文章编号:1000-5862(2020)05-0510-05

关于微分差分多项式零点分布的几个结果

龙见仁,秦大专
(贵州师范大学数学科学学院,贵州 贵阳 550025)

摘要:利用 Nevanlinna 第二基本理论和哈达玛分解定理,考虑了微分差分多项式的零点分布,获得一些广泛的结果. 另外,也获得一些关于差分多项式的零点分布的结果.

关键词:微分差分多项式;有穷级;亚纯函数;零点
中图分类号:O 174.52　　**文献标志码**:A　　**DOI**:10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2020.05.11

0 引言和主要结果

假设读者熟悉 Nevanlinna 理论的标准符号和基本结果,更多细节参见文献[1-2]. 假设 $\alpha(z)$、$f(z)$ 为亚纯函数,若它们满足 $T(r,\alpha)=S(r,f)$,则称 $\alpha(z)$ 为 $f(z)$ 的一个小函数,其中 $S(r,f)=o(T(r,f))$,$r\to\infty$ 且 $r\notin E$,E 是对数测度有穷的集合. 用 $\rho(f)$ 表示 $f(z)$ 的增长级.

W. K. Hayman 在文献[3] 中猜想:若 $f(z)$ 是一个超越亚纯函数,则 $f^n(z)f'(z)$ 取任意有穷非零值无穷多次. W. K. Hayman 在文献[3] 中证明了 $n\geqslant 3$ 的情况. 随后,$n=2$ 被 E. Mues 在文献[4] 中证明,W. Bergweiler 等[5] 和 Chen Huaihui 等[6] 分别证明了 $n=1$ 的情形. 从这些结果知 $f^n(z)f'(z)$ 的 Picard 例外值只可能是 0. 在亚纯函数的值分布中,微分多项式的零点一直是一个重要的研究对象. 随着 Nevanlinna 理论的发展,特别是对数导数引理的差分类比、差分 Clunie 引理、差分第二基本定理等的相继获得[7-9],差分多项式的零点分布受到学者们的极大关注,并获得许多结果[10-16]. I. Laine 等[10] 首先考虑了 $f^n(z)f(z+c)$ 的零点分布,这个结果被认为是 Hayman 猜想的差分类比.

定理 A[10,定理2]　设 $f(z)$ 是一个有穷级超越整函数,c 是一个非零复常数,则当 $n\geqslant 2$ 时,$f^n(z)\cdot f(z+c)$ 取任意非零复数 a 无穷多次.

定理 A 暗示了 $f^n(z)f(z+c)$ 没有有穷的非零 Picard 例外值,随后许多文献致力于去推广定理 A,常数 a 在文献[13-14] 中被用非零多项式取代和在文献[17] 中被小函数 $\alpha(z)$ 取代. 受 Hayman 猜想和定理 A 的启发,获得了下面的结果.

定理 1　设 $f(z)$ 是一个有穷级超越整函数,c 是一个非零复常数,则当 $n\geqslant 2$ 时,$f^n(z)(f'(z)+f(z+c))-b(z)$ 有无穷多个零点,其中 $b(z)\neq 0$ 是一个多项式.

关于 $f^n(z)\Delta_c f(z)$ 的零点,其中 $\Delta_c f(z)=f(z+c)-f(z)$,Liu Kai 等[18] 证明:若 $n\geqslant 3$,则 $f^n(z)\cdot(\Delta_c f(z))^s-\alpha(a)$ 有无穷多个零点,其中 $\alpha(z)$ 是 $f(z)$ 的小函数,$n,s\in\mathbf{N}$. 因此,有一个自然的问题:若定理 2 中的 $f(z+c)$ 被 $\Delta_c f(z)$ 取代,则将会发生什么?本文考虑了这个问题,并得到下面的结果.

