

文章编号:1000-5862(2020)05-0521-09

基于改进粒子群优化的投资组合模型研究

吴琦¹, 高岳林^{1,2*}

(1. 北方民族大学数学与信息科学学院, 宁夏 银川 750021; 2. 北方民族大学宁夏科学计算与智能信息处理协同创新中心, 宁夏 银川 750021)

摘要:金融市场中投资者在应对不确定性风险的同时还要面临自身因素所导致的背景风险,在投资过程中存在许多不确定因素,而这些因素往往是模糊的.该文利用模糊集和可能性理论建立不同风险态度下含有背景风险的模糊不确定投资组合;同时考虑投资者对风险的喜好、交易费用等,建立了不同风险态度下含有背景风险和交易费用的可能性均值-下半方差模型,并提出一种求解该模型的带有选择规则的粒子群算法.以上海证券交易所180指数随机选取的8支证券为例组成投资组合,给出数值算例,数值实验仿真结果表明了所提出的模型和方法的有效性、可靠性.

关键词:投资组合模型;风险态度;背景风险;交易费用;粒子群算法

中图分类号:O 224;F 830. 59 **文献标志码:**A **DOI:**10. 16357/j. cnki. issn1000-5862. 2020. 05. 13

0 引言

投资组合的研究可以追溯到20世纪50年代, H. Markowitz^[1-2]的开创性著作对单一时期均值-方差投资组合进行了研究,如今以均值-方差模型为基础的投资组合问题已被大量学者进行了卓有成效的研究.如Cui Xiangyu等^[3]提出的行为风险厌恶模型,由于自适应风险厌恶的多周期均值-方差模型的时间不一致性,通过求解嵌套均值-方差博弈公式来研究时间一致的行为组合策略,将结果推广到具有锥约束的动态均值-方差公式的时间一致行为投资组合选择上. F. Guisjarro^[4]提出了一种新的在均值-方差投资组合优化问题中基数约束边界的求取方法. Guo Xu等^[5]证明了MV、Var和CVaR边界不仅依赖于风险资产的收益与背景资产的收益之间的协方差向量还依赖于背景资产收益的方差,并给出了MV、Mean-VaR和mean-CVaR有效边界的性质. Y. L. T. V. Silva等^[6]提出了一种能求解一类均值-方差PSP的统一多目标粒子群优化算法,还提出了一种基于3种机制的自适应排序方法,包括1种新的机制. I. Bajeux Besnainou等^[7]提出了带TEV约束和权重限制下的投资组合模型.

然而,现实的金融市场经常面临许多不确定因素,为了描述和刻画这些不确定信息,本文采用模糊集. L. A. Zadeh^[8]提出的模糊集和可能性理论为解决不确定性信息问题提供了有力的工具. S. Ramaswamy^[9]运用模糊决策理论,提出了一种投资组合模型,并在假设情景不准确的情况下,保证了投资组合的最小收益率.在可能性理论中, Yan Dawen等^[10]用模糊集理论中的区间数概念将经典均值-方差组合选择模型扩展到均值-下半方差模型,同时考虑银行的流动性要求,研究表明该模型对于具有最高或最低平均历史收益率和最优投资比例的风险资产具有较好的稳定性. Li Hongquan等^[11]提出了一种新的具有自适应指标的梯形模糊数,给出了新度量下的可能性期望均值、方差和偏度;然后,在模糊均值-方差模型和均值-方差-偏态模型中引入新的梯形模糊数进行最优资产配置. M. C. Chiu等^[12]通过将相关风险通过Wishart方差协方差矩阵过程引入动态MVP中,得到了最优组合策略的显式封闭解,并确定了最优策略稳定且表现良好的市场机制, Zhang Xili等^[13]提出了一种扩展均值-方差模型,该模型依赖于平均数和变异数的区间可能值.

上述研究通过改变风险和收益度量指标来使得模型更符合金融市场,如今研究者尝试对投资者的

收稿日期:2019-09-24

基金项目:国家自然科学基金(61561001),宁夏高等教育一流学科建设基金(NXYLXK2017B09)和北方民族大学重大专项(2019MS003)资助项目.

通信作者:高岳林(1963-),男,陕西榆林人,教授,博士生导师,主要从事最优化理论及应用、智能计算与智能信息处理、金融工程与风险管理研究. E-mail:gaoyuelin@263. net

风险态度进行分析. 效用理论假定, 持有极端理性态度的投资者是绝对的风险厌恶, 而把投资者对风险的态度统一说成是风险厌恶的过于绝对, 所以应该建立基于风险态度差异的投资组合模型, 并得到适合于不同投资者期望的的投资组合策略. 2013 年 R. C. Tsaur^[14] 提出的基于可能性理论的均值-标准差的模糊投资组合模型, 旨在对投资者的不同风险态度进行分析. A. B. Ruiz 等^[15] 提出了一种新的可信度投资组合选择模型, 其中引入损失厌恶度量作为目标函数, 与收益的期望值和低于平均的绝对半偏差作为风险度量. Zhou Xiaoyang 等^[16] 研究了基于变化保守-中性-攻击性态度的股票组合选择问题, 然后采用 ε -约束方法得到有效边界. 此外, 作为预期效用理论的一种替代, D. Kahneman 等^[17] 提出了前景理论, 该理论指出, 与确定性结果相比, 人们往往低估了不确定性结果的权重. C. Lisson^[18] 在概述经典的预期效用理论和前景理论的一些关键原则的缺点之后, 讨论了如何在实际中使用前景理论来获得投资者风险偏好的估计.

上述研究虽然考虑了模糊不确定性, 然而当投资者选择金融资产组合时, 他们面临着来自不同来源的未知市场风险和背景风险, 如劳动力收入、专有收入、房地产投资、健康问题引起的意外费用、健康保险等. J. Heaton 等^[19] 发现房产投资、劳动收入、医疗保险、健康状况等这些非金融市场因素产生的风险以及投资者拟持有的非金融资产产生的风险对投资组合产生一定的影响. 背景资产通常是非流动性或不可交易的, 投资者几乎不可能在短期内通过调整这些资产持有量来控制背景风险. 由于主要关注的是总风险, 而不是唯一的投资组合风险, 所以背景风险的存在可能会极大地影响投资者对金融资产的投资.

