文章编号:1000-5862(2020)05-0515-06

一类分数阶边值问题无穷多解的存在性

何　仙,张清业*
(江西师范大学数学与统计学院,江西 南昌　330022)

摘要:运用变分法研究了一类非线性项仅在原点附近有定义的分数阶边值问题解的多重性问题,主要利用一种变化形式的对称山路引理证明了其在原点附近无穷多解的存在性,该结果丰富和完善了已有的相关结果.

关键词:分数阶;边值问题;变分法;对称山路引理
中图分类号:O 175.8　　**文献标志码**:A　　**DOI**:10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2020.05.12

0　引言及主要结论

在很多应用领域中,人们发现与常用的整数阶模型相比,分数阶模型往往能更精确地刻画在某些现实世界中的问题.如分数阶导数被用来更好地描述各种材料的记忆性和过程的遗传特性[1-6].因此,关于分数阶微分方程的理论研究受到了数学家们的极大关注并在近几十年内得到广泛发展.文献[1,3,7]涵盖了求解分数阶微分方程常见的理论和方法,他们可以作为一般微分方程理论的一种延伸.

最近,人们开始研究带有左、右分数阶导数的微分方程,除了他们可能的应用之外,这一类方程本身也是在分数阶微分方程理论中一个十分新颖且有趣的领域.然而,对于带有左、右分数阶导数的微分方程,往往很难找到与之等价的积分方程,从而使得以往用来研究一般分数阶微分方程常见的非线性分析的技巧和方法(比如不动点定理、迭代法和上下解法等)都无法运用到这一类微分方程解的存在性问题上.近年来,人们发现变分方法是处理包含带有左、右分数阶导数在内的众多分数阶微分方程的一种非常有效的工具,从而运用这一工具得到各种分数阶微分方程解的存在性与多重性的结果[8-18].

文献[12]运用变分方法在非线性项 $W(t,u)$ 关于 u 在无穷远处具有超 2 次增长性的条件下证明了带有左、右分数阶导数的分数阶边值问题

$$\begin{cases} {}_tD_T^{\alpha}({}_0D_t^{\alpha}u(t)) = \nabla W(t,u(t)), \text{a.e. } t \in [0,T], \\ u(0) = u(T) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

至少存在 1 个非平凡解,其中 $u \in \mathbf{R}^N$, $0 < \alpha \leqslant 1$, ${}_tD_T^{\alpha}$ 和 ${}_0D_t^{\alpha}$ 分别是 α 阶的右和左黎曼 - 刘维尔分数阶导数, $W:[0,T] \times \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ 且 $\nabla W(t,u)$ 是 W 关于 u 的梯度.

文献[11-15]均研究了分数阶边值问题(1)解的存在性和多重性,但是这些文献均要求 $W(t,u)$ 关于 u 在无穷远处具有某种增长性条件,如超 2 次、渐近 2 次或次 2 次等.受这些已有文献的启发,本文将研究非线性项 $W(t,u)$ 关于 u 仅在原点附近有定义的分数阶边值问题(1)无穷多解的存在性.具体地,给出如下假设:

(H_1) $W \in C^1([0,T] \times B_\delta(0), \mathbf{R})$ 并且关于 u 是偶的, $W(t,0) \equiv 0$,其中 $B_\delta(0)$ 是 $\mathbf{R}^N$ 中一个以 0 为中心、δ 为半径的开球;

(H_2) 存在常数 c_1,使得 $\forall t \in [0,T]$ 及 $u \in B_\delta(0)$ 有 $|\nabla W(t,u)| \leqslant c_1$;

(H_3) 存在常数 $\rho > 0$,闭区间 $I_0 \subset [0,T]$,以及 2 个正数序列 $\delta_n \to 0$, $M_n \to \infty$,使得 $\forall t \in I_0$, $|u| < \delta$ 有 $W(t,u) \geqslant -\rho|u|^2$,并且 $\forall n \in \mathbf{N}$, $t \in I_0$ 以及 $|u| = \delta$ 有 $W(t,u)/\delta_n^2 \geqslant M_n$.

在上述条件假设下,得到了如下结果:

收稿日期:2020-01-26
基金项目:国家自然科学基金(11671179,11201196)和江西省自然科学基金(20171BAB211002)资助项目.
通信作者:张清业(1982-),男,湖北洪湖人,副教授,博士,主要从事哈密顿系统的研究.E-mail:zhangqy@jxnu.edu.cn

定理 1 假设 W 满足条件(H_1) ~ (H_3),则分数阶边值问题(1) 存在一列非平凡解 $\{u_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ 使得当 $k\to\infty$ 时,有 $\max\limits_{t\in[0,T]}|u_k(t)|\to 0$.