定理 2　设 $f(z)$ 是一个有穷级超越整函数,c 是一个非零复常数,$\Delta_c f(z)=f(z+c)-f(z)\neq 0$,则当 $n\geqslant 2$ 时,$f^n(z)(f'(z)+\Delta_c f(z))-b(z)$ 有无穷多个零点,其中 $b(z)\neq 0$ 是一个多项式.

许多学者也考虑了更一般的差分乘积的零点,为了陈述下面的结果,设 $P(z)=a_nz^n+\cdots+a_1z+a_0$ 是一个非零多项式,其中 $a_n(\neq 0),\cdots,a_1,a_0$ 是复常数,并且 k 为 $P(z)$ 不同零点的个数. Luo Xudan 等[19] 考虑了差分乘积的零点,并获得下面的结果.

定理 B[19,定理1]　设 $f(z)$ 是一个有穷级超越整函数,$\alpha(z)$ 是 $f(z)$ 的一个非零小函数,则当 $n>k$

收稿日期:2020-06-20
基金项目:国家自然科学基金(11861023),贵州省科技计划基金(黔科合平台人才[2018]5769-05 号)资助项目.
作者简介:龙见仁(1981-),男,贵州锦屏人,教授,博士,博士生导师,主要从事复分析研究. E-mail:longjianren2004@163.com

时,$P(f)f(z+c)-\alpha(z)$ 有无穷多个零点.

为了方便叙述,定义 $L(z,f)=b_mf(z+c_m)+\cdots+b_1f(z+c_1)+b_0f(z+c_0)$, 其中 $b_m,\cdots,b_1,b_0,c_m,\cdots,c_1,c_0$ 是常数. 针对定理 B,有下面的结果.

定理 3　设 $f(z)$ 是一个有穷级超越亚纯函数, $\alpha(z)$ 是 $f(z)$ 的一个非零小函数. 若 $P(z)$ 不同零点的个数为 k, 则当 $n\geqslant(m+1)s+k+2$ 时, $P(f)(L(z,f))^s-\alpha(z)$ 有无穷多个零点.

下面回顾 W. K. Hayman 在文献[3,定理 8 和定理 9] 中的结果,具体陈述如下.

定理 C[3]　设 $f(z)$ 是一个超越亚纯函数, $a\neq 0$, b 是有穷复常数,则当 $n\geqslant 5$ 时, $f^n(z)+af'(z)-b$ 有无穷多个零点. 若 $f(z)$ 是一个超越整函数,则当 $n\geqslant 3$ 时,结论成立;当 $n\geqslant 2$, $b=0$ 时结论仍然成立.

最近,关于 $f^n(z)+af(z+c)-b(z)$ 的零点已经被考虑,这可被看成是定理 C 的差分类比. 受这些结果的启发,本文得到了下面的结果.

定理 4　设 $f(z)$ 是一个有穷级超越亚纯函数, $\alpha(z)$ 是 $f(z)$ 的一个非零小函数. 若 $P(z)$ 不同零点的个数为 k,则当 $n\geqslant m+k+3$ 时, $P(f)+L(z,f)-\alpha(z)$ 有无穷多个零点.

1　引理

为证明结果,下面将给出一些引理. 下面的引理被称为 Clunie 引理.

引理 1[2,引理2.4.2]　设 $f(z)$ 是方程 $f^n(z)P(z,f)=Q(z,f)$ 的超越亚纯解,其中 $P(z,f)$ 和 $Q(z,f)$ 是关于 f 和 f 的导数的多项式,它们的系数 $a_\lambda(\lambda\in I)$ 是亚纯函数并满足 $m(r,a_\lambda)=S(r,f)$, $\lambda\in I$. 若 $Q(z,f)$ 关于 f 和 f 的导数的最高次数为 n,则 $m(r,P(z,f))=S(r,f)$.

下面的引理被认为是 Clunie 引理的差分类比.