本文首先给出相关概念, 包括背景风险、交易费用等, 建立可能性均值-下半方差模型; 然后针对求解该模型设计了一种选择规则的粒子群算法; 最后运用中国股票市场的数据进行实证分析, 从投资者对风险的不同态度及含有背景风险和交易费用 2 个方面入手, 讨论风险态度、背景风险是如何影响具有背景风险的投资组合问题的.

1 基础知识与模型的建立

1.1 基础知识

定义 1^[20] 设模糊集 $\tilde{A} \in F(U)$, $\forall \gamma \in [0, 1]$, 则

$$[\tilde{A}]^\gamma = \{x \mid x \in U, \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \gamma\} = [a(\gamma), \bar{a}(\gamma)],$$

称 $[\tilde{A}]^\gamma$ 为 \tilde{A} 的 γ -水平截集, 其中 γ 被称为置信水平或置信度, $a(\gamma)$ 和 $\bar{a}(\gamma)$ 分别为 γ -水平截集的左端点和右端点.

定义 2^[20] 设 $\tilde{A} = (a, b, \alpha, \beta)$ 是梯形模糊数, 则含风险态度的梯形模糊数的隶属度函数 (见图 1) 定义为

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 1 - ((a-x)/\alpha)^k, & a-\alpha \leq x \leq a, \\ 1, & a \leq x \leq b, \\ 1 - ((x-b)/\beta)^k, & b \leq x \leq b+\beta, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \quad (1)$$

其中 $k(>0)$ 是风险态度的适应值. 通过求 (1) 式的导数可知, k 越小投资者对风险越厌恶.

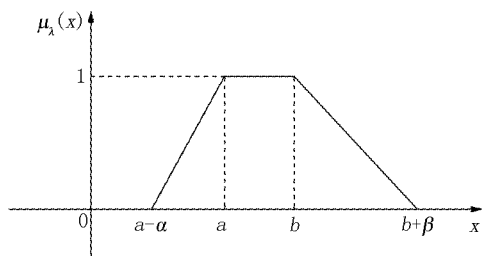


图 1 梯形模糊数 \tilde{A} 的隶属度函数图

由上述带有风险态度的梯形模糊数的定义以及 γ -水平截集的定义可得 \tilde{A} 的 γ -截集^[20] 为

$$[\tilde{A}]^\gamma = [a, \bar{a}] = [a - \alpha(1 - \gamma)^{1/k}, b + \beta(1 - \gamma)^{1/k}].$$

带有风险态度的梯形模糊数 \tilde{A} 的上、下可能性均值^[20] 为

$$M^+(\tilde{A}) = 2 \int_0^1 \gamma(b + \beta(1 - \gamma)^{1/k}) d\gamma = b + 2k^2\beta / ((2k+1)(k+1)), \quad (2)$$

$$M^-(\tilde{A}) = 2 \int_0^1 \gamma(a - \alpha(1 - \gamma)^{1/k}) d\gamma = a - 2k^2\alpha / ((2k+1)(k+1)). \quad (3)$$

由 (2) 式和 (3) 式可知, 带有风险态度的梯形模糊数 \tilde{A} 的清晰可能性均值^[20] 为

$$M(\tilde{A}) = (M^-(\tilde{A}) + M^+(\tilde{A})) / 2 = (a + b) / 2 + k^2(\beta - \alpha) / ((2k+1)(k+1)).$$

带有风险态度的梯形模糊数 \tilde{A} 的上、下可能性半方差^[21] 为

$$\text{Var}^+(\tilde{A}) = 2 \int_0^1 \gamma(M(\tilde{A}) - \bar{a}(\gamma))^2 d\gamma,$$

$$\text{Var}^-(\tilde{A}) = 2 \int_0^1 \gamma(M(\tilde{A}) - a(\gamma))^2 d\gamma.$$

1.2 模型的建立

证券市场是一个极其复杂的系统,证券的收益和风险也是不确定的,特别是人为因素在投资组合决策中的影响不可忽视.在现实生活的很多情况下证券的收益和风险都只能用一些模糊语言来描述,比如风险小收益低、风险大收益高等.这就使得投资者不得不在一个模糊不确定的环境下做出投资决策选择,极大影响了投资者的利益.为了叙述方便,首先对本文所涉及的相关符号进行说明: $\tilde{r}_i = (a_i, b_i, \alpha_i, \beta_i)$ 表示第*i*种金融风险资产的收益率; $\tilde{r}_b = (a_b, b_b, \alpha_b, \beta_b)$ 表示第*b*种背景风险资产的收益率; c_i 表示第*i*种资产的单位交易费用; $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 表示资产的投资组合; x_i 表示投资于第*i*种资产的投资比例; k 表示风险态度的适应值,其中 $k > 0$; $\text{Cov}(\tilde{r}_i, \tilde{r}_j)$ 表示资产*i*和资产*j*的可能性协方差; $\text{Cov}(\tilde{r}_i, \tilde{r}_b)$ 表示金融资产*i*和背景风险资产*b*的可能性协方差.

假设市场上有*n*种资产,每种资产的收益率为带有风险态度的梯形模糊变量 $\tilde{r}_i = (a_i, b_i, \alpha_i, \beta_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$),对应的 γ -水平截集为

$$[\tilde{r}_i] = [r_{i1}(\gamma), r_{i2}(\gamma)] = [a_i - \alpha_i(1 - \gamma)^{1/k}, b_i + \beta_i(1 - \gamma)^{1/k}].$$

金融风险资产的带有风险态度的隶属度函数^[20]为

$$\mu_{\tilde{r}_i}(x) = \begin{cases} 1 - ((a_i - x)/\alpha_i)^k, & a_i - \alpha_i \leq x \leq a_i, \\ 1, & a \leq x \leq b_i, \\ 1 - ((x - b_i)/\beta_i)^k, & b_i \leq x \leq b_i + \beta_i, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

假设背景风险资产收益率也是带有风险态度的梯形模糊变量 $\tilde{r}_b = (a_b, b_b, \alpha_b, \beta_b)$,对应的 γ -水平截集^[20]为

$$[\tilde{r}_b] = [r_{b1}(\gamma), r_{b2}(\gamma)] = [a_b - \alpha_b(1 - \gamma)^{1/k}, b_b + \beta_b(1 - \gamma)^{1/k}].$$

