

文章编号: 1000-5862(2020)04-0366-07

中微子振荡中的几何相位和 CP 违反

江春宇¹, 曾高荣¹, 黄永畅², 王资生^{1*}

(1. 江西师范大学物理与通信电子学院, 江西 南昌 330022; 2. 北京工业大学理论物理研究所, 北京 100124)

摘要: 该文首先探讨了模型化的中微子在物质中振荡和混合的分析解, 然后让中微子的 CP 违反相位旋转 360° 获得中微子振荡和混合的几何相位, 发现几何相位随能量的振动具有非对称性几何结构. 几何相位是描述中微子传播过程中内禀属性, 故这种非对称结构起源于中微子振荡和混合的 CP 违反现象. 因此, 几何相位为中微子传播过程中的 CP 违反现象提供了线索.

关键词: 中微子; 中微子振荡; 几何相位; 几何结构; CP 违反

中图分类号: O 572.31 文献标志码: A DOI: 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2020.04.07

0 引言

中微子振荡和混合是研究标准模型之外的新物理的重要途径, 也是当前物理学前沿的热点课题之一^[1-4]. 使用物理整体拓扑信息为探索中微子振荡和混合原理提供了一个线索.

在标准模型中, 3 味中微子 (ν_e, ν_μ, ν_τ) 的静止质量为 0, 并且遵循轻子数守恒, 不能相互转变和混合^[5-6]. 但是许多实验发现, 不同味的中微子之间可以相互转变, 这就是中微子振荡现象.

2012 年, 大亚湾中微子实验证实了中微子第 3 种振荡模式的存在^[7-8]. 3 味中微子在真空中的振荡和 2 味中微子在物质中的振荡已经有许多学者进行了详细的研究^[9]. 但 3 味中微子比 2 味中微子在物质中振荡和混合的过程要复杂得多, 在这种情况下, 每味中微子在演化过程中均可能同其他 2 种中微子发生混合并同物质相互作用, 中微子在物质中的混合矩阵涉及众多参数, 演化方程包含多个相互作用的项, 因此许多研究者采用模型化理论求其近似解.

目前 CP 破缺只在 $K_0 - \bar{K}_0$ 混合^[10] 中被测量到. 3 代夸克的混合导致强子衰变 CP 破坏, 而且在混合矩阵中有 3 个混合角和 1 个与 CP 破坏有关的相角^[11]. 因此, 在 3 味中微子振荡和混合过程中, 混合矩阵有 3 个混合角和 1 个与 CP 破坏有关的相角. 目前, 研究中微子在振荡和混合时是否存在 CP 破坏以

及怎样确定 CP 破坏的参数是物理学上的一个重大课题.

众所周知, 鉴于中微子的质量非常小, 因此解决 Majorana 粒子问题的传统方法是无中微子双 β 衰变实验 (NDBD)^[12]. 在物理中, 中微子的跃迁概率可以观察到 CP 破坏现象, 不幸的是, 建立这样的实验设施非常复杂, 而且价格昂贵.

另一个可以观察到 CP 破坏现象是中微子混合和振荡过程中的几何相位. 为了研究长基线的中微子振荡和混合情况, 该文给出了模型化的 3 味中微子在物质势下演化方程和分析解, 并按照超对称模型所预言的中微子振荡和混合参数让 CP 违反相位旋转 360° , 计算了中微子振荡的几何相位^[13-14], 这提供了 CP 破坏信息.

1 中微子振荡和混合

中微子在传播的过程中会和周围物质相互作用, 产生物质效应. 人们常用有效哈密顿来描述该过程演化, 即

$$H(x) = H_0 + H_m(x) + H_{\text{NSI}}(x),$$

其中 H_0 为中微子的真空哈密顿量, $H_m(x)$ 为标准物质势的哈密顿量, $H_{\text{NSI}}(x)$ 为非标准物质势的哈密顿量.

真空哈密顿量为

$$H_0 = \frac{U}{2E} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta m_{21}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta m_{31}^2 \end{pmatrix} U^\dagger,$$

收稿日期: 2019-12-17

基金项目: 国家自然科学基金(11565015)和江西省教育厅科技课题(GJJ160304)资助项目.

通信作者: 王资生(1963-), 男, 江西上饶人, 教授, 博士, 主要从事理论物理的研究. E-mail: zishengwang@yahoo.com

其中 E 为中微子的能量 $\Delta m_{ij}^2 (i, j = 1, 2, 3)$ 为中微子的质量平方差(由实验确定),也是描述中微子振荡和混合的相关参数 $m_i (i = 1, 2, 3)$ 是中微子 (ν_e, ν_μ, ν_τ) 的质量. U 是 3 个中微子味的混合矩阵,它是一个 3×3 的幺正矩阵,可以写为 $U = O_{23} I_\delta O_{13} I_\delta^+ O_{12}$ [2-4], 其中 $O_{ij} (i, j = 1, 2, 3)$ 表示具有旋转角 $\theta_{ij} (i, j = 1, 2, 3)$ 在 ij 平面的旋转矩阵,可以表示为

$$O_{12} = \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, O_{13} = \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13} & 0 & c_{13} \end{pmatrix},$$

$$O_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix},$$

这里定义 $s_{ij} \equiv \sin \theta_{ij}$ 和 $c_{ij} \equiv \cos \theta_{ij}$, θ_{ij} 是中微子在振荡过程中的混合角函数. 而 $I_\delta \equiv \text{diag}(1, 1, e^{i\delta})$, δ 是轻子的 Dirac CP 违反相位. 因此,混合矩阵可以写成

$$U = O_{23} I_\delta O_{13} I_\delta^+ O_{12} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}$$

若中微子是 Majorana 粒子,则在混合矩阵 U 中有 2 个额外的 CP 违反相位. 但是不论在真空中还是在物质中,这 2 个 Majorana CP 违反相位都与中微子振荡不相关 [2, 14].

标准物质势的哈密顿量为

$$H_m(x) = \sqrt{2} G_F N_e(x) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

其中 $\sqrt{2} G_F N_e(x) = 7.6 \times 10^{-14} Y_e \rho \text{ eV}$, G_F 为费米弱耦合常数, $N_e(x)$ 为物质中的电子数密度. 为了简化计算, $N_e(x)$ 在中微子传播过程中取为常数. ρ 是物质密度, Y_e 是相关物质的中微子的电子数密度,这里取 $Y_e \approx 0.5$ [2-3].