注 1 在定理 1 中,在只要求 $W(t,u)$ 关于 u 在原点附近有定义的情形下证明了分数阶边值问题(1) 存在无穷多解,这与在以往的文献中均需要 $W(t,u)$ 关于 u 在无穷远处有定义且满足某种增长性条件有所不同,据笔者所知,目前较少有文献研究过这样的情形,此外本文的结论也在很大程度上改进了在已有文献中的某些相关结果. 如文献[14] 假设非线性项 $W(t,u)$ 关于 u 在无穷远处满足次 2 次增长性的条件下证明了分数阶边值问题(1) 存在无穷多解的结果,与在文献[14] 中定理 1.1 的条件相比,本文在定理 1 中的条件(H_1) ~ (H_3) 要弱得多. 因此,定理 1 的结果可以包含文献[14] 中定理 1.1 的结果. 事实上,存在很多满足定理 1 的所有条件而不满足在文献[14] 中的定理 1.1 的所有条件的非线性项 $W(t,u)$. 如

$$W(t,u)=\begin{cases}(\cos t)|u|^{\alpha}\sin^2(1/|u|^{\varepsilon}), & 0<|u|<1,\\ 0, & u=0,\end{cases}$$

其中 $\varepsilon\in(0,1)$,$\alpha\in(1+\varepsilon,2)$.

1 预备知识

本节首先给出分数阶导数的概念及其基本性质,并由此引出分数阶导数空间的相关概念及其性质.

定义 1[3] 设 $f(t)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的函数且 $\gamma>0$. f 的 γ 阶左、右黎曼-刘维尔分数阶积分 ${}_aD_t^{-\gamma}$ 和 ${}_tD_b^{-\gamma}$ 分别定义为

$${}_aD_t^{-\gamma}f(t)=\frac{1}{\Gamma(-\gamma)}\int_a^t(t-s)^{\gamma-1}f(s)\mathrm{d}s,t\in[a,b],\tag{2}$$

$${}_tD_b^{-\gamma}f(t)=\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_t^b(t-s)^{\gamma-1}f(s)\mathrm{d}s,t\in[a,b],\tag{3}$$

这里总假设(2) 和(3) 式的右端在 $[a,b]$ 上均有定义,其中 $\Gamma(\cdot)$ 是 Gamma 函数.

定义 2[3] 设 $f(t)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的函数且 $n-1\leqslant\gamma<n(n\in\mathbf{N}^+)$. f 的 γ 阶左、右黎曼-刘维尔分数阶导数 ${}_aD_t^{\gamma}$ 和 ${}_tD_b^{\gamma}$ 分别定义为

$${}_aD_t^{\gamma}f(t)=\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\,{}_aD_t^{\gamma-n}f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\gamma)}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\left(\int_a^t(t-s)^{n-\gamma-1}f(s)\mathrm{d}s\right),t\in[a,b],$$

$${}_tD_b^{\gamma}f(t)=(-1)^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\,{}_tD_b^{\gamma-n}f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\gamma)}\cdot(-1)^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\left(\int_t^b(s-t)^{n-\gamma-1}f(s)\mathrm{d}s\right),t\in[a,b].$$

特别地,若 $0\leqslant\gamma<1$,则有

$${}_aD_t^{\gamma}f(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,{}_aD_t^{\gamma-1}f(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_a^t(t-s)^{-\gamma}f(s)\mathrm{d}s\right),t\in[a,b],$$

$${}_tD_b^{\gamma}f(t)=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,{}_tD_b^{\gamma-1}f(t)=-\frac{1}{\Gamma(n-\gamma)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_t^b(s-t)^{-\gamma}f(s)\mathrm{d}s\right),t\in[a,b].$$

定义 3[11] 设 $0<\alpha\leqslant1$,$1<p<\infty$,$C_0^{\infty}([0,T],\mathbf{R}^N)$ 为在 $C^{\infty}([0,T],\mathbf{R})$ 中所有满足条件 $u(0)=u(T)=0$ 的函数 u 的集合. 记分数阶导数空间 $E_0^{\alpha,p}$ 定义为在 $C_0^{\infty}([0,T],\mathbf{R}^N)$ 中 $\forall u\in E_0^{\alpha,p}$ 有如下范数

$$\|u\|_{\alpha,p}=\left(\int_0^T|u(t)|^p\mathrm{d}t+\int_0^T|{}_0D_t^{\alpha}u(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{1/p}$$

的完备化.

