域和演化区域对物种生存产生的影响是一样的.

6 参考文献

- [1] Freedman H I. Deterministic mathematical models in population ecology [M]. New York: Marcel Dekker Incorporated, 1980.
- [2] 杨琪瑜. 单种群生长的广义 Logistic 模型中参数的一种估值方法 [J]. 生物数学学报, 1997, 12(4): 316-320.
- [3] 王寿松. 单种群生长的广义 Logistic 模型 [J]. 生物数学学报, 1990, 7(1): 23-27.
- [4] Lin Ke, Mu Chunlai, Zhong Hua. A blow-up result for a quasilinear chemotaxis system with logistic source in higher dimensions [J]. J Math Anal Appl 2018, 464(1): 435-455.
- [5] Lin Ke, Mu Chunlai. Global dynamics in a fully parabolic chemotaxis system with logistic source [J]. Discrete and

- Continuous Dynamical Systems 2016 36(9):5025-5046.
- [6] Viglialoro G. Very weak global solutions to a parabolic-parabolic chemotaxis-system with logistic source [J]. J Math Anal Appl 2016 439(1):197-212.
- [7] Liu Ling ,Zheng Jiashan. Global existence and boundedness of solution of a parabolic-parabolic-ode chemotaxis-haptotaxis model with (generalized) logistic source [J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems-B ,2019 ,24(7):3357-3377.
- [8] Tao Youshan. Global existence of classical solutions to a combined chemotaxis-haptotaxis model with logistic source [J]. J Math Anal Appl 2009 354(1):60-69.
- [9] Tello J I ,Winkler M. A chemotaxis system with logistic source [J]. Communications in Partial Differential Equations 2007 32(6):849-877.
- [10] Du Yihong ,Lin Zhigui. Spreading-vanishing dichotomy in the diffusive logistic model with a free boundary [J]. SI-AM Journal on Mathematical Analysis 2010 42(1):377-405.
- [11] 林支桂. 数学生态学导引 [M]. 北京: 科学出版社, 2013: 145-148.
- [12] 唐秋林. 增长区域上具扩散的 Logistic 方程解的渐近性 [D]. 扬州: 扬州大学 2011.
- [13] Jiang Danhua ,Wang Zhicheng. The diffusive logistic equation on periodically evolving domains [J]. J Math Anal Appl 2018 458(1):93-111.
- [14] 孙素梅, 孟悦, 朱家桢, 等. 周期演化区域上的 Logistic 捕获模型的动力学分析 [J]. 生物数学学报 2018(1):84-90.
- [15] Hess P. Periodic-parabolic boundary value problems and positivity [M]. Halow ,UK: Longman Scientific and Technical ,1991.
- [16] Kato T. Perturbation theory for linear operators [M]. New York: Springer-Verlag ,1966.

The Diffusive Characteristics of the Generalized Logistic Model on an Evolving Domain

XU Haiyan¹ ,GE Jing² ,LIN Zhigui^{1*}

(1. School of Mathematical Science ,Yangzhou University ,Yangzhou Jiangshu 225002 ,China;

2. School of Mathematics and Statistics ,Huaiyin Normal University ,Huaian Jiangshu 223300 ,China)

Abstract: The generalized logistic reaction diffusion model ,which describes diffusion of species on a periodic evolving domain ,is discussed. Firstly ,by assuming that the evolving domain is isotropic ,the model is transformed into the reaction diffusion problem in a fixed domain. Secondly ,the asymptotic behavior of positive periodic solutions is presented by utilizing eigenvalue problem as well as upper and lower solution methods. Lastly ,through the analysis of the threshold ,the impacts of regional evolution on survival of species are expressed.

Key words: diffusive model; generalized logistic equation; periodic evolution; asymptotic behavior

(责任编辑: 曾剑锋)