引理 2[8,定理3.1]　设 $f(z)$ 是方程 $f^n(z)P(z,f)=Q(z,f)$ 的非常数有穷级亚纯解,其中 $P(z,f)$ 和 $Q(z,f)$ 是关于 f 的差分多项式,常数 $\delta<1$. 若 $Q(z,f)$ 关于 f 和 f 的平移差分的最高次数为 n,则对所有的 $r\notin E$, E 为对数测度有穷的集合,有

$$m(r,P(z,f))=o((T(r+|c|,f))/r^\delta)+o(T(r,f)).$$

引理 3[7,推论2.6]　设 $\eta_1\neq\eta_2$ 是 2 个复数, $f(z)$ 是一个有穷级为 ρ 的亚纯函数,则 $\forall\varepsilon>0$,有

$$m(r,f(z+\eta_1)/f(z+\eta_2))=O(r^{\rho-1+\varepsilon}).$$

引理 4[20,推论1.2.1]　设 $f(z)$ 是一个有穷级非常数的亚纯函数, $c\in\mathbf{C}$ 且 $\delta\leqslant 1$,则对所有的 $r\notin E$, E 为对数测度有穷的集合,有

$$m(r,f(z+c)/f(z))=o(T(r+|c|,f)/r^\delta)=o(T(r,f)/r^\delta)=S(r,f).$$

引理 5[7,定理2.1]　设 $f(z)$ 是一个增长级为 $\rho=\rho(f)<+\infty$ 的亚纯函数, η 是一个给定的非零复数,则 $\forall\varepsilon>0$,有

$$T(r,f(z+c))=T(r,f)+O(r^{\rho-1+\varepsilon})+O(\log r).$$

引理 6[2,引理1.1.2]　设 $g:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$, $h:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$ 是单调非减函数,且满足 $g(r)\leqslant h(r)$, $r\notin E$, E 为对数测度有穷的集合,则 $\forall\alpha>1$, $\exists r_0>1$ 使得 $g(r)\leqslant h(r^\alpha)$, $r>r_0$.

2　定理的证明

定理 1 的证明　反证法. 假设 $f^n(z)(f'(z)+f(z+c))-b(z)$ 只有有限个零点,则

$$f^n(z)(f'(z)+f(z+c))-b(z)=p(z)e^{q(z)},\quad(1)$$

其中 $p(z)$、$q(z)$ 是不同时为 0 的多项式. 对(1)式求导并消去 $e^{q(z)}$,有

$$f^{n-1}(z)P(z,f)=b'(z)p(z)-b(z)p^*(z),\quad(2)$$

其中

$$P(z,f)=np(z)(f'(z))^2+p(z)f(z)f''(z)+np(z)f'(z)f(z+c)+p(z)f(z)f'(z+c)-f(z)\cdot f'(z)p^*(z)-f(z)f(z+c)p^*(z),$$

$$p^*(z)=p'(z)+p(z)q'(z).$$

首先断言 $P(z,f)\neq 0$. 反之,若 $P(z,f)=0$,则 $b'(z)p(z)-b(z)p^*(z)=0$. 通过积分计算,有 $b(z)=Bp(z)e^{q(z)}$,其中 $B\neq 0$ 是一个常数. 又因为 $b(z)$ 和 $q(z)$ 是多项式,于是 $q(z)$ 是一个常数. 由(1)式和引理 3 得

$$(n+1)T(r,f)=(n+1)m(r,f)\leqslant m(r,f(z)/(f'(z)+f(z+c)))+S(r,f)\leqslant T(r,(f'(z)+f(z+c))/f(z))+S(r,f)=m(r,f'(z)/f(z))+N(r,f'(z)/f(z))+m(r,f(z+c)/f(z))+N(r,f(z+c)/f(z))+S(r,f)\leqslant N(r,f'(z))+2N(r,1/f(z))+N(r,f(z+c))+O(r^{\rho-1+\varepsilon})+S(r,f)\leqslant 2T(r,f(z))+O(r^{\rho-1+\varepsilon})+S(r,f),$$

其中 $\rho=\rho(f)$. 由于 $n\geqslant 2$,因此这是一个矛盾.