$\forall p(1\leqslant p<\infty)$,记

$$\|u\|_p=\left(\int_0^T|u|^p\mathrm{d}t\right)^{1/p}(1<p<\infty),$$

$$\|u\|_{\infty}=\operatorname{ess\,sup}\{|u(t)|:t\in[0,T]\}$$

为通常的 L^p 范数.

命题 1[11] 设 $0<\alpha\leqslant1$ 且 $1<p<\infty$,则分数阶导数空间 $E_0^{\alpha,p}$ 是自反可分的 Banach 空间.

命题 2[11] 设 $0<\alpha\leqslant1$ 且 $1<p<\infty$,则 $\forall u\in E_0^{\alpha,p}$ 有

$$\|u\|_p\leqslant T^{\alpha}\|{}_0D_t^{\alpha}u\|_p/\Gamma(\alpha+1).\tag{4}$$

此外,若 $\alpha>1/p$ 且 $1/p+1/q=1$,则

$$\|u\|_{\infty}\leqslant\frac{T^{\alpha/p}}{\Gamma(\alpha)((\alpha-1)q+1)^{1/q}}\|{}_0D_t^{\alpha}u\|_p.$$

根据(4) 式可知,在 $E_0^{\alpha,p}$ 上有如下等价的范数

$$\|u\|_{\alpha,p}=\|{}_0D_t^{\alpha}u\|_p=\left(\int_0^T|{}_0D_t^{\alpha}u(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{1/p}.$$

令 $E^{\alpha}=E_0^{\alpha,2}$ 是内积为

$$(u,v)=\int_0^T{}_0D_t^{\alpha}u(t)\,{}_0D_t^{\alpha}v(t)\mathrm{d}t$$

的希尔伯特空间且其范数为

$$\|u\|=\left(\int_0^T|{}_0D_t^{\alpha}u(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}.$$

更多地,根据命题 2,有

命题 3[11] 设 $1/2<\alpha<1$,则 $\forall p(1<p<$

∞),存在常数 $C_p > 0$,使得 $\forall u \in E^\alpha$ 有

$$\|u\|_p \leqslant C_p \|u\|.$$

命题 4[11]　设 $0 < \alpha \leqslant 1$ 且 $1 < p < \infty$. 假定 $\alpha > 1/p$ 且在 $E_0^{\alpha,p}$ 中,$u_k \xrightarrow{\text{弱}} u$,则在 $C([0,T],\mathbf{R}^N)$ 中有 $u_k \to u$,即当 $k \to \infty$ 时,有 $\|u - u_k\|_\infty \to 0$.

2　变分结构和主要结论的证明

为了构建问题相应的变分框架,首先对 $W(t,u)$ 关于 u 在原点的某个邻域以外进行修改并补充定义以获得如下全局有定义的 $\tilde{W}(t,u)$.

选定一常数 $b \in (0,\delta/2)$ 并定义一个截断函数 $\chi \in C^1(\mathbf{R}^+,\mathbf{R}^+)$ 使得当 $0 \leqslant t \leqslant b$ 时,有 $\chi(t) \equiv 1$,当 $t \geqslant 2b$ 时,有 $\chi(t) \equiv 0$,且当 $b < t < 2b$ 时,有 $-2/b \leqslant \chi'(t) < 0$. $\forall t \in [0,T]$ 及 $u \in \mathbf{R}^N$,令

$$\tilde{W}(t,u) = \chi(|u|)W(t,u). \tag{5}$$

结合(H_1)、(H_2) 和 χ 的定义,$\forall t \in [0,T]$ 及 $u \in \mathbf{R}^N$,有

$$|\tilde{W}(t,u)| \leqslant c_1|u|, \tag{6}$$

其中 c_1 是假设(H_2) 中给定的常数. 并且存在某个常数 $c_2 > 0$ 使得 $\forall t \in [0,T]$ 及 $u \in \mathbf{R}^N$,有

$$|\nabla\tilde{W}(t,u)| \leqslant c_2. \tag{7}$$

现在引入如下修改后的分数阶边值问题:

$$\begin{cases} {}_tD_T^\alpha({}_0D_t^\alpha u(t)) = \nabla\tilde{W}(t,u(t)), \text{a. e. } t \in [0,T], \\ u(0) = u(T) = 0, \end{cases} \tag{8}$$