背景风险资产的隶属度函数^[20]为

$$\mu_{\tilde{r}_b}(x) = \begin{cases} 1 - ((a_b - x)/\alpha_b)^k, & a_b - \alpha_b \leq x \leq a_b, \\ 1, & a_b \leq x \leq b_b, \\ 1 - ((x - b_b)/\beta_b)^k, & b_b \leq x \leq b_b + \beta_b, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

假设投资策略是自融资的,即投资组合在调整的过程中没有新的资金投入,并采用常用的*V*型交易费用函数来表示.因此资产组合的总交易费用表示为

$$C = \sum_{i=1}^n c_i |x_i - x_i^0|.$$

于是,含有背景风险和交易费用的收益表示为

$$\tilde{R} = \sum_{i=1}^n \tilde{r}_i x_i + \tilde{r}_b - C.$$

因为梯形模糊数的线性组合还是梯形模糊数,所以

$$\sum_{i=1}^n \tilde{r}_i x_i + \tilde{r}_b = \left(\sum_{i=1}^n x_i a_i + a_b, \sum_{i=1}^n x_i b_i + b_b, \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i + \alpha_b, \sum_{i=1}^n x_i \beta_i + \beta_b \right).$$

带有风险态度的含有背景风险和交易费用的梯形模糊数 \tilde{R} 的清晰可能性均值为

$$M(\tilde{R}) = M\left(\sum_{i=1}^n \tilde{r}_i x_i + \tilde{r}_b - C\right) = \sum_{i=1}^n x_i M(\tilde{r}_i) +$$

$$M(\tilde{r}_b) - c_i |x_i - x_i^0| = \sum_{i=1}^n x_i ((a_i + b_i)/2 + k^2(\beta_i - \alpha_i)/((2k+1)(k+1))) + (b_b + a_b)/2 + k^2(\beta_b - \alpha_b)/((2k+1)(k+1)) - c_i |x_i - x_i^0|,$$

资产组合的清晰可能性下半方差可表示为

$$\text{Var}^-(\tilde{R}) = \text{Var}^-\left(\sum_{i=1}^n \tilde{r}_i x_i + \tilde{r}_b - C\right) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot$$

$$\text{Var}^-(\tilde{r}_i) + 2 \sum_{i < j=1}^n x_i x_j \text{Cov}^-(\tilde{r}_i, \tilde{r}_j) + \text{Var}^-(\tilde{r}_b) +$$

$$2 \sum_{i=1}^n x_i \text{Cov}^-(\tilde{r}_i, \tilde{r}_b) = \sum_{i=1}^n x_i^2 ((b_i - a_i)^2/4 + k^2 \alpha_i^2 / ((k+1)(k+2)) + k^2 (b_i - a_i)(\beta_i + \alpha_i) / ((2k+1)(k+1)(k+1)) + k^4 (\beta_i - \alpha_i)(\beta_i + 3\alpha_i) / ((2k+1)(k+1))^2) + \sum_{i < j=1}^n x_i x_j ((b_i - a_i)(b_j - a_j)/2 + k^2 ((b_i - a_i)(\alpha_j + \beta_j) + (b_j - a_j)(\alpha_i + \beta_i)) / ((2k+1)(k+1)) + 2k^2 \alpha_i^2 / ((k+1)(k+2)) + 2k^4 ((\beta_i - \alpha_i)(\alpha_j + \beta_j) + 2\alpha_i(\beta_j - \alpha_j)) / ((2k+1)(k+1))^2) + (b_b - a_b)^2/4 + k^2 \alpha_b^2 / ((k+1)(k+2)) + k^2 (b_b - a_b)(\beta_b + \alpha_b) / ((2k+1)(k+1)) + k^4 (\beta_b - \alpha_b)(\beta_b + 3\alpha_b) / ((2k+1)(k+1))^2) + \sum_{i=1}^n x_i ((b_i - a_i)(b_b - a_b)/2 + k^2 ((b_i - a_i)(\alpha_b + \beta_b) + (b_b - a_b)(\alpha_i + \beta_i)) / ((2k+1)(k+1)) + 2k^2 \alpha_i \alpha_b / ((k+1)(k+2)) + 2k^4 ((\beta_i - \alpha_i)(\alpha_b + \beta_b) + 2\alpha_i(\beta_b - \alpha_b)) / ((2k+1)(k+1))^2).$$

在传统的投资组合模型中,最常用的是用方差来度量风险的均值-方差模型,而事实上用方差来度量风险是有很不足:(i)只描述了收益的偏离程度,却没有描述偏离的方向;(ii)方差并没有反映

投资组合的价值的损失是多少^[22]. 于是本文以资产收益率的下可能性方差为标准来度量风险,以资产收益率的可能性均值为标准来度量收益,假设投资者是理性的,他要求投资组合净收益率必须大于给定最低要求水平,并在该前提下能够获得使资产组合的风险最小的最优投资组合策略,由此构建模型:

$$\begin{aligned} \min \text{Var}^-(\tilde{R}) &= \text{Var}^-\left(\sum_{i=1}^n \tilde{r}_i x_i + \tilde{r}_b - C\right) \\ \text{s. t. } M\left(\sum_{i=1}^n \tilde{r}_i x_i + \tilde{r}_b\right) - \sum_{i=1}^n c_i |x_i - x_i^0| &\geq r, \\ \sum_{i=1}^n x_i &= 1, x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (4)$$

其中 r 表示投资者对投资组合净收益率的最低要求水平; $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ 表示投资者在投资过程中,资产的投资比例之和为 1. 并且由 $x_i \geq 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ 知,整个投资过程是禁止卖空的,在模型(4)中满足第 1 个不等式约束条件的解组成了可行域 Q .

2 带有约束选择规则的粒子群算法

2.1 基本粒子群算法

基本粒子群^[23]首先生成一个初始种群,即在可行解空间中随机初始化一群粒子,每个粒子都是优化问题的一个可行解,并且由目标函数即适应度函数来确定一个适应度值,然后通过迭代找到最优解. 在每一次迭代中,粒子通过跟踪 2 个“极值”来更新自己. 第 1 个极值就是粒子本身到目前为止所找到的最优解,这个解被称为个体极值 p_{best} ,另一个极值是整个种群到目前为止所找到的最优解,这个极值被称为全局极值 g_{best} .