非标准物质势的哈密顿量将被模型化为

$$H_{\text{NSI}}(x) = \sqrt{2} G_F N_e(x) \begin{pmatrix} \xi_{ee} & \xi_{e\mu} & \xi_{e\tau} \\ \xi_{e\mu}^* & \xi_{\mu\mu} & \xi_{\mu\tau} \\ \xi_{e\tau}^* & \xi_{\mu\tau}^* & \xi_{\tau\tau} \end{pmatrix},$$

其中复常数 $\xi_{\alpha\beta} (\alpha, \beta = e, \mu, \tau)$ 是非标准相互作用 (NSI) [15-16] 参数, 对角矩阵元为实常数. 设 3 个中微子旋量为 $\psi = (\psi_{\nu_e}, \psi_{\nu_\mu}, \psi_{\nu_\tau})^T$, 演化矩阵所满足的薛定谔方程可以写成

$$i d\psi(x)/dx = H(x) \psi(x), \quad (1)$$

由于标准物质势哈密顿量 H_m 可以围绕 2 ~ 3 平面

法线任意旋转, 矩阵的形式不变. 当波函数 $\psi(x)$ 在 2 ~ 3 平面法线旋转时, 可用幺正变换描写为 $(\psi_{\nu_e}, \tilde{\psi}_{\nu_\mu}, \tilde{\psi}_{\nu_\tau})^T = U_{23} (\psi_{\nu_e}, \psi_{\nu_\mu}, \psi_{\nu_\tau})^T$, 其中 $U_{23} = O_{23} I_\delta$.

在这个幺正变换下, 有效哈密顿变为

$$H(x) = \Delta_{31} \begin{pmatrix} s_{12}^2 c_{13}^2 \alpha + s_{13}^2 & s_{12} c_{12} c_{13} \alpha & s_{13} c_{13} (1 - s_{12}^2 \alpha) \\ s_{12} c_{12} c_{13} \alpha & c_{12}^2 \alpha & -s_{12} c_{12} s_{13} \alpha \\ s_{13} c_{13} (1 - s_{12}^2 \alpha) & -s_{12} c_{12} s_{13} \alpha & s_{12}^2 s_{13}^2 \alpha + c_{13}^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{\xi}_{ee} & \tilde{\xi}_{e\mu} & \tilde{\xi}_{e\tau} \\ \tilde{\xi}_{e\mu}^* & \tilde{\xi}_{\mu\mu} & \tilde{\xi}_{\mu\tau} \\ \tilde{\xi}_{e\tau}^* & \tilde{\xi}_{\mu\tau}^* & \tilde{\xi}_{\tau\tau} \end{pmatrix},$$

其中 $\Delta_{31} \equiv \Delta m_{31}^2 / (2E)$, $A \equiv \sqrt{2} G_F N_e(x) / \Delta_{31}$, $\alpha \equiv \Delta m_{21}^2 / \Delta_{31}^2$. 在计算中取 $\alpha = 0.03$.

按照这个幺正变换, 薛定谔方程 (1) 可变为

$$i d\tilde{\psi}(x)/dx = \tilde{H}(x) \tilde{\psi}(x).$$

变换后非标准相互作用 (NSI) 参数变为

$$\tilde{\xi}_{ee} = 1 + \xi_{ee}, \quad \tilde{\xi}_{e\mu} = \xi_{e\mu} c_{23} - \xi_{e\tau} s_{23}, \quad \tilde{\xi}_{e\tau} = (\xi_{e\mu} s_{23} + \xi_{e\tau} c_{23}) e^{i\delta},$$

$$\tilde{\xi}_{\mu\mu} = (\xi_{\mu\mu} c_{23}^2 + \xi_{\tau\tau} s_{23}^2) - 2s_{23} c_{23} \text{Re}(\xi_{\mu\tau}),$$

$$\tilde{\xi}_{\tau\tau} = (\xi_{\mu\mu} s_{23}^2 + \xi_{\tau\tau} c_{23}^2) + 2s_{23} c_{23} \text{Re}(\xi_{\mu\tau}),$$

$$\tilde{\xi}_{\mu\tau} = ((\xi_{\mu\tau} c_{23}^2 - \xi_{\mu\tau}^* s_{23}^2) + (\xi_{\mu\mu} - \xi_{\tau\tau}) s_{23} c_{23}) e^{i\delta}.$$

2 薛定谔方程的解

为了给出薛定谔方程的分析解, 首先计算有效哈密顿 $\tilde{H}(x)$ 的本征值 λ , 其特征方程为 $\det | \tilde{H}(x) - \lambda I | = 0$. 经过一些代数运算后求得能量本征值 λ 的方程为

$$\lambda^3 + c_2 \lambda^2 + c_1 \lambda + c_0 = 0, \quad (2)$$

特征方程的系数为

$$c_2 = -(a_{11} + a_{22} + a_{33} + \Delta_{31} A (\tilde{\xi}_{ee} + \tilde{\xi}_{\mu\mu} + \tilde{\xi}_{\tau\tau})),$$

$$c_1 = -a_{12}^2 - a_{13}^2 + a_{11} a_{22} - a_{23}^2 + a_{11} a_{33} + a_{22} a_{33} + \Delta_{31} A (a_{22} \tilde{\xi}_{ee} + a_{33} \tilde{\xi}_{ee} + a_{11} \tilde{\xi}_{\mu\mu} + a_{33} \tilde{\xi}_{\mu\mu} + a_{11} \tilde{\xi}_{\tau\tau} + a_{22} \tilde{\xi}_{\mu\mu} - a_{12} \tilde{\xi}_{e\mu} - a_{12} \tilde{\xi}_{e\mu}^* - a_{13} \tilde{\xi}_{e\tau} - a_{13} \tilde{\xi}_{e\tau}^* - a_{23} \tilde{\xi}_{\mu\tau} - a_{23} \tilde{\xi}_{\mu\tau}^*) + (\Delta_{31} A)^2 (\tilde{\xi}_{ee} \tilde{\xi}_{\mu\mu} + B^2 \tilde{\xi}_{ee} \tilde{\xi}_{\tau\tau} + B^2 \tilde{\xi}_{\mu\mu} \tilde{\xi}_{\tau\tau} - B^2 \tilde{\xi}_{e\mu} \tilde{\xi}_{e\mu}^* - B^2 \tilde{\xi}_{e\tau} \tilde{\xi}_{e\tau}^* - B^2 \tilde{\xi}_{\mu\tau} \tilde{\xi}_{\mu\tau}^*),$$