由引理 2 和引理 4 及(2)式得

$$T(r,P(z,f))=m(r,P(z,f))=o(T(r+|c|,f)/r^{\delta})+o(T(r,f))=S(r,f)=O(\log r) \quad (3)$$

和

$$T(r,f(z)P(z,f))=m(r,f(z)P(z,f))=o(T(r+|c|,f)/r^{\delta})+o(T(r,f))=S(r,f)=O(\log r) \quad (4)$$

对所有的 r 都成立,可能除去一个对数测度有穷的例外集 E. 由引理6知,$\forall\alpha>1$,$\exists r_0>1$,使得对所有的 $r>r_0$,有

$$T(r,P(z,f))\leqslant O(\log r^{\alpha})=O(\log r).$$

使用相同的方法得,$\exists r_1>1$,使得对所有的 $r>r_1$,有

$$T(r,f(z)P(z,f))\leqslant O(\log r^{\alpha})=O(\log r).$$

取 $r_2=\max\{r_0,r_1\}$,则(3) ~ (4) 式对所有的 $r>r_2$ 都成立. 因此有

$$T(r,f(z))=T(r,f(z)P(z,f)/P(z,f))\leqslant T(r,P(z,f))+T(r,f(z)P(z,f))+S(r,f)=O(r^{\rho-1+\varepsilon})+S(r,f).$$

这与 $\rho(f)=\rho$ 相矛盾,所以定理1得证.

定理2 的证明 反证法. 假设 $f^{n}(z)(f'(z)+\Delta_c f(z))-b(z)$ 只有有限个零点,则

$$f^{n}(z)(f'(z)+\Delta_c f(z))-b(z)=H(z)e^{Q(z)}, \quad (5)$$

其中 $H(z)$、$Q(z)$ 是多项式. 对(5) 式求导并消去 $e^{Q(z)}$,有

$$f^{n-1}(z)F(z,f)=q^{*}(z), \quad (6)$$

其中

$$F(z,f)=nH(z)(f'(z))^{2}+H(z)f(z)f''(z)+nH(z)f'(z)f(z+c)+H(z)f(z)f'(z+c)-(n+1)H(z)f(z)f'(z)-f(z)f'(z)p^{*}(z)-f(z)f(z+c)p^{*}(z)+f^{2}(z)p^{*}(z),$$

$$p^{*}(z)=H'(z)+H(z)Q'(z),$$

$$q^{*}(z)=b'(z)H(z)-b(z)H'(z)-b(z)H(z)Q'(z).$$

注意到 $F(z,f)\neq 0$. 反之,若 $F(z,f)=0$,则

$$q^{*}(z)=b'(z)H(z)-b(z)H'(z)-b(z)H(z)Q'(z)=0.$$

对上式积分,有

$$b(z)/H(z)=Ae^{Q(z)},$$

其中 $A\neq 0$ 是一个常数. 又因为 $b(z)\neq 0$,$H(z)$ 是多项式, 因此 $Q(z)$ 是一个常数. 所以由(5) 式有 $f^{n}(z)(f'(z)+\Delta_c f(z))=KH(z)$,$K\neq 0$ 是一个常数. 由(5) 式和引理3 得

$$(n+1)T(r,f)=(n+1)m(r,f)\leqslant m(r,f(z)/(f'(z)+\Delta_c f(z)))+m(r,H(z))\leqslant T(r,f'(z)/f(z))+T(f(z+c)/f(z))+O(\log r)=m(r,f'(z)/f(z))+N(r,f'(z)/f(z))+m(r,f(z+c)/f(z))+N(r,f(z+c)/f(z))+S(r,f)\leqslant N(r,f'(z))+2N(r,1/f(z))+N(r,f(z+c))+O(r^{\rho-1+\varepsilon})+S(r,f)\leqslant 2T(r,f(z))+O(r^{\rho-1+\varepsilon})+S(r,f).$$

由于 $n\geqslant 2$,因此这与 $\rho=\rho(f)$ 相矛盾.