假设搜索空间是 D 维的,粒子总数为 N ,第 i 个粒子的位置表示为 $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iD})$,第 i 个粒子的速率表示为 $v_i = (v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{iD})$,其中 $i = 1, 2, \dots, N$,第 i 个粒子到目前为止搜索的最优位置为 $p_i = (p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{iD})$,整个粒子群到目前为止搜索到的最优位置是 $p_g = (p_{g1}, p_{g2}, \dots, p_{gD})$. 每个粒子的速率与当前位置根据如下等式^[23]进行变化:

$$v_{id}(t+1) = wv_{id}(t) + c_1 m(t)(p_{id} - x_{id}(t)) + c_2 m(t)(p_{gd} - x_{id}(t)), \quad (5)$$

$$x_{id}(t+1) = x_{id}(t) + v_{id}(t+1), \quad (6)$$

其中 c_1, c_2 为正常数(学习因子),作为调节向 p_i 和 p_g 方向飞行的最大步长; $m(t)$ 表示 $(0, 1)$ 中的随机数; w 为惯性权重,决定了粒子先前速率对当前速率

的影响程度. 第 $d (1 < d < D)$ 维的速率变化范围 $v_{id} \in [-v_{\max}, v_{\max}]$. (5) 式的第 1 部分被称为记忆项,表示前一次速度大小和方向对本次粒子运动的影响,第 2 部分被称为自我认知项,是从当前点指向粒子自身最好点的一个矢量,表示粒子的动作来源于自己经验的部分;第 3 部分被称为社会认知项,反映了粒子间的协同合作和知识共享. 粒子就是根据自己的经验和同伴中最好的经验来决定下一步的运动.

2.2 基于不等式约束的选择规则

在模型(4)中等式约束 $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ 和不等式约束

$x_i \geq 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ 分别表示资产的投资比例之和为 1 以及投资过程禁止卖空. 于是本文设计了一种基于归一化和不等式约束的选择规则的粒子群优化算法(PSO)来求解上述问题,PSO 首先生成初始中间种群,即在可行解空间中随机初始化一群中间粒子 (y_i, v'_i) ,对每个中间粒子的位置和速率进行如下归一化处理:

$$x_i = y_i / \sum_{j=1}^N y_j, v_i = v'_i / \sum_{j=1}^N v'_j,$$

其中 $\sum_{i=1}^N x_i = 1, \sum_{i=1}^N v_i = 1, i = 1, 2, \dots, N$.

归一化处理后的粒子 (x_i, v_i) 就成为初始归一化粒子群,并由目标函数确定一个适应值,然后通过迭代找到最优解. 在每一次的迭代过程中,粒子仍根据(5)~(6)式更新速率与当前位置.

惯性权重 w 是粒子群算法的重要参数之一. 选择一个合适的 w 可以平衡算法的收敛速度和收敛精度,这样就可以用最小的迭代次数寻求最优解. 而目前使用较多的是 Shi Yuhui 等^[24]的线性递减权重(LDW)策略,线性惯性权重递减的策略简单、直观,具有较好的寻优性能,因此被广泛地应用于各类优化问题中. 本文提出一种非线性指数递减惯性权重策略来增强算法的局部和全局搜索能力,具体形式^[25]为

$$w = (w_{start} - w_{end} - d_1) e^{1/(1+d_2 t/t_{\max})},$$

其中 t_{\max} 为最大的迭代次数, t 为当前的迭代次数, w_{start} 和 w_{end} 分别是初始惯性权重和在达到最大迭代次数时的惯性权重, d_1, d_2 为控制因子,目的是控制 w 取值在 w_{start} 和 w_{end} 之间.

2.3 目标-约束协同选择规则

如何处理约束条件是投资组合优化问题的求解难点,本文将基于目标-约束协同选择规则处理该约束条件,将模型(4)中第 1 个约束条件作为选择可行解的一个判断条件,在一个特定的超矩形上随机

产生 N 个初始中间粒子即初始可行解,对这些初始可行解进行归一化处理,根据上述所提出的粒子群算法进行 2 个候选解(即粒子位置)的比较,规则如下:

1) 找第 i 个粒子到目前为止的最优位置 $p_{best}(t+1)$.

(i) 若 t 代最优个体粒子和 $t+1$ 代粒子都在可行域内,则取适应度值小的个体作为 $t+1$ 代最优个体;

(ii) 若 t 代最优个体粒子和 $t+1$ 代粒子都不在可行域内,则取约束违反度小的个体作为 $t+1$ 代最优个体;

(iii) 若在 t 代最优个体粒子和 $t+1$ 代粒子中一个在可行域内,另一个不在可行域内,则取可行的个体作为 $t+1$ 代最优个体.

2) 找整个种群到目前為止的最优位置 $g_{best}(t+1)$.

当 $t+1$ 代粒子更新结束时,在粒子最优个体位置 $p_{best_i}(t+1)$ 中可行点组成的集合记作 $P = \{p_{best_i}(t+1) | p_{best_i}(t+1) \in Q, i=1,2,\dots,N\}$,其中 Q 为满足模型(4)第 1 个约束条件的可行域.

(i) 若 $P \neq \emptyset$,则取 P 中适应度值小的个体作为 $t+1$ 代全局最优个体;

(ii) 若 $P = \emptyset$,则取约束违反度小的个体作为 $t+1$ 代全局最优个体.

本文将候选解的约束违反度定义为

$$g(x) = |p(x)|,$$

其中 $p(x) = M(\sum_{i=1}^n \bar{r}_i x_i + \bar{r}_b) - \sum_{i=1}^n c_i |x_i - x_i^0| - r$ ($i=1,2,\dots,n$),显然,当 x 为可行解时,有 $g(x) = 0$.