$$c_0 = a_{13}^2 a_{22} - 2a_{12} a_{13} a_{23} + a_{11} a_{23}^2 + a_{12}^2 a_{33} - a_{11} a_{22} a_{33} + \Delta_{31} A (a_{23}^2 \tilde{\xi}_{ee} - a_{22} a_{33} \tilde{\xi}_{ee} + a_{13}^2 \tilde{\xi}_{\mu\mu} - a_{11} a_{33} \tilde{\xi}_{\mu\mu} +$$

$$\begin{aligned}
 & a_{12}^2 \tilde{\xi}_{\tau\tau} - a_{11} a_{22} \tilde{\xi}_{\tau\tau} - a_{13} a_{23} \tilde{\xi}_{e\mu} - a_{13} a_{23} \tilde{\xi}_{e\mu} - a_{13} a_{23} \tilde{\xi}_{e\mu}^* + \\
 & a_{12} a_{33} \tilde{\xi}_{e\mu} + a_{12} a_{33} \tilde{\xi}_{e\mu}^* + a_{13} a_{22} \tilde{\xi}_{e\tau} + a_{13} a_{22} \tilde{\xi}_{e\tau}^* - a_{12} a_{23} \tilde{\xi}_{e\tau} - \\
 & a_{12} a_{23} \tilde{\xi}_{e\tau}^* - a_{12} a_{13} \tilde{\xi}_{\mu\tau} - a_{12} a_{13} \tilde{\xi}_{\mu\tau}^* + a_{11} a_{23} \tilde{\xi}_{\mu\tau} + a_{11} a_{23} \tilde{\xi}_{\mu\tau}^* + \\
 & (\Delta_{31} A)^2 (-a_{11} \tilde{\xi}_{\mu\mu} \tilde{\xi}_{\tau\tau} - a_{22} \tilde{\xi}_{ee} \tilde{\xi}_{\tau\tau} - a_{33} \tilde{\xi}_{ee} \tilde{\xi}_{\mu\mu} + a_{33} \tilde{\xi}_{e\mu} \tilde{\xi}_{e\mu}^* + \\
 & a_{22} \tilde{\xi}_{e\tau} \tilde{\xi}_{e\tau}^* + a_{11} \tilde{\xi}_{\mu\tau} \tilde{\xi}_{\mu\tau}^* + a_{13} \tilde{\xi}_{e\tau} \tilde{\xi}_{\mu\mu} + a_{13} \tilde{\xi}_{\mu\mu} \tilde{\xi}_{e\tau}^* + \\
 & a_{23} \tilde{\xi}_{ee} \tilde{\xi}_{\mu\tau} + a_{23} \tilde{\xi}_{ee} \tilde{\xi}_{\mu\tau}^* - a_{13} \tilde{\xi}_{e\mu} \tilde{\xi}_{\mu\tau} - a_{13} \tilde{\xi}_{e\mu} \tilde{\xi}_{\mu\tau}^* + a_{12} \tilde{\xi}_{e\mu} \tilde{\xi}_{\tau\tau} + \\
 & a_{12} \tilde{\xi}_{\tau\tau} \tilde{\xi}_{e\mu}^* - a_{23} \tilde{\xi}_{e\tau} \tilde{\xi}_{e\mu} - a_{23} \tilde{\xi}_{e\mu} \tilde{\xi}_{e\tau} - a_{12} \tilde{\xi}_{\mu\tau} \tilde{\xi}_{e\tau} - \\
 & a_{12} \tilde{\xi}_{e\tau} \tilde{\xi}_{\mu\tau}^*) + (\Delta_{31} A)^3 (-\tilde{\xi}_{ee} \tilde{\xi}_{\mu\mu} \tilde{\xi}_{\tau\tau} + \tilde{\xi}_{e\tau} \tilde{\xi}_{\mu\mu} \tilde{\xi}_{e\tau}^* + \\
 & \tilde{\xi}_{ee} \tilde{\xi}_{\mu\tau} \tilde{\xi}_{\mu\tau}^* + \tilde{\xi}_{e\mu} \tilde{\xi}_{\tau\tau} \tilde{\xi}_{e\mu}^* - \tilde{\xi}_{e\mu} \tilde{\xi}_{\mu\tau} \tilde{\xi}_{e\tau}^* - \tilde{\xi}_{e\tau} \tilde{\xi}_{e\mu} \tilde{\xi}_{\mu\tau}^*), \\
 & \text{其中 } a_{11} = \Delta_{31} (s_{12}^2 c_{13}^2 \alpha + s_{13}^2) \quad \mu_{22} = \Delta_{31} c_{12}^2 \alpha \quad \mu_{33} = \\
 & \Delta_{31} (s_{12}^2 s_{13}^2 \alpha + c_{13}^2) \quad \mu_{12} = \Delta_{31} s_{12} c_{12} c_{13} \alpha \quad \mu_{13} = \Delta_{31} s_{13} \cdot \\
 & c_{13} (1 - s_{12}^2 \alpha) \quad \mu_{23} = \Delta_{31} (-s_{12} c_{12} c_{13} \alpha).
 \end{aligned}$$

虽然哈密顿 $\tilde{H}(x)$ 有复数项,但发现系数 c_0, c_1 和 c_2 均为实数. 特征方程(2) 可给出严格解,其解为

$$\lambda_1 = -c_2/3 + (q_2 + (4q_1^3 + q_2^2)^{1/2})^{1/3} + (q_2 - (4q_1^3 + q_2^2)^{1/2})^{1/3},$$

$$\begin{aligned}
 \lambda_2 = & -c_2/3 + ((q_2 + (4q_1^3 + q_2^2)^{1/2})^{1/3} + (q_2 - \\
 & (4q_1^3 + q_2^2)^{1/2})^{1/3}) / (6 \times 2^{1/3}) + i(\sqrt{3}(q_2 + (4q_1^3 + \\
 & q_2^2)^{1/2})^{1/3} - (q_2 - (4q_1^3 + q_2^2)^{1/2})^{1/3}) / (6 \times 2^{1/3}),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lambda_3 = & -c_2/3 - ((q_2 + (4q_1^3 + q_2^2)^{1/2})^{1/3} + (q_2 - \\
 & (4q_1^3 + q_2^2)^{1/2})^{1/3}) / (6 \times 2^{1/3}) - i(\sqrt{3}(q_2 + (4q_1^3 + \\
 & q_2^2)^{1/2})^{1/3} - (q_2 - (4q_1^3 + q_2^2)^{1/2})^{1/3}) / (6 \times 2^{1/3}),
 \end{aligned}$$