并在 E^α 上定义了相应的变分泛函 Φ 为

$$\Phi(u) = \int_0^T (|{}_0D_t^\alpha u(t)|^2/2 - \tilde{W}(t,u(t)))\mathrm{d}t = \|u\|^2/2 - \int_0^T \tilde{W}(t,u(t))\mathrm{d}t = \|u\|^2/2 - \Psi(u), \tag{9}$$

其中 $\Psi(u) = \int_0^T \tilde{W}(t,u(t))\mathrm{d}t$.

定义 4　在定理 1 的条件下,Φ 是定义在 E^α 上的一个连续 Frechet 可微的函数,即 $\Phi \in C^1(E^\alpha,\mathbf{R})$. 此外,$\forall u,v \in E^\alpha$,有

$$\Phi'(u)v = \int_0^T (({}_0D_t^\alpha u(t),{}_0D_t^\alpha v(t)) - (\nabla W(t,u(t)),v(t)))\mathrm{d}t,$$

因此,得到

$$\Phi'(u)u = \int_0^T |{}_0D_t^\alpha u(t)|^2\mathrm{d}t - \int_0^T (\nabla W(t,u(t)),u(t))\mathrm{d}t = \|u\|^2 - \int_0^T (\nabla W(t,u(t)),u(t))\mathrm{d}t.$$

进一步,Φ 的任意临界点是分数阶边值问题(8) 的弱解.

命题 5　假设 W 满足条件(H_1) 和(H_2),则 $\Psi \in C^1(E^\alpha,\mathbf{R})$,并且 $\forall u,v \in E^\alpha$,有

$$\langle \Psi'(u),v\rangle = \int_0^T (\nabla\tilde{W}(t,u(t)),v(t))\mathrm{d}t, \tag{10}$$

$$\langle \Phi'(u),v\rangle = (u,v) - \int_0^T (\nabla\tilde{W}(t,u(t)),v(t))\mathrm{d}t. \tag{11}$$

此外,Φ 在 E^α 中的临界点是分数阶边值问题(8) 的解.

证　首先,$\forall u \in E^\alpha$,由(4) 式和(6) 式,有

$$\int_0^T |\nabla\tilde{W}(t,u(t))|\,\mathrm{d}t \leqslant c_1\int_0^T |u(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant c_1 T\|u\|,$$

因此,再结合(9) 式可知 Φ 和 Ψ 均是定义合理的.

接下来将证明 $\Psi \in C^1(E^\alpha,\mathbf{R})$. $\forall u \in E^\alpha$,定义相关的线性算子 $\lambda(u): E^\alpha \to \mathbf{R}$ 为

$$\langle \lambda(u),v\rangle = \int_0^T (\nabla\tilde{W}(t,u(t)),v(t))\mathrm{d}t, \tag{12}$$

其中 $v \in E^\alpha$. 根据(4) 和(7) 式可得

$$|\langle \lambda(u),v\rangle| \leqslant \int_0^T |\nabla\tilde{W}(t,u(t))| \cdot |v(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant c_2\int_0^T |v(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant c_2 T\|v\|,$$

故 $\lambda(u)$ 是定义合理的且有界. $\forall u,v \in E^\alpha$,结合(4) 和(7) 式,由中值定理和勒贝格收敛定理知

$$\lim_{s\to 0}(\Psi(u+sv) - \Psi(u))/s = \lim_{s\to 0}\int_0^T \nabla\tilde{W}(t,u(t) + \theta(t)sv)v(t)\mathrm{d}t = \int_0^T \nabla\tilde{W}(t,u(t))v(t)\mathrm{d}t = \langle \lambda(u),v\rangle,$$

其中 $\theta(t) \in [0,1]$. 该式表示 Ψ 在 E^α 上是 Gâteaux 可微的且 Ψ 关于 $u \in E^\alpha$ 的 Gâteaux 导数是 $\lambda(u)$. 现假设在 E^α 中 $u_n \to u$,则在 $C([0,T],\mathbf{R}^N)$ 中有 $u_n \to u$. 由 $\nabla\tilde{W}(t,u(t))$ 的连续性和勒贝格控制收敛定理得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T |\nabla\tilde{W}(t,u_n(t)) - \nabla\tilde{W}(t,u(t))|^2\mathrm{d}t = 0. \tag{13}$$