2.4 改进粒子群算法的描述

步骤 1(初始化) 设置当前迭代次数 $t=0$,种群规模为 N ,粒子搜索空间维数为 D ,最大迭代次数为 M :

(i) 在特定超矩形上,随机产生 N 个初始中间粒子 (y_i, v_i) ,其中 y_i 为位置, v_i 为速率, $i=1,2,\dots,N$;

(ii) 对每个粒子 (y_i, v_i) 做关于位置 y_i 的归一化处理,即 $y_i/(y_1+y_2+\dots+y_N) \rightarrow x_i (i=1,2,\dots,N)$,从而初始种群为 $(x_i, v_i), i=1,2,\dots,N$;

步骤 2 找出到目前为止第 i 个粒子的最优位置 $p_{best}(t+1)$;

步骤 3 找出到目前为止整个种群的最优位置 $g_{best}(t+1)$;

步骤 4 根据(5)~(6)式更新每个粒子的速率与当前位置;

步骤 5 对步骤 4 中的 $t+1$ 代中间粒子 $(y_i(t+1), v_i(t+1))$ 的位置 $y_i(t+1)$ 再进行归一化处理,即

$x_i(t+1) = y_i(t+1)/(y_1(t+1) + y_2(t+1) + \dots + y_N(t+1))$,生成 $t+1$ 代种群 $(x_i(t+1), v_i(t+1))$,其中 $i=1,2,\dots,N$;

步骤 6 让 $t=t+1$,返回到步骤 2,直到粒子群到目前為止搜索到的最优位置满足预定最小适应阈值或满足最大迭代次数 M 时停止. 算法的流程图如图 2 所示.

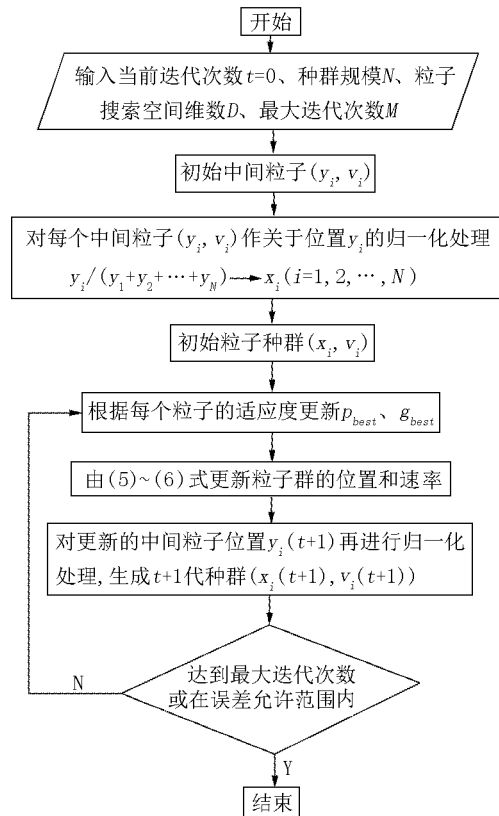


图2 改进粒子群算法流程图

3 数值算例

为了说明上述模型的有效性,下面给出数值算例.从上海证券交易所随机抽取 7 只股票以及建立 1 个背景风险资产,生成 8 个资产收益率的可能性分布^[20](见表 1).

表 1 资产收益率的可能性分布

资产	梯形模糊数
股票 1	(0.044 9, 0.050 5, 0.061 2, 0.067 9)
股票 2	(0.044 7, 0.050 2, 0.060 8, 0.067 5)
股票 3	(0.127 6, 0.143 6, 0.173 9, 0.193 0)
股票 4	(0.046 6, 0.052 4, 0.063 5, 0.070 5)
股票 5	(0.081 5, 0.091 7, 0.111 1, 0.123 3)
股票 6	(0.080 2, 0.090 2, 0.109 2, 0.121 3)
股票 7	(0.070 4, 0.079 2, 0.095 9, 0.106 5)
背景风险资产	(0.008 0, 0.009 0, 0.010 9, 0.012 1)

用上述所提出的智能算法来对模型进行求解. 算法的具体参数设置如下:种群规模 $N=30$;最大迭代次数 $M=300$; $\varepsilon=1.000\text{e}-7$; $c_1=c_2=1.8$;初始惯性权重和在达到最大迭代次数时的惯性权重分别取 $w_{start}=0.95$ 和 $w_{end}=0.40$,控制因子取 $d_1=0.2$ 和 $d_2=7.0$. 所有的试验是在 Matlab2015a 中运行的,电脑处理器为 Intel(R) Celeron(R) CPU G3900@2.80GHz, Windows 7.

为了求解这个算例,假定股票的交易费用比率为 0.003,投资者对资产组合净收益的最低要求水平为 0.085,然后利用上述智能算法对模型求解,得到投资策略(见表 2 和表 3).

由表 2 知,当风险态度适应值 $k=0.5$ 时,风险厌恶投资者按照以上 5 种投资策略对 7 种资产和 1 种背景风险资产进行投资,不同投资策略对资产的投资比例不同,除了第 3 种投资策略外其他投资策略的第 5 种资产所占的投资比例相对较高,而第 3 种投资策略中资产 3 所占的比例最大,并且只有第 1、5 种投资策略的背景风险资产所占比例最小,

可见背景风险资产所占的投资比例也不容忽视. 同时每个投资策略中收益是随下半方差增加而增加的. 图 3 给出了 5 种投资策略的下半方差随进化代数改变的变化曲线以及含有背景风险时风险厌恶投资者的有效前沿,可以看出改进后的粒子群算法大部分能够快速收敛到最优解.

当风险态度适应值 $k=1.0$ 时,风险中性投资者按照以上 5 种投资策略对 7 种资产和 1 种背景风险资产进行投资. 由表 3 知,在第 1、2、5 种投资策略中,第 3 种资产所占的投资比例最高,而第 3、4 种投资策略中,第 5 种资产所占投资比例最高并且他们的背景风险资产所占比例也是最小的,同时收益是随下半方差增加而增加的. 图 4 给出了 5 种投资策略的下半方差随进化代数改变的变化曲线以及含有背景风险时风险中性投资者的有效前沿,可以看出改进后的粒子群算法在这 5 种投资策略下前期能够快速收敛,并且算法在后 3 种投资策略中表现的稳定性较好.