其中 $q_1 = -c_2^2 + 3c_1$ $q_2 = -2c_2^3 + 9c_2c_1 - 27c_0$. 通过计算得出 $4q_1^3 + q_2^2 \leq 0$, 并且 $q_2 \leq 0$ 和 $|q_1| \leq |q_2^{2/3}| / 8$ ($q_1, q_2 \in \mathbf{R}$), 为使本征值 λ_a ($a = 1, 2, 3$) 为实值, 需将本征值改写为

$$\lambda = -\frac{c_2}{3} + \frac{2}{3} \sqrt{-q_1} \cos\left(\frac{1}{3} \arctan\left(\frac{1}{q_2} \sqrt{-4q_1^3 - q_2^2}\right)\right) \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
 \lambda_2 = & -\frac{c_2}{3} - \frac{1}{3} \sqrt{-q_1} \cos\left(\frac{1}{3} \arctan\left(\frac{1}{q_2} \sqrt{-4q_1^3 - q_2^2}\right)\right) - \\
 & \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{-q_1} \sin\left(\frac{1}{3} \arctan\left(\frac{1}{q_2} \sqrt{-4q_1^3 - q_2^2}\right)\right), \quad (4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lambda_3 = & -\frac{c_2}{3} - \frac{1}{3} \sqrt{-q_1} \cos\left(\frac{1}{3} \arctan\left(\frac{1}{q_2} \sqrt{-4q_1^3 - q_2^2}\right)\right) + \\
 & \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{-q_1} \sin\left(\frac{1}{3} \arctan\left(\frac{1}{q_2} \sqrt{-4q_1^3 - q_2^2}\right)\right). \quad (5)
 \end{aligned}$$

按照这些哈密顿 $\tilde{H}(x)$ 的本征值, 计算出 $\tilde{H}(x)$ 的本征态为

$$|\tilde{\psi}(x)\rangle = \begin{pmatrix} \chi_{1a} \\ \chi_{2a} \\ \chi_{3a} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

其中

$$\begin{aligned}
 \chi_{1a} = & \sum_{a=1}^3 (\lambda_a - \varphi_{33}) - ((\varphi_{22} - \lambda_a) \varphi_{31} - \varphi_{21} \varphi_{32}) + \\
 & \varphi_{32} ((\varphi_{22} - \lambda_a) \varphi_{31} - \varphi_{21} \varphi_{32})^2 - (\varphi_{33} - \lambda_a) \varphi_{21} + \\
 & \varphi_{31} \varphi_{32}^*, \quad (7)
 \end{aligned}$$

$$\chi_{2a} = \sum_{a=1}^3 \varphi_{31} ((\varphi_{33} - \lambda_a) \varphi_{21} - \varphi_{31} \varphi_{32}^*), \quad (8)$$

$$\chi_{3a} = \sum_{a=1}^3 \varphi_{31} ((\varphi_{22} - \lambda_a) \varphi_{31} - \varphi_{21} \varphi_{32}), \quad (9)$$

其中 $\varphi_{21} = a_{21} + \Delta_{31} A \tilde{\xi}_{e\mu}^*$ $\varphi_{22} = a_{21} + \Delta_{31} A \tilde{\xi}_{\mu\mu}$ $\varphi_{31} = a_{31} + \Delta_{31} A \tilde{\xi}_{e\tau}^*$ $\varphi_{32} = a_{32} + \Delta_{31} A \tilde{\xi}_{\mu\tau}^*$ $\varphi_{33} = a_{33} + \Delta_{31} A \tilde{\xi}_{\tau\tau}$.

按照这些本征值和本征态, 可以构造薛定谔方程通解

$$\psi(\delta, t) = \frac{1}{N} \sum_{a=1}^3 \begin{pmatrix} \chi_{1a}(\delta) \\ \chi_{2a}(\delta) \\ \chi_{3a}(\delta) \end{pmatrix} e^{-i\lambda_a t/\hbar}, \quad (10)$$

其中 N 为归一化常数, 且

$N = \sum_{a=1}^3 (|C_a^2| (|\chi_{1a}|^2 + |\chi_{2a}|^2 + |\chi_{3a}|^2))^{1/2}$, C_a 是中微子在振荡和混合过程中的振幅, 由初始条件决定. 为了有效地探讨在中微子传播过程中 CP 违反, 假设初始中微子是 μ 子味中微子, 即初始态为

$$\tilde{\psi}_\mu(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_{23} & \sin \theta_{23} \\ 0 & -\sin \theta_{23} & \cos \theta_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c_{23} \\ -s_{23} \end{pmatrix}$$

令在方程(10) 中 $t = 0$, 得到波函数的系数为

$$\begin{aligned}
 C_1 = & ((\chi_{13}\chi_{22} - \chi_{12}\chi_{23}) s_{23} + (\chi_{13}\chi_{32} - \chi_{33}\chi_{12}) c_{23}) / \\
 & (\chi_{11}\chi_{22}\chi_{33} + \chi_{13}\chi_{21}\chi_{32} + \chi_{12}\chi_{23}\chi_{31} - \chi_{13}\chi_{31}\chi_{22} - \chi_{23}\chi_{32}\chi_{11} - \\
 & \chi_{21}\chi_{12}\chi_{33}), \quad (11)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_2 = & ((\chi_{11}\chi_{23} - \chi_{21}\chi_{13}) s_{23} + (\chi_{11}\chi_{33} - \chi_{13}\chi_{31}) c_{23}) / \\
 & (\chi_{11}\chi_{22}\chi_{33} + \chi_{13}\chi_{21}\chi_{32} + \chi_{12}\chi_{23}\chi_{31} - \chi_{13}\chi_{31}\chi_{22} - \chi_{23}\chi_{32}\chi_{11} - \\
 & \chi_{21}\chi_{12}\chi_{33}), \quad (12)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_3 = & ((\chi_{21}\chi_{12} - \chi_{11}\chi_{22}) s_{23} + (\chi_{12}\chi_{31} - \chi_{11}\chi_{32}) c_{23}) / \\
 & (\chi_{11}\chi_{22}\chi_{33} + \chi_{13}\chi_{21}\chi_{32} + \chi_{12}\chi_{23}\chi_{31} - \chi_{13}\chi_{31}\chi_{22} - \chi_{23}\chi_{32}\chi_{11} - \\
 & \chi_{21}\chi_{12}\chi_{33}). \quad (13)
 \end{aligned}$$