由引理2 和引理4 及(6) 式得

$$T(r,F(z,f))=m(r,F(z,f))=o(T(r+|c|,f)/r^{\delta})+o(T(r,f))=S(r,f)=O(\log r) \quad (7)$$

和

$$T(r,f(z)F(z,f))=m(r,f(z)F(z,f))=o(T(r+|c|,f)/r^{\delta})+o(T(r,f))=S(r,f)=O(\log r) \quad (8)$$

对所有的 r 都成立,可能除去一个对数测度有穷的例外集 E. 由引理6知,$\forall\alpha>1$,$\exists r_3>1$,使得对所有的 $r>r_3$,有

$$T(r,F(z,f))\leqslant O(\log r^{\alpha})=O(\log r).$$

$\exists r_4>1$,使得对所有的 $r>r_4$,有

$$T(r,f(z)F(z,f))\leqslant O(\log r^{\alpha})=O(\log r).$$

取 $r_5=\max\{r_3,r_4\}$,则(7) ~ (8) 式对所有的 $r>r_5$ 都成立. 因此

$$T(r,f(z))=T(r,f(z)F(z,f)/F(z,f))\leqslant T(r,F(z,f))+T(r,f(z)F(z,f))+S(r,f)=S(r,f).$$

这是一个矛盾,从而定理2 得证.

定理3 的证明 设 $F(z)=P(f)L(z,f)^{s}$,则

$$P(f)^{s+1}=F(z)(P(f)/L(z,f))^{s}.$$

因此

$$(ns+n)m(r,f)=m(r,P(f)^{s+1})\leqslant m(r,F(z))+sm(r,P(f)/L(z,f))\leqslant m(r,F(z))+(ns-s)m(r,f)+sm(r,f/L(z,f)), \quad (9)$$

$$(ns+n)N(r,f)=N(r,P(f)^{s+1})\leqslant N(r,F(z))+sN(r,P(f)/L(z,f))-\overline{N}_0(r)-\overline{N}_1(r)\leqslant N(r,F(z))+(ns-s)N(r,f)+sN(r,f/L(z,f))-\overline{N}_0(r)-\overline{N}_1(r), \quad (10)$$

其中 $\overline{N}_0(r)$ 是 $F(z)$ 和 $L(z,f)/P(f)$ 不计重数的公共零点的计数函数,$\overline{N}_1(r)$ 是 $F(z)$ 和 $L(z,f)/P(f)$ 不计重数的公共极点的计数函数. 从(9) ~ (10)

式得

$$(ns+n)N(r,f)=T(r,F(z))+(ns-s)T(r,f)+sT(r,f/L(z,f))-\overline{N}_0(r)-\overline{N}_1(r). \quad (11)$$

由 $\overline{N}_0(r)$ 和 $\overline{N}_1(r)$ 的定义,以及 $F(z)=P(f)L(z,f)^s$,有

$$\overline{N}(r,1/F(z))\leqslant\overline{N}(r,1/P(f))+\overline{N}_0(r)\leqslant kT(r,f)+\overline{N}_0(r)+S(r,f), \quad (12)$$

$$\overline{N}(r,F(z))\leqslant\overline{N}(r,P(f))+\overline{N}_1(r)\leqslant T(r,f)+\overline{N}_1(r). \quad (13)$$

由(12) ~ (13) 式和 Nevanlinna 第二基本定理得

$$T(r,F(z))\leqslant\overline{N}(r,F(z))+\overline{N}(r,1/F(z))+\overline{N}(r,1/(F(z)-\alpha(z)))+S(r,F)\leqslant(k+1)T(r,f)+\overline{N}(r,1/(F(z)-\alpha(z)))+\overline{N}_0(r)+\overline{N}_1(r)+S(r,f). \quad (14)$$