表 2 风险厌恶投资者的投资组合策略、收益及下半方差

风险态度		投资组合				
k = 0.5	x_1	0.097 808	0.088 584	0.071 710	0.078 549	0.142 944
	x_2	0.101 787	0.126 925	0.208 112	0.089 107	0.122 229
	x_3	0.129 174	0.183 307	0.219 477	0.139 199	0.196 286
	x_4	0.071 289	0.052 337	0.053 313	0.078 244	0.104 890
	x_5	0.294 094	0.277 184	0.173 325	0.243 725	0.205 132
	x_6	0.148 071	0.073 141	0.098 707	0.234 897	0.110 566
	x_7	0.100 454	0.104 431	0.097 625	0.057 762	0.063 989
	x_8	0.057 322	0.094 092	0.077 731	0.078 515	0.053 964
	收益	0.085 015	0.085 028	0.085 040	0.085 062	0.085 066
	下半方差	0.001 844	0.001 848	0.001 852	0.001 859	0.001 861
时间		2.115 432	1.908 714	1.933 394	1.858 383	1.910 993

表 3 风险中性投资者的投资组合策略、收益及下半方差

风险态度		投资组合				
k = 1.0	x_1	0.208 799	0.152 841	0.087 190	0.101 458	0.094 910
	x_2	0.109 188	0.100 824	0.112 367	0.088 260	0.187 255
	x_3	0.226 598	0.210 530	0.131 723	0.153 494	0.195 873
	x_4	0.076 235	0.054 836	0.127 706	0.111 814	0.060 653
	x_5	0.160 028	0.178 685	0.214 819	0.300 355	0.148 793
	x_6	0.081 584	0.118 719	0.125 209	0.077 338	0.103 310
	x_7	0.068 104	0.081 548	0.160 244	0.091 614	0.144 134
	x_8	0.069 464	0.102 017	0.040 741	0.075 668	0.065 073
	收益	0.085 006	0.085 018	0.085 091	0.085 102	0.085 135
	下半方差	0.005 408	0.005 411	0.005 427	0.005 433	0.005 444
时间		1.820 047	1.793 667	1.751 731	1.797 939	1.753 298