3 中微子在振荡过程中的几何相位

在系统的纯态定域规范变换下 $|\psi(\eta)\rangle \rightarrow$

$$|\psi(\eta)\rangle = e^{-\theta(\eta)} |\psi(\eta)\rangle,$$

所以量子体系的 1 次微分如下:

$$\beta = -\text{Im} \langle \psi(\eta) | \partial \psi(\eta) / \eta_i \rangle d\eta_i \rightarrow \beta' =$$

$$\begin{aligned}
 & -\text{Im} \langle \psi(\eta) | \partial\psi(\eta) / \eta_i \rangle d\eta_i = -\text{Im} \langle e^{-i\theta(\eta)} \psi(\eta) | - \\
 & i\partial\theta(\eta) e^{-i\theta(\eta)} \psi(\eta) / \partial\eta_i + e^{-i\theta(\eta)} \partial\psi(\eta) \psi(\eta) / \eta_i \rangle = \\
 & -\text{Im} \langle \psi(\eta) | \partial\psi(\eta) / \eta_i \rangle d\eta_i + \partial\theta(\eta) d\eta_i / \partial\eta_i = \beta + \\
 & d\theta, \tag{14}
 \end{aligned}$$

其中称 β 为体系的 1 次微分. 对 (14) 式再进行 1 次微分可得

$$\begin{aligned}
 \sigma = d\beta = \partial\beta_j(\eta) / \partial\eta_i d\eta_i \wedge d\eta_j &= -\text{Im} \langle \partial\psi(\eta) / \\
 \partial\eta_i \partial\psi(\eta) \partial\eta_j \rangle d\eta_i \wedge d\eta_j - \text{Im} \langle d\eta_i \psi(\eta) \partial^2\psi(\eta) / \\
 (\partial\eta_i \partial\eta_j) \rangle d\eta_i \wedge d\eta_j &= -\text{Im} \langle \partial\psi(\eta) / \partial\eta_i, \partial\psi(\eta) / \\
 \partial\eta_j \rangle d\eta_i \wedge d\eta_j &= \sigma_{ij} d\eta_i \wedge d\eta_j,
 \end{aligned}$$

其中称 σ 为体系的 2 次微分, $\sigma_{ij} = -\text{Im} \langle \partial\psi(\eta) / \partial\eta_i, \partial\psi(\eta) / \partial\eta_j \rangle$. 经规范变换, 量子系统 2 次微分状态不会发生变化, 即

$$\sigma \rightarrow \sigma' = d\beta + d^2\theta = d\beta = \sigma.$$

由此可得 Berry 几何相位为

$$\gamma_g(C = \partial S) = \oint_{C=\partial S} \beta = \int_S \sigma. \tag{15}$$

从 (15) 式可以发现系统的演化路径是一条闭合曲线, Berry 几何相位与该闭合路径的面积成正比, 不受演化路径的影响. 1983 年 B. Simon^[17] 发现了 Berry 几何相代表的是 Hermit 线丛上的 Holonomy. 因此几何相位具有物理系统的整体拓扑性质, 能够深刻描述物理系统的内禀属性. 为了探讨中微子在物质中振荡和混合的 CP 破坏现象^[18-20]. 人们可以通过分析中微子振荡和混合的几何相位.

不同于其他中微子振荡和混合几何相位计算, 本文把中微子的 Dirac CP 违反相位 δ 作为参数旋转 360° , 这样可以有效地研究中微子振荡和混合过程的 CP 违反现象. 这样 Berry 相位可以表示为

$$\begin{aligned}
 \gamma &= \text{Im} \left(\oint_{\delta} \langle \tilde{\psi}(\delta) | \partial / \partial \delta | \tilde{\psi}(\delta) \rangle d\delta \right) = \\
 & \sum_{a=1}^3 \sum_{b=1}^3 \text{Im} \left(\int_{\delta} \frac{C_a^*}{N} \chi_{ia}^* e^{i\lambda_a t / \hbar} \frac{\partial}{\partial \delta} \left(\frac{C_b}{N} \chi_{ib} e^{-i\lambda_b t / \hbar} d\delta \right) \right), \tag{16}
 \end{aligned}$$

这个 Berry 相位可以改写成为以 δ 围成的面积 S , 即

$$\gamma = \text{Im} \left(\int_S \vec{\nabla} \left(\langle \tilde{\psi}(\delta) | \partial / \partial \delta | \tilde{\psi}(\delta) \rangle \right) d\vec{S} \right).$$

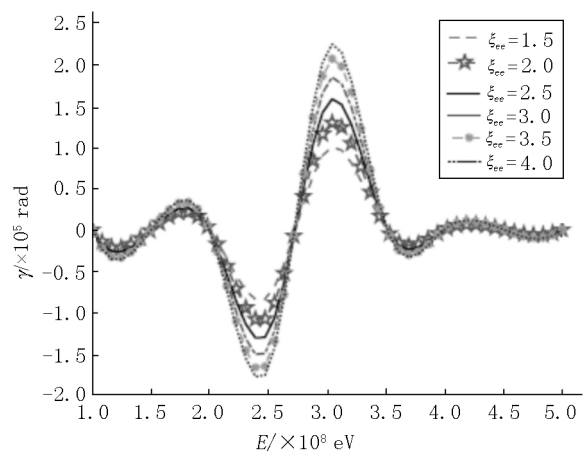
这个方程意味着中微子在振荡和混合的几何相位按照相角演化时, 其演化路径在希尔伯特 (Hilbert) 空间上的投影所围成的面积不变, 即具有强烈抗干扰能力, 所以描述了量子系统的拓扑整体性质.

将方程 (3) ~ (9) 式和 (11) ~ (13) 式代入方程 (16), 可以得到几何相位的确切表达式, 但是由于每项均与 Dirac CP 违反相位 δ 有关, 因此关系式非常复杂, 这样直接进行数值计算.

下面, 按照超对称模型预言中微子振荡和混合参数 (见表 1)^[15], 计算各种情况下中微子振荡和混合的几何相位随中微子能量的变化情况 (见图 1 ~ 图 9).