由(12) 和(13) 式及 Hölder 不等式,有

$$\|\lambda(u_n) - \lambda(u)\|_{E^\alpha} = \sup_{\|v\|=1}|\langle(\lambda(u_n) - \lambda(u)),v\rangle| \leqslant \sup_{\|v\|=1}\left|\int_0^T (\nabla\tilde{W}(t,u_n) - \nabla\tilde{W}(t,u))v\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \sup_{\|v\|=1}\left(\int_0^T |\nabla\tilde{W}(t,u_n) - \nabla\tilde{W}(t,u)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}\left(\int_0^T |v|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2} \leqslant C_2\left(\int_0^T |\nabla\tilde{W}(t,u_n) - \nabla\tilde{W}(t,u)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2} \to 0,$$

这意味着 λ 关于 u 是连续的. 因此证明了 $\Psi \in C^1(E^\alpha,\mathbf{R})$ 和(10) 式成立. 再根据 Φ 在(9) 式中的定义形式可知,$\Phi \in C^1(E^\alpha,\mathbf{R})$ 和(11) 式成立.

最后,由定义 4 知 Φ 在 E^α 中的临界点是分数阶

边值问题(8)的弱解,再由标准的证明过程知弱解也是解(见文献[12],Corollary 3.1).命题5得证.

接下来,主要利用在文献[19]中被建立的一种变化形式的对称山路引理来证明本文的结果.在陈述该定理之前,先回顾亏格(genus)的概念.

设E^α为Banach空间,并且A为E^α的子集.若当$u\in A$时,有$-u\in A$,则称A为对称的.Γ表示E^α的所有不包含0的闭的对称子集的集族.$\forall A\in\Gamma$,通过定义A的亏格$\gamma(A)$存在从A到$\mathbf{R}^k/\{0\}$的一个奇数的连续映射的最小正整数k.若不存在这样的k,则定义A的亏格$\gamma(A)=\infty$.特别地,现令空集$\varnothing$的亏格$\gamma(\varnothing)=0$.对每个$k\in\mathbf{N}$,令$\Gamma_k=\{A\in\Gamma\mid\gamma(A)\geqslant k\}$.

定理2[19] 设E^α是无穷维Banach空间,$\Phi\in C^1(E^\alpha,\mathbf{R})$满足条件$\Phi(0)=0$,假设$\Phi$还满足

(Φ_1)Φ是有下界的且满足(PS)条件;

(Φ_2)$\forall k\in\mathbf{N}$,$\exists A_k\in\Gamma_k$使得$\sup\limits_{u\in A_k}\Phi(u)<0$.

则下述结论(i)和(ii)至少有1个成立:

(i)存在1个临界点序列$\{u_k\}$使得$\Phi(u_k)<0$且$\lim\limits_{k\to\infty}u_k=0$;

(ii)存在2个临界点序列$\{u_k\}$和$\{v_k\}$使得$\Phi(u_k)=0$,$u_k\neq0$,$\lim\limits_{k\to\infty}u_k=0$,$\Phi(v_k)<0$,$\lim\limits_{k\to\infty}\Phi(v_k)=0$且$v_k$收敛于某个非零极限.

为了应用上述定理2来证明本文的结果,将在引理1中验证在(9)式中定义的函数Φ满足定理2中的条件(Φ_1)和(Φ_2).

引理1 假设W满足条件(H_1)和(H_2),则Φ是有下界的且满足(PS)条件.

证 先结合(6)和(9)式以及命题3,$\forall u\in E^\alpha$,有

$$\Phi(u)=\|u\|^2/2-\int_0^T\tilde{W}(t,u(t))\mathrm{d}t\geqslant\|u\|^2/2-c_1\|u\|_1\geqslant\|u\|^2/2-c_1\|u\|,\tag{14}$$

其中c_1是在条件(H_2)中给定的常数,因此,Φ是有下界的.