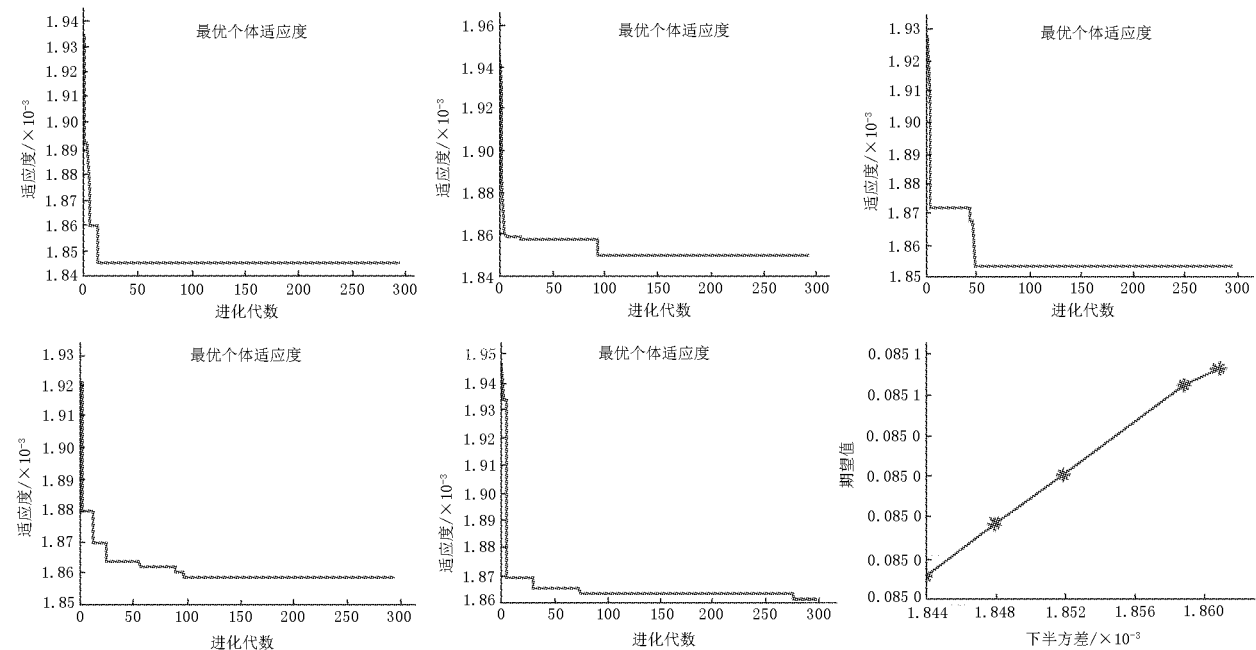


图3 含有背景风险时风险厌恶投资者的有效前沿

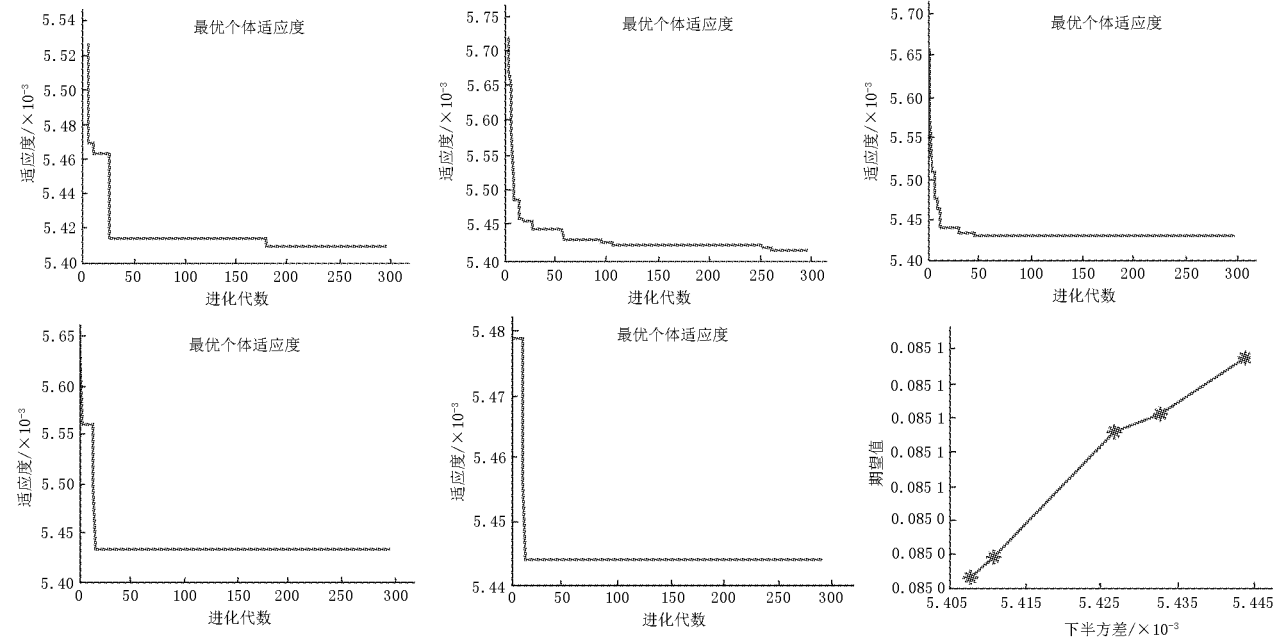


图4 含有背景风险时风险中性投资者的有效前沿

由表4知,当风险态度适应值 $k=2.0$ 时,风险寻求投资者按照以上5种投资策略对7种资产和1种背景风险资产进行投资,在前3种投资策略中,第5种资产所占的投资比例最大,而在后2种投资策略中,第3种资产所占投资比例最大,而且只有第2种投资策略的背景风险资产所占比例最小,因此背景风险资产对投资者的投资过程会产生不容小觑的影响,同时可以看出收益越高风险越大,比较符合高风险高收益这一原则。图5给出了5种投资策略的下半方差随进化代数改变的变化曲线以及含有背景风险时风险寻求投资者的有效前沿,可以看出算

法在后4种投资策略下能够较快收敛到最优解。

图6给出了含有背景风险时投资者在不同风险态度下的有效前沿对比图,当风险态度不同即 k 值(风险态度适应值)不同时,投资者对投资策略的选择是不同的, k 值越小投资者越厌恶风险,可看出用下半方差度量的风险是最小的,即投资者对风险是厌恶的,希望将风险降到最小。随着 k 值的增大,风险也会随之增大,即风险寻求投资者会对高风险感兴趣。综合表2~表4,从每个投资策略中的下半方差以及对应的收益值看出随着下半方差的增大,收益也随之增加,同时也符合高风险高收益的准则。

表 4 风险寻求投资者的投资组合策略、收益及下半方差

风险态度		投资组合				
$k = 2.0$	x_1	0.101 442	0.089 823	0.115 925	0.140 708	0.127 902
	x_2	0.088 631	0.125 571	0.119 198	0.107 219	0.108 708
	x_3	0.124 731	0.124 239	0.180 360	0.189 830	0.181 400
	x_4	0.076 912	0.087 642	0.100 106	0.060 244	0.067 506
	x_5	0.220 689	0.243 845	0.235 399	0.180 043	0.167 025
	x_6	0.168 965	0.182 184	0.078 983	0.067 751	0.098 391
	x_7	0.136 662	0.077 928	0.077 301	0.155 826	0.154 311
	x_8	0.081 966	0.068 768	0.092 728	0.098 379	0.094 756
	收益	0.085 018	0.085 025	0.085 032	0.085 038	0.085 054
	下半方差	0.015 236	0.015 252	0.015 266	0.015 284	0.015 315
时间		1.883 854	1.932 653	3.003 465	1.877 721	1.932 620

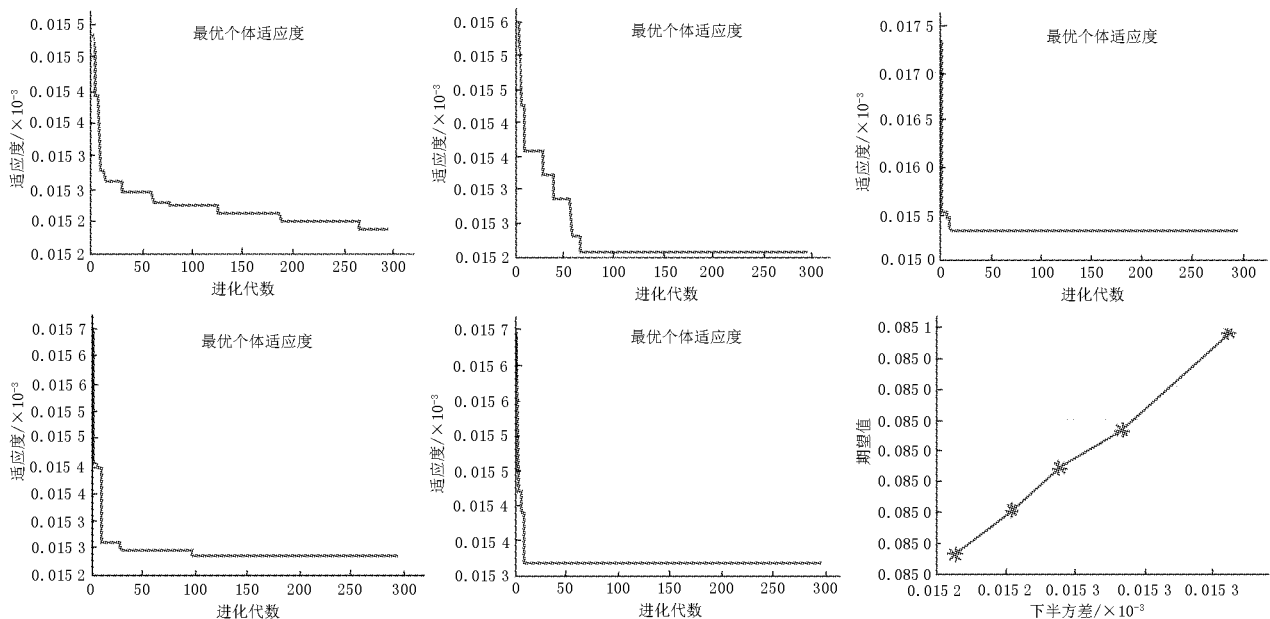


图 5 含有背景风险时风险寻求投资者的有效前沿

度量风险,用资产收益率的可能性均值来度量收益.同时,综合考虑投资者对风险的不同态度、背景风险以及交易费用等决策因素,构建了一个可能性均值-下半方差投资组合优化模型.为了更好地描述不同投资者的投资策略,设计了归一化的粒子群算法对模型进行求解,并给出了具体的算例来说明模型的实用性以及算法的有效性.研究结果表明:投资者对风险的态度会影响投资者的投资策略,风险厌恶者会选择风险小的投资策略,风险寻求投资者会对高风险感兴趣;同时,投资者考虑背景风险因素,会在从事投资时收获较大的收益,避免不必要的风险.