表 1 超对称模型预言的中微子振荡和混合参数

参数	值	参数	值
ξ_{ee}	2.5	$\xi_{\mu\tau}^*$	1.5 + i
$\xi_{\mu\mu}$	3.5	θ_{12}	2 π /11
$\xi_{\tau\tau}$	18	θ_{13}	π /13
ξ_{qe}	1.5 - i	θ_{23}	3 π /11
ξ_{qe}^*	1.5 + i	Δm_{21}^2	6.6 $\times 10^{-5}$ (eV ²)
$\xi_{e\tau}$	1.8 - 0.7i	Δm_{31}^2	2.2 $\times 10^{-3}$ (eV ²)
$\xi_{e\tau}^*$	1.8 + 0.7i	t	1.5 $\times 10^{-3}$ (eV ²)
$\xi_{\mu\tau}$	1.5 - i		



注: 实线所用的参数见表 1, 其他线的参数仅仅改变了 ξ_{ee} .

图 1 几何相位随能量变化的曲线

由图 1 可知, 随着 ξ_{ee} 增大, 在中微子振荡和混合过程中几何相位的振幅越大, 波峰和波谷的非对称性越大. 当 $0 \text{ eV} < E < 3 \times 10^8 \text{ eV}$ 时, 几何相位的振幅增大, 波峰和波谷的非对称性增大; 当 $E = 3 \times 10^8 \text{ eV}$ 时, 几何相位的振幅达到最大值; 当 $E > 3 \times 10^8 \text{ eV}$ 时, 几何相位的振幅开始减小, 波峰和波谷的非对称性减小.

由图 2 可知, $\xi_{\mu\mu}$ 越小, 中微子在振荡和混合过程中几何相位的振幅越大, 且波峰和波谷的非对称性越大. 当 $0 \text{ eV} < E < 3 \times 10^8 \text{ eV}$ 时, 几何相位的振幅增大, 波峰和波谷的非对称性增大; 当 $E = 3 \times 10^8 \text{ eV}$ 时, 几何相位的振幅达到最大值; 当 $E > 3 \times 10^8 \text{ eV}$ 时, 几何相位的振幅开始减小, 波峰和波谷的对称性逐渐恢复.

由图 3 可知, $\xi_{\tau\tau}$ 越大, 中微子在振荡和混合过程中几何相位的振幅越大, 且波峰波谷的非对称性越大. 随着能量的增大, 中微子在混合和振荡过程中的几何相位也随之改变, 当 $0 \text{ eV} < E < 3 \times 10^8 \text{ eV}$ 时, 几何相位的振幅逐渐增大, 波峰与波谷的非对称

性越来越明显,当 $E > 3 \times 10^8$ eV 时,几何相位的振幅开始减小,波峰与波谷的对称性也逐渐增强.

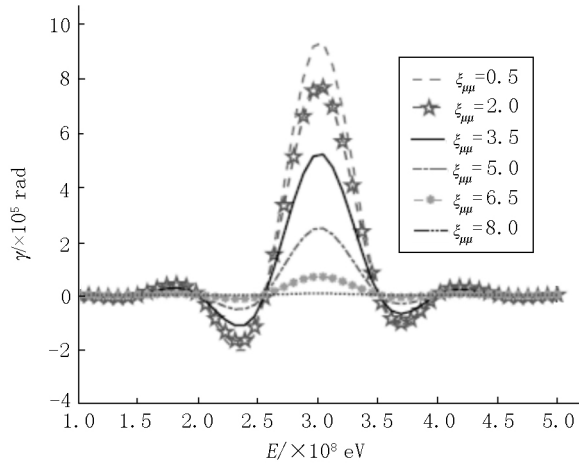


图2 几何相位随能量变化的曲线(其他参数见表1)

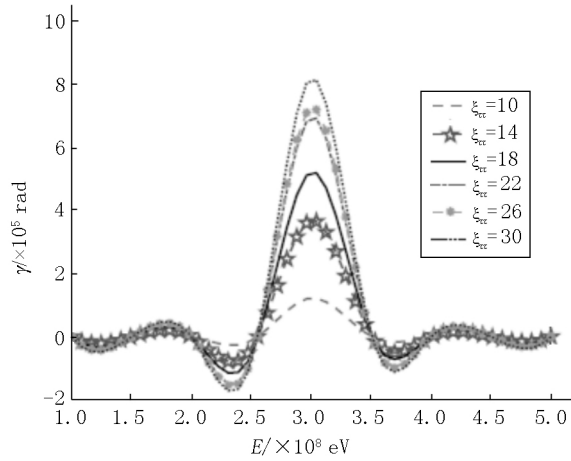


图3 几何相位随能量变化的曲线(其他参数见表1)

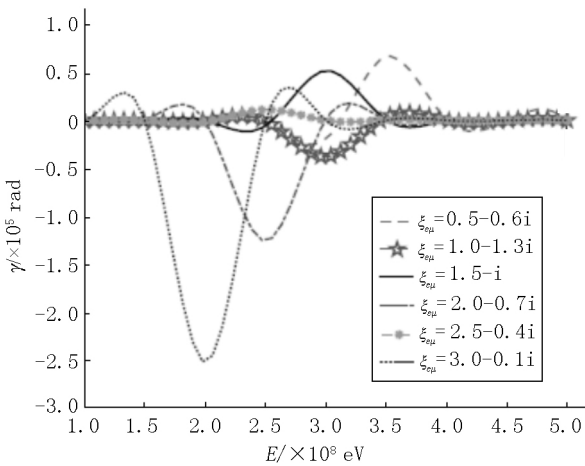


图4 改变 $\xi_{\mu\nu}$ 的取值,几何相位随能量变化的曲线(其他参数见表1)

由图4可知,随 $\xi_{\mu\nu}$ 复数部分增加,几何相位振荡中心消失了,非对称性结构越来越明显,这意味着 e 和 μ 中微子混合效应增强.

由图5可知,随 $\xi_{e\tau}$ 复数部分增加,几何相位振荡中心消失了,非对称性结构越来越明显,这意味着

e 和 τ 中微子混合效应增强.随着能量的增大,开始几何相位的振幅也增大,非对称性结构也越来越明显,当振幅达到最大值时,几何相位的振幅开始减小,对称性结构逐渐恢复.