接下来,证明Φ满足(PS)条件.设$\{u_n\}_{n\in\mathbf{N}}$是在E^α中的(PS)序列,即存在某个$d_0>0$,使得

$$|\Phi(u_n)|\leqslant d_0,\Phi'(u_n)\to0.\tag{15}$$

结合(14)和(15)式,$\forall n\in\mathbf{N}$,有

$$d_0\geqslant\|u_n\|^2/2-c_1\|u_n\|_1,\tag{16}$$

这意味着$\{u_n\}_{n\in\mathbf{N}}$在E^α中是有界的.因此,存在一个子列$\{u_{n_k}\}_{k\in\mathbf{N}}$及某个$u_0\in E^\alpha$,使得当$k\to\infty$时有

$$u_{n_k}\xrightarrow{\text{弱}}u_0.$$

从而由命题4可知,在L^1中,当$k\to\infty$时有

$$u_{n_k}\to u_0.$$

根据(7)式和勒贝格控制收敛定理,有

$$\left|\int_0^T(\nabla\tilde{W}(t,u_{n_k}(t))-\nabla\tilde{W}(t,u_0(t)),u_{n_k}(t)-u_0(t))\mathrm{d}t\right|\leqslant2c_2\int_0^T|u_{n_k}-u_0|\mathrm{d}t\to0.\tag{17}$$

进一步,因为u_n在E^α中有界,由(15)和(16)式可知当$k\to\infty$时,有

$$(\Phi'(u_{n_k})-\Phi'(u_0))(u_{n_k}-u_0)\to0.\tag{18}$$

结合(11)和(17)~(18)式可知,当$k\to\infty$时,

$$\|u_{n_k}-u_0\|^2=(\Phi'(u_{n_k})-\Phi'(u_0))(u_{n_k}-u_0)+\int_0^T(\nabla\tilde{W}(t,u_{n_k}(t))-\nabla\tilde{W}(t,u_0(t)),u_{n_k}(t)-u_0(t))\mathrm{d}t\to0,$$

这意味着当$k\to\infty$时,在E^α中有$u_{n_k}\to u_0$,因此,Φ满足(PS)条件.

引理2 假设W满足条件(H_1)和(H_2),则$\forall k\in\mathbf{N}$,在E^α中存在一个亏格$\gamma(A_k)=k$的闭集A_k使得$\sup\limits_{u\in A_k}\Phi(u)<0$.

证 借鉴在文献[20]中引理2.6的证明过程中所用到的一些技巧.设b_0是条件(H_3)中闭区间I_0的长度.$\forall k\in\mathbf{N}$,将I_0等分为k个闭子区间,并用I_i表示,其中$1\leqslant i\leqslant k$.则每个I_i的长度为$a\equiv b_0/k$.对于每个$i(1\leqslant i\leqslant k)$,令$t_i$为$I_i$的中心,$J_i$表示中心为$t_i$、长度为$a/2$的闭区间.选一个函数$\varphi\in C_0^\infty([-2T,2T],\mathbf{R}^N)$使得当$t\in[-a/4,a/4]$时,有$|\varphi(t)|\equiv1$,当$t\in[-2T,2T]\backslash[-a/2,a/2]$时,有$|\varphi(t)|\equiv0$,且对所有的$t\in[-2T,2T]$,有$|\varphi(t)|\leqslant1$.对每个$i(1\leqslant i\leqslant k)$,定义$\varphi_i\in C_0^\infty([0,T],\mathbf{R}^N)$为

$$\varphi_i(t)=\varphi(t-t_i),t\in[0,T].$$

显然,对每个$i(1\leqslant i\leqslant k)$及$\forall t\in J_i$,有

$$\operatorname{supp}\varphi_i\subset I_i,|\varphi_i(t)|=1,\tag{19}$$

并且对每个$i(1\leqslant i\leqslant k)$及$\forall t\in[0,T]$,有

$$|\varphi_i(t)|\leqslant1.\tag{20}$$

令

$$V_k=\{(r_1,r_2,\cdots,r_k)\in\mathbf{R}^k\mid\max_{1\leqslant i\leqslant k}|r_i|=1\},\tag{21}$$

$$W_k=\{\sum_{i=1}^k r_i\varphi_i\mid(r_1,r_2,\cdots,r_k)\in V_k\},\tag{22}$$

显然,V_k可与$\mathbf{R}^k$中的单位球面通过一个奇映射同胚.因此$\gamma(V_k)=k$.$\forall(r_1,r_2,\cdots,r_k)\in V_k$,定义映射$\Pi:V_k\to W_k$为