由引理 5 得

$$T(r,f(z)/L(z,f))+O(1)=T(r,L(z,f)/f(z))\leqslant(m+2)T(r,f)+S(r,f). \quad (15)$$

将(14) 和(15) 式代入(11) 式得

$$(ns+n)T(r,f)\leqslant(ns-s+k+1)T(r,f)+\overline{N}(r,1/(F(z)-\alpha(z)))+sT(r,f(z)/L(z,f))+S(r,f)\leqslant(ms+ns+s+k+1)T(r,f)+\overline{N}(r,1/(F(z)-\alpha(z)))+S(r,f). \quad (16)$$

因此,当 $n\geqslant ms+s+k+2$ 时,$P(f)L(z,f)^s-\alpha(z)$ 有无穷多个零点.

定理 4 的证明　设 $G(z)=(\alpha(z)-L(z,f))/P(f)$,则

$$nm(r,f(z))=m(r,P(f))=m(r,(\alpha(z)-L(z,f))/G(z))\leqslant m(1/G(z))+m(r,\alpha(z)-L(z,f)), \quad (17)$$

$$nN(r,f(z))=N(r,P(f))=N(r,(\alpha(z)-L(z,f))/G(z))\leqslant N(1/G(z))+N(r,\alpha(z)-L(z,f))-\overline{N}_0(r)-\overline{N}_1(r), \quad (18)$$

其中 $\overline{N}_0(r)$ 是 $G(z)$ 和 $\alpha(z)-L(z,f)$ 不计重数的公共零点的计数函数,$\overline{N}_1(r)$ 是 $G(z)$ 和 $\alpha(z)-L(z,f)$ 不计重数的公共极点的计数函数. 由(17) ~ (18) 式得

$$nT(r,f(z))\leqslant T(r,1/G(z))+T(r,\alpha(z)-L(z,f))-\overline{N}_0(r)-\overline{N}_1(r).$$

$G(z)$ 的极点由 2 部分组成,一部分来自于 $P(f)$ 的零点,另一部分来自于 $G(z)$ 和 $\alpha(z)-L(z,f)$ 的公共极点. 同样地,$G(z)$ 的零点来自于 $P(f)$ 的极点和 $G(z)$ 与 $\alpha(z)-L(z,f)$ 的公共零点. 因此

$$\overline{N}(r,G(z))\leqslant\overline{N}(r,1/P(f))+\overline{N}_1(r)+S(r,f), \quad (19)$$

$$\overline{N}(r,1/G(z))\leqslant\overline{N}(r,P(f))+\overline{N}_0(r)+S(r,f). \quad (20)$$

由(19) ~ (20) 式和 Nevanlinna 第二基本定理得

$$T(r,G(z))\leqslant\overline{N}(r,G(z))+\overline{N}(r,1/G(z))+\overline{N}(1/(G(z)-1))+S(r,f)\leqslant\overline{N}(r,P(f))+\overline{N}(r,1/P(f))+\overline{N}(1/(G(z)-1))+\overline{N}_0(r)+\overline{N}_1(r)+S(r,f). \quad (21)$$

把(21) 式代入(19) 式,有

$$nT(r,f(z))\leqslant T(r,1/G(z))+T(r,\alpha(z)-L(z,f))-\overline{N}_0(r)-\overline{N}_1(r)\leqslant T(r,\alpha(z)-L(z,f))+\overline{N}(r,P(f))+\overline{N}(r,1/P(f))+\overline{N}(r,1/(G(z)-1))+S(r,f)\leqslant(m+k+2)T(r,f)+\overline{N}(r,1/(G(z)-1))+S(r,f). \quad (22)$$

由(16) 和(22) 式得

$$(n-m-k-2)T(r,f(z))\leqslant\overline{N}(r,1/(G(z)-1))+S(r,f)\leqslant\overline{N}(r,1/(P(f)+L(z,f)-\alpha(z)))+S(r,f).$$

因此,当 $n\geqslant m+k+3$ 时,$P(f)+L(z,f)-\alpha(z)$ 有无穷多个零点.