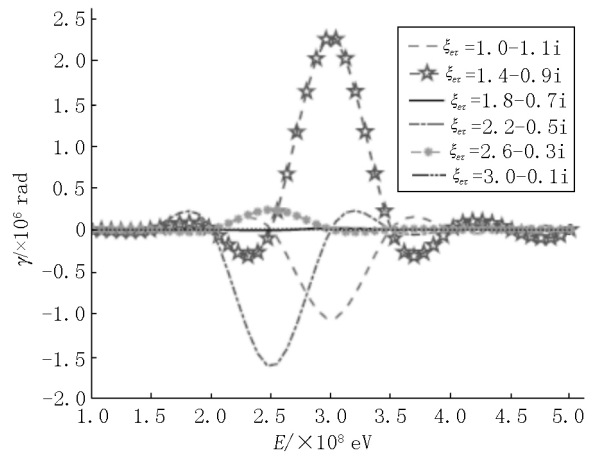


图5 改变 $\xi_{e\tau}$ 的取值,几何相位随能量变化的曲线(其他参数见表1)

由图6可知,不同的 $\xi_{\mu\tau}$,几何相位的变化较小,原因是几何相中包含 $\xi_{\mu\tau}$ 的值较小.当 $0 \text{ eV} < E < 3 \times 10^8 \text{ eV}$ 时,几何相位振幅增大;当 $E = 3 \times 10^8 \text{ eV}$ 时,几何相位的振幅达到最大值,随后振幅逐渐减小,对称性逐渐增强.

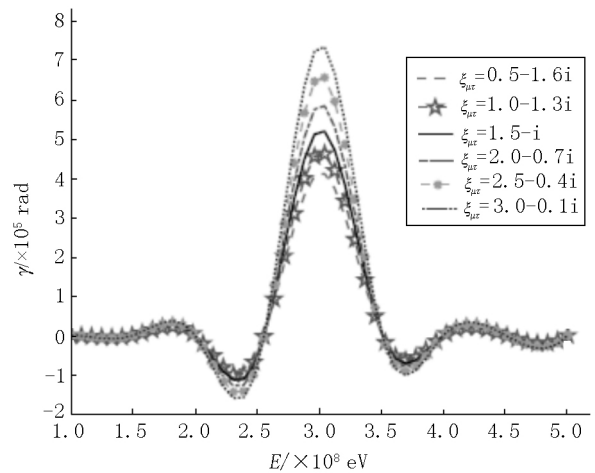


图6 改变 $\xi_{\mu\tau}$ 的取值,几何相位随能量变化的曲线(其他参数见表1)

由图7可知,不同的 θ_{12} ,几何相位有稍微不同差别,原因也是几何相中包含的 θ_{12} 项的值较小.当能量 $0 \text{ eV} < E < 3 \times 10^8 \text{ eV}$ 时,几何相位振幅增大,在 $E = 3 \times 10^8 \text{ eV}$ 处,几何相位的振幅达到最大值,随后几何相位的振幅逐渐减小,对称性逐渐增强.

由图8可知, θ_{13} 越大,几何相位的非对称性越大.随着能量的增大,几何相位的振幅先增大后减小,几何相位的非对称性结构在几何相位振幅达到最大值时最明显.

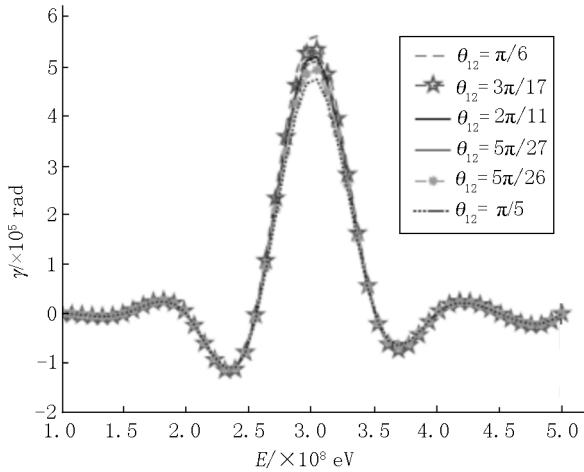


图 7 改变 θ_{12} 的取值, 几何相位随能量变化的曲线(其他参数见表 1)

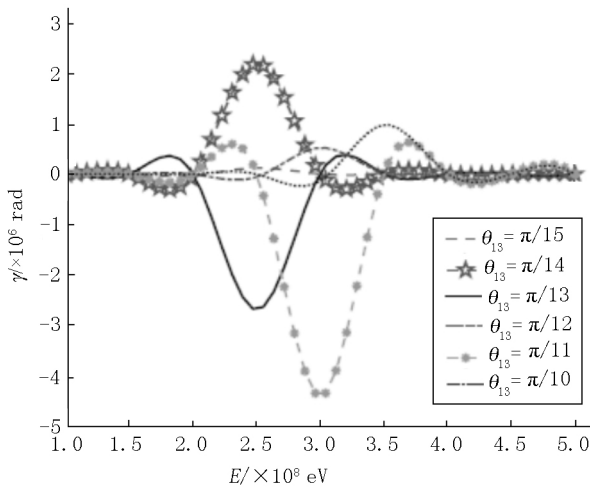


图 8 改变 θ_{13} 的取值, 几何相位随能量变化的曲线(其他参数见表 1)

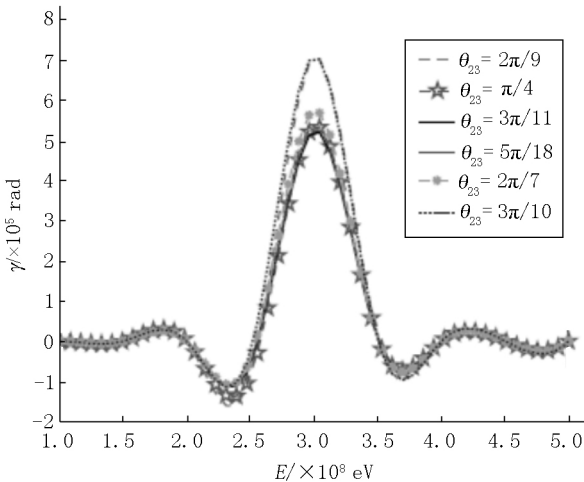


图 9 改变 θ_{23} 的取值, 几何相位随能量变化的曲线(其他参数见表 1)

由图 9 可知, θ_{23} 的改变对几何相位的影响不大, 原因同样是在几何相位中包含的 θ_{23} 项的值较小。当 $0 \text{ eV} < E < 3 \times 10^8 \text{ eV}$ 时, 几何相位振幅增大, 在 $E = 3 \times 10^8 \text{ eV}$ 处, 几何相位的振幅达到最大值,