$$\Pi(r_1,r_2,\cdots,r_k)=\sum_{i=1}^k r_i\varphi_i,\tag{23}$$

则 Π 是奇的同胚映射,从而 $\gamma(W_k) = \gamma(V_k) = k$. 此外,由于 W_k 是紧的,故存在常数 $\sigma_k > 0$,使得 $\forall u \in W_k$,有

$$\| u \|^2 \leqslant \sigma_k. \tag{24}$$

$\forall s \in (0,b_0)$ 和 $u = \sum_{i=1}^{k} r_i\varphi_i \in W_k$,利用(9) 和(19) ~ (20) 式以及(5) 式中 $\tilde{W}$ 的定义,有

$$\varphi(su) = \| su \|^2/2 - \int_0^T \tilde{W}(t,s\sum_{i=1}^{k} r_i\Phi_i)\,\mathrm{d}t \geqslant s^2 \| u \|^2/2 - \sum_{i=1}^{k}\int_{I_i}\tilde{W}(t,sr_i\Phi_i)\,\mathrm{d}t = s^2 \| u \|^2/2 - \sum_{i=1}^{k}\int_{I_i} W(t,sr_i\Phi_i)\,\mathrm{d}t. \tag{25}$$

又由 V_k 的定义可得,$\forall u = \sum_{i=1}^{k} r_i\Phi_i \in W_k$,存在某个正整数 $i_u(1 \leqslant i_u \leqslant k)$ 使得 $| r_{i_u} | = 1$. 于是,有

$$\sum_{i=1}^{k}\int_{I_i} W(t,sr_i\Phi_i)\,\mathrm{d}t = \int_{J_{i_u}} W(t,sr_{i_u}\Phi_{i_u})\,\mathrm{d}t + \int_{I_{i_u}\setminus J_{i_u}} W(t,sr_{i_u}\Phi_{i_u})\,\mathrm{d}t + \sum_{i\neq i_u}\int_{I_i} W(t,sr_{i_u}\Phi_{i_u})\,\mathrm{d}t.$$

根据假设(H_3)、(19) ~ (20) 式及 V_k 的定义,得到

$$\int_{I_{i_u}\setminus J_{i_u}} W(t,sr_{i_u}\Phi_{i_u})\,\mathrm{d}t + \sum_{i\neq i_u}\int_{I_i} W(t,sr_{i_u}\Phi_{i_u})\,\mathrm{d}t \geqslant -\rho b_0 s^2, \tag{26}$$

其中 b_0 为证明开始所给的常数. 对于每个 $\delta_n \in (0, b_0)$,结合(5) 和(19) ~ (26) 式以及假设(H_3),有

$$\Phi(\delta_n u) \leqslant \sigma^k\delta_n^2/2 + \rho b_0\delta_n^2 - \int_{J_{i_u}} W(t,\delta_n r_{i_u}\tau_{i_u})\,\mathrm{d}t \leqslant \delta_n^2(\sigma_k/2 + \rho b_0 - M_n b_0/(2k)). \tag{27}$$

这里用到了 $\forall t \in J_{i_u}$,有 $| \delta_{r i_u}\varphi_{i_u} | \equiv \delta_n$. 注意到在假设$(\mathrm{H}_3)$ 中当 $n\to\infty$ 时有 $\delta_n \to 0, M_n \to\infty$. 于是可以取 $n_0 \in \mathbf{N}$ 足够大使得(27) 式中的右端是负的.

令

$$A_k = \{\delta_{n_0}u \mid u \in W_k\}.$$

则 $\gamma(A_k) = \gamma(W_k) = k$ 并且 $\sup_{u\in A_k}\Phi(u) < 0$. 引理 2 得证.

定理 1 的证明　根据引理 1 和引理 2 可知,在(9) 式中定义的泛函 Φ 满足定理 2 中的条件(Φ_1) 和(Φ_2). 因此,由定理 2 知,Φ 具有一列非平凡临界点 $\{u_k\} \subset E^\alpha$,他们满足:对于所有的 $k \in \mathbf{N}$ 有 $\Phi(u_k) \leqslant 0$,且在 E^α 中当 $k\to\infty$ 时有 $u_k \to 0$. 一方面,由命题 5 可知,这些 $\{u_k\}$ 都是分数阶边值问题(8) 的非平凡解. 另一方面,由命题 4 可知,E^α 能连续嵌入到 $C([0,T],\mathbf{R}^N)$ 中,故当 $k\to\infty$ 时有 $\max_{t\in[0,T]} | u_k(t) | \to 0$,这表明,$\exists k_0 \in \mathbf{N}$,当 $k \geqslant k_0$ 时,这些 $\{u_k\}$ 均是原来的分数阶边值问题(1) 的非平凡解. 定理 1 得证.