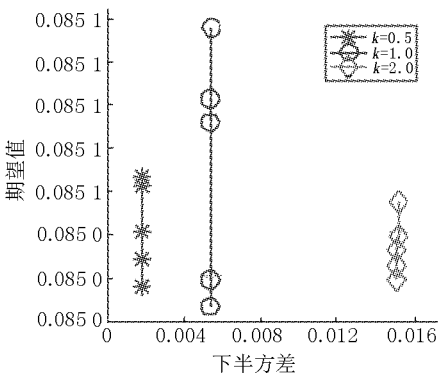


图 6 含有背景风险时投资者在不同风险态度下的有效前沿对比图

4 总结

本文研究了不同风险态度下含有背景风险和交易费用的投资组合问题.针对现有的方差度量风险可能没有反映投资组合的价值损失,用下半方差来

5 参考文献

[1] Markowitz H. Portfolio selection [J]. The Journal of Finance, 1952, 7(1): 77-91.
[2] Markovitz H. Portfolio selection: efficient diversification of investments [M]. New York: John Wiley, 1959.
[3] Cui Xiangyu, Li Xun, Li Duan, et al. Time consistent be-

- havioral portfolio policy for dynamic mean-variance formulation [J]. *Journal of the Operational Research Society*, 2017, 68(12):1647-1660.
- [4] Guijarro F. A similarity measure for the cardinality constrained frontier in the mean-variance optimization model [J]. *Journal of the Operational Research Society*, 2018, 69(6):928-945.
- [5] Guo Xu, Chan R H, Wong Wingkeung, et al. Mean-variance, mean-VaR, and mean-CVaR models for portfolio selection with background risk [J]. *Risk Management*, 2019, 21(2):73-98.
- [6] Silva Y L T V, Herthel A B, Subramanian A. A multi-objective evolutionary algorithm for a class of mean-variance portfolio selection problems [J]. *Expert Systems with Applications*, 2019, 133:225-241.
- [7] Bajeux Besnainou I, Belhaj R, Maillard D, et al. Portfolio optimization under tracking error and weights constraints [J]. *Journal of Financial Research*, 2011, 34(2):295-330.
- [8] Zadeh L A. Fuzzy sets [J]. *Information and Control*, 1965, 8(3):338-353.
- [9] Ramaswamy S. Portfolio selection using fuzzy decision theory [R]. BIS Working Papers, 1998.
- [10] Yan Dawen, Hu Yaxing, Lai Kinkeung. A nonlinear interval portfolio selection model and its application in banks [J]. *Journal of Systems Science and Complexity*, 2018, 31(3):696-733.
- [11] Li Hongquan, Yi Zhihong. Portfolio selection with coherent investor's expectations under uncertainty [J]. *Expert Systems with Applications*, 2019, 133:49-58.
- [12] Chiu M C, Wong H Y. Mean-variance portfolio selection with correlation risk [J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2014, 263:432-444.
- [13] Zhang Xili, Zhang Weiguo, Xu Weijun. An optimization model of the portfolio adjusting problem with fuzzy return and a SMO algorithm [J]. *Expert Systems with Applications*, 2011, 38(4):3069-3074.
- [14] Tsaur R C. Fuzzy portfolio model with different investor risk attitudes [J]. *European Journal of Operational Research*, 2013, 227(2):385-390.
- [15] Ruiz A B, Saborido R, Bermúdez J D, et al. Preference-based evolutionary multi-objective optimization for portfolio selection: a new credibilistic model under investor preferences [J]. *Journal of Global Optimization*, 2020, 76(2):295-315.
- [16] Zhou Xiaoyang, Wang Jue, Yang Xiangping, et al. Portfolio selection under different attitudes in fuzzy environment [J]. *Information Sciences*, 2018, 462:278-289.
- [17] Kahneman D, Tversky A. Prospect theory: an analysis of decisions under risk [J]. *Econometrica*, 1979, 47(2):263-291.
- [18] Lisson C. Using prospect theory to determine investor risk aversion [M] // Liermann V, Stegmann C. *The Impact of Digital Transformation and FinTech on the Finance Professional*. Cham: Palgrave Macmillan, 2019:79-93.
- [19] Heaton J, Lucas D. Portfolio choice and asset prices: the importance of entrepreneurial risk [J]. *The Journal of Finance*, 2000, 55(3):1163-1198.
- [20] 李佳. 多种测度下含有背景风险的投资组合模型研究 [D]. 广州: 华南理工大学, 2017.
- [21] Saeidifar A, Pasha E. The possibilistic moments of fuzzy numbers and their applications [J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2009, 223(2):1028-1042.
- [22] 徐成贤, 薛宏刚. 金融工程: 计算技术与方法 [M]. 北京: 科学出版社, 2007:190.
- [23] 李会荣. 融合粒子群的全局优化混合智能算法研究 [D]. 银川: 北方民族大学, 2009.
- [24] Shi Yuhui, Eberhart R C. Empirical study of particle swarm optimization [C] // *Proceedings of the 1999 Congress on Evolutionary Computational Intelligence*, Washington DC: IEEE, 1999, 3:1945-1950.
- [25] 李会荣, 高岳林, 李济民. 一种非线性递减惯性权重策略的粒子群优化算法 [J]. *商洛学院学报*, 2007, 21(4):16-20.

The Study on Portfolio Model Based on Improved Particle Swarm Optimization

WU Qi¹, GAO Yuelin^{1,2*}

(1. Research Institute of Information and System Computation Science, North Minzu University, Yinchuan Ningxia 750021, China;

2. Ningxia Scientific Computing and Intelligent Information Processing Co-Innovation Center, Yinchuan Ningxia 750021, China)

Abstract: In the financial market, while dealing with the uncertainty risk, investors have to face the background risk caused by their own factors. There are many uncertain factors in the investment process, and these factors are often vague. Therefore, it uses fuzzy set and possibility theory to establish fuzzy uncertain portfolio with background risk under different risk attitudes. At the same time, considering investors' preference for risk, transaction cost and so on, a mean-lower variance model with background risk and transaction cost under different risk attitudes is established. A particle swarm optimization algorithm with selection rules for solving the model is proposed. A numerical example is given based on the portfolio of eight securities randomly selected by the 180 index of Shanghai Stock Exchange. The numerical simulation results show the validity and reliability of the model and the method.

Key words: portfolio model; risk attitude; background risk; transaction cost; particle swarm optimization

(责任编辑: 曾剑锋)