随后振幅逐渐减小, 对称性逐渐增强。

4 结果与讨论

几何相位作为能量的函数显示在图 1 ~ 图 9 中, 当能量 $E \in [0, 1.5 \times 10^8] \text{ eV}$ 时, 几何相位振动的非常小, 而且是对称的, 这意味着中微子在物质传播过程中的 CP 违反现象较小。

随着中微子能量的增高, 尤其当能量 $E \in [1.5 \times 10^8, 3 \times 10^8] \text{ eV}$ 时, 几何相位振动加大, 并且出现了非对称性。本文发现几何相位的振动的峰和谷的值不同, 其值大小依赖于描述中微子振荡和混合的各种参数, 这提供了直接探测中微子 CP 违反现象的能量区间。

当能量 $E \in [4 \times 10^8, 5 \times 10^8] \text{ eV}$ 时, 中微子振荡和混合的几何相位振幅逐渐减小, 并且变得越来越对称。

由图 1、图 3、图 6、图 9 可知, 改变参数 ξ_{ee} 、 $\xi_{\tau\tau}$ 、 $\xi_{\mu\tau}$ 以及 θ_{23} , 几何相位的振荡的波峰和波谷随着参数的增大而增大, 波峰和波谷的非对称性也增强。

由图 2、图 7 可知, 改变参数 $\xi_{\mu\mu}$ 和 θ_{12} , 几何相位的振荡的波峰和波谷随着参数的增大而减小, 波峰和波谷的对称性也增强。

由图 4、图 5、图 8 可知, 随着参数 ξ_{qe} 和 $\xi_{e\tau}$ 复数部分的增大以及 θ_{13} 的增大, 几何相位振荡中心消失, 非对称结构也越来越明显。

综上所述, 本文给出了中微子在物质中振荡和混合的模型化的分析解, 并且通过让中微子的相角旋转 360° , 给出了中微子振荡和混合的几何相位, 探讨了中微子在传播过程中的 CP 违反现象。

5 参考文献

- [1] Harrison P F, Perkins D H, Scott W G. Tri-bimaximal mixing and the neutrino oscillation data [J]. Phys Lett B, 2002, 530(1/2/3/4): 167-173.
- [2] Ohisson T, Zhang He, Zhou Shun. Effects of non-standard neutrino interactions at PINGU [J]. Phys Rev D, 2013, 88(1): 13001.
- [3] Wang Zisheng, Cai Xiaoya, Pan Hui. Trapped ionic simulation of neutrino electromagnetic properties in neutrino oscillation [J]. Nucl Phys B, 2015, 900: 560-575.
- [4] Wang Zisheng, Pan Hui. Exploration of CPT violation via time-dependent geometric quantities embedded in neutrino oscillation through fluctuating matter [J]. Nucl Phys B, 2017, 915: 414-430.

- [5] 肖鸿飞. 在中微子混合中得 CP 不变性 [J]. 自然科学进展 2003 ,13(10) : 1092-1094.
- [6] 王较过. 中微子振荡与中微子的静止质量 [J]. 物理 , 2000 29(11) : 682-685.
- [7] Tsang K V ,An F P ,An Q. Results from the daya bay reactor neutrino experiment [J]. Nucl Phys B: Proceedings Supplements 2014 246/247: 18-22.
- [8] Heng Yuekun. Electron-antineutrino disappearance observed by the daya bay reactor neutrino experiment [J]. Nuclear Data Sheets 2014 ,118: 91-97.
- [9] Liu Qiuyu ,Petcov S T. Three-neutrino mixing and combined vacuum oscillations and MSW transitions of solar neutrinos [J]. Phys Rev D ,1997 ,56(11) : 7392-7411.
- [10] Kobayashi M ,Maskawa T. CP-violation in the renormalizable theory of weak interaction [J]. Progress of Theoretical Physics ,1973 49(2) : 652-657.
- [11] Fogli G ,Lisi E ,Marrone A. Supernova neutrino three-flavor evolution with dominant collective effects [J]. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics ,2009 (4) : 689-696.
- [12] Morisi S. Probing the Majorana nature of the neutrino with neutrinoless double beta decay [J]. Journal of Physics: Conference Series 2010 203(1) : 012060.
- [13] Naumov V A. Berry phases for three-neutrino oscillations in matter [J]. Phys Lett B ,1994 323(3/4) : 351-359.
- [14] He Xiaogang ,Li Xueqian ,Mckellar B H J. Berry phase in neutrino oscillations [J]. Phys Rev D ,2005 ,72 (5) : 053012.
- [15] Miranda O G ,Nunokawa H. Non standard neutrino interactions: current status and future prospects [J]. New J Phys 2015 ,17(9) : 095002.
- [16] Ohlsson T. Status of non-standard neutrino interactions [J]. Report on Progress in Physics ,2013 ,76 (4) : 044201.
- [17] Simon B. Holonomy ,the quantum adiabatic theorem and Berry's phase [J]. Phys Rev Lett ,1983 ,51(24) : 2167-2170.
- [18] Kobayashi M ,Maskawa T. CP-violation in the renormalizable theory of weak interaction [J]. Progress of Theoretical Physics ,1973 49(2) : 652-657.
- [19] Masiero A ,Vives O. New physics in CP violation experiments [J]. Annual Review of Nuclear and Particle Science 2001 51(1) : 161-187.
- [20] Xing Zhizhong. Nearly tri-bimaximal neutrino mixing and CP violation [J]. Phys Lett B 2002 533(1/2) : 85-93.

The Geometric Phase and CP-Violation in Neutrino Oscillation

JIANG Chunyu¹ ,ZENG Gaorong¹ ,HUANG Yongchang² ,WANG Zisheng^{1*}

(1. College of Physics and Communication Electronics ,Jiangxi Normal University ,Nanchang Jiangxi 330022 ,China;

2. Institute of Theoretical Physics ,Beijing University of Technology ,Beijing 100124 ,China)

Abstract: Firstly ,the analytical solution for a model of neutrino oscillation and mixing in the matter is explored. Then ,the CP-violation phase of the neutrino is operated to rotate a circle in order to obtain the geometric phase of the neutrino oscillation and mixing. It is found that the geometric phase with energy vibration has asymmetric geometric structure ,where the wave peaks and dips are not symmetry. Because the geometric phase describes the intrinsic properties of neutrino propagation process ,this asymmetric structure originates from the neutrino oscillation and mixed CP-violation phenomenon. Therefore ,the geometric phase provides clues to CP violations during neutrino propagation.

Key words: neutrino; neutrino oscillation; geometric phase; geometric structure; CP violation

(责任编辑: 冉小晓)