3　参考文献

[1] Lakshmikantham V, Vatsala A S. Basic theory of fractional differential equations [J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, 2008, 69(8): 2677-2682.

[2] Lakshmikantham V, Vatsala A S. General uniqueness and monotone iterative technique for fractional differential equations [J]. Applied Mathematics Letters, 2008, 21(8): 828-834.

[3] Kilbas A A, Srivastava H M, Trujillo J J. Theory and applications of fractional differential equations [M]. Amsterdam: Elsevier Science, 2006.

[4] Ahmad B, Nieto J J, Alsaedi A, et al. A study of nonlinear Langevin equation involving two fractional orders in different intervals [J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2012, 13(2): 599-606.

[5] Leszczynski J S, Blaszczyk T. Modeling the transition between stable and unstable operation while emptying a silo [J]. Granular Matter, 2011, 13(4): 429-438.

[6] Szymanek E. The application of fractional order differential calculus for the description of temperature profiles in a granular layer [M] // Mitkowski W, Kacprzyk J, Baranowski J. Advances in the Theory and Applications of Non-Integer Order Systems. Switzerland: Springer International Publishing, 2013(257): 243-248.

[7] Podlubny I. Fractional differential equations [M]. San Diego: Academic Press, 1999.

[8] 苏新卫,穆晓霞. 分数阶微分方程边值问题解的存在性 [J]. 河南师范大学学报:自然科学版, 2008, 36(1): 9-12.

[9] 梁秋燕. Banach 空间分数阶微分方程边值问题解的存在性 [J]. 郑州大学学报:理学版, 2013, 45(3): 32-36.

[10] Torres C. Mountain pass solution for a fractional boundary value problem [J]. Journal of Fractional Calculus and Applications, 2014, 5(1): 1-10.

[11] Jiao Feng, Zhou Yong. Existence of solutions for a class of fractional boundary value problems via critical point theory [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2011, 62(3): 1181-1199.

[12] Jiao Feng, Zhou Yong. Existence results for fractional boundary value problem via critical point theory [J]. International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering, 2012, 22(4): 1250086.

[13] Zhang Ziheng. Solutions for a class of fractional boundary value probem with mixed nonlinarities [J]. Bull Korean Math Soc,2016,53(5):1585-1596.
[14] Zhang Ziheng,Li Jing. Variational approach to solutions for a class of fractional boundary value problems [J]. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations,2015(11):1-10.
[15] Chen Jing,Tang Xianhua. Existence and multiplicity of solutions for some fractional boundary value problem via critical point theory [J]. Abstract and Applied Analysis, 2012,2012(1):185-195.
[16] 彭思梦.几类分数阶微分包含边值问题解的存在性研究 [D].吉首:吉首大学,2016.
[17] Bonanno G. A critical point theorem via the Ekeland variational principle [J]. Nonlinear Analysis:Theory,Methods and Applications,2012,75(5):2992-3007.
[18] Bai Chuanzi. Infinitely many solutions for a perturbed nonlinear fractional boundary-value problem [J]. Electronic Journal of Differential Equations,2013,2013(136):1-12.
[19] Kajikiya R. A critical point theorem related to the symmetric mountain pass lemma and its applications to elliptic equations [J]. Journal of Functional Analysis,2005,225(2):352-370.
[20] Zhang Qingye,Homoclinic solutions for a class of second order Hamiltonian systems [J]. Math Nachr, 2015,288(8/9):1073-1081.

The Existence of Infinitely Many Solutions for a Class of Fractional Boundary Value Problems

HE Xian,ZHANG Qingye *
(School of Mathematics and Statistics,Jiangxi Normal University,Nanchang Jiangxi 30022,China)

Abstract:The multiplicity of solutions for a class of fractional boundary value problems is studied in the paper by variational methods,where the nonlinearity is only defined near the origin. A variant of symmetric mountain pass lemma is mainly used to prove the existence of infinitely many solutions for them near the origin,which significantly enriches and improves the related results in the literature.

Key words:fractional;boundary value problem;variational method;symmetric mountain pass lemma

(责任编辑:曾剑锋)