3　参考文献

[1] Hayman W K. Meromorphic function [M]. Oxford: Clarendon Press, 1964.

[2] Laine I. Nevanlinna theory and complex differential equations [M]. Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1993.

[3] Hayman W K. Picard values of meromorphic functions and their derivatives [J]. Ann Math, 1959, 70(1): 9-42.

[4] Mues E. Über ein problem von Hayman [J]. Math Z, 1979, 164(3): 239-259.

[5] Bergweiler W, Eremenko A. On the singularities of the inverse to a meromorphic function of finite order [J]. Rev Mat Lberoam, 1996, 11(2): 355-373.

[6] Chen Huaihui, Fang Mingliang. On the value distribution of f^nf' [J]. Sci China: Ser A, 1995, 38(7): 789-798.

[7] Chiang Yikman, Feng Shaoji. On the Nevanlinna characteristic of $f(z+\eta)$ and difference equations in the complex plane [J]. Ramanujian J, 2008, 16(1): 105-129.

[8] Halburd R G, Korhonen R J. Difference analogue of the Lemma on the Logarithmic derivative with applications to difference equations [J]. J Math Anal Appl, 2006, 314 (2):477-487.

[9] Halburd R G, Korhonen R J. Nevanlinna theory for difference operator [J]. Ann Acad Sci Fenn Math, 2006, 31 (2):463-478.

[10] Laine I, Yang Chuangchun. Value distribution of difference polynomials [J]. Proc Japan Acad Ser A: Math Sci, 2007, 83:148-151.

[11] Chen Zongxuan, Huang Zhibo, Zheng Xiumin. On properties of difference polynomials [J]. Acta Math Sin, 2011, 31B(2):627-633.

[12] Huang Zhibo, Chen Zongxuan. A Cluie Lemma for difference and q-difference polynomials [J]. Bull Aust Math Soc, 2010, 81(1):23-32.

[13] Lü Weiran, Liu Nana, Yang Chuangchun, et al. Notes on value distributions of $ff^{(k)}-b$ [J]. Kodai Math J, 2016, 39 (3):500-509.

[14] Latreuch Z, Belaïdi B. On picard value problem of some difference polynomials [J]. Arab J Math, 2018, 7(1):27-37.

[15] Qi Xiaoguang, Dou Jia, Yang Lianzhong. Uniqueness and value distribution for difference operators of meromorphic function [J]. Adv Differ Equ, 2012, 2012(32):1-9.

[16] Zhang Jilong. Value distribution and shared sets of difference of meromorphic functions [J]. J Math Anal Appl, 2010, 367(2):401-408.

[17] Liu Kai, Liu Xinling, Cao Tingbin. Value distributions and uniqueness of difference polynomials [J]. Adv Differ Equ, 2011, 2011:1-12.

[18] Liu Kai, Cao Tingbin, Liu Xinling. Some difference results on Hayman conjecture and uniqueness [J]. Bull Iranian Math Soc, 2012, 38(4):1007-1020.

[19] Luo Xudan, Lin Weichuan. Value sharing results for shifts of meromorphic functions [J]. J Math Anal Appl, 2011, 377(2):441-449.

[20] Chen Zongxuan. Complex differences and difference equations [M]. Beijing: Science Press, 2014.

Some Results of Zero Distribution for Differential-Difference Polynomials

LONG Jianren, QIN Dazhuan

(School of Mathematical Science, Guizhou Normal University, Guiyang Guizhou 550025, China)

Abstract: The zeros distribution of differential-difference polynomials is considered by using the second main theorem of Nevanlinna theory and Hadmard factorization theorem, some generalized results are obtained in this paper. In addition, some results concerning the zeros distribution of difference polynomials are also obtained in this paper.

Key words: difference-differential polynomial; finite order; meromorphic functions; zeros

(责任编辑:王金莲)