文章编号:1000-5862(2020)06-0590-04

广义 Laplace-Stieltjes 变换所表示整函数的 β 级和广义型

宁菊红[1],宋文佩[2],黄文平[3]

(1. 江西师范大学数学与统计学院,江西 南昌 330022;2. 苏州湾初级实验中学,江苏 苏州 215200;
3. 陆军步兵学院基础部数学教研室,江西 南昌 330103)

摘要: 该文研究了由广义 Laplace-Stieltjes 变换所表示的整函数的增长性. 首先介绍了由广义 Laplace-Stieltjes 变换所表示的整函数在圆周上的最大模、最大项的定义;其次研究并得到了由最大模、最大项所表示的整函数的 β 级、广义型和用 A_n、λ_n 所表示的整函数的 β 级、广义型之间的等价关系;最后给出了定理的相应推论,得到了 Laplace-Stieltjes 变换所表示的整函数在圆周上的 β 级、广义型.

关键词: 整函数;广义 Laplace-Stieltjes 变换;最大模;最大项;β 级;广义型

中图分类号: O 174.52 **文献标志码:** A **DOI:** 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2020.06.07

0 引言

整函数的增长性是复分析的主要研究内容之一. 级和型是研究整函数增长快慢的主要工具[1-6]. 若 $f(z)$ 是整函数,记 $M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$,定义 $f(z)$ 的级 ρ_0 为

$$\rho_0 = \limsup_{r\to+\infty} \ln \ln M_f(r)/\ln r.$$

但当 $\rho_0 = 0$ 时,无法区分这些零级整函数增长的快慢,因此本文在第 1 节引进增长更缓慢的 β 级,在第 2 节引进关于 β 级的广义型.

本文主要研究定义在右半平面的一条 Jordan 曲线上的广义 Laplace-Stieltjes 变换(广义 L-S 变换)所表示整函数的 β 级和广义型. 为此,首先介绍一些常用符号. 记闭角形区域 $G_\tau = \{z: |\arg z| \leqslant \tau < \pi/2(\tau \geqslant 0)\}$. 记 L 为 G_τ 中的一条 Jordan 曲线,从原点出发,延伸至无穷远点. $\forall z \in L$,用 L_z 表示 L 上从原点到点 z 的部分,且包括 2 个端点 0 和 z,L_z 是可求长曲线,复变复值函数 $\alpha(z)$ 是 L_z 上的有界变差函数.

考虑广义 Laplace-Stieltjes 变换

$$F(s) = \int_L e^{-sz}\mathrm{d}\alpha(z),\ s = \sigma + \mathrm{i}t,\sigma,t \in \mathbf{R}, \quad (1)$$

且存在复数序列 $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L$ 满足下列条件 C:

(i) 记 $\mathrm{Re}\,\lambda_n = \omega_n$,$0 = \omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \cdots$,$\lim_{n\to\infty}\omega_n = +\infty$;

(ii) $\limsup_{n\to\infty}(\ln n)/\omega_n = D < +\infty$;

(iii) 若 $L_{\lambda_{n+1}} - L_{\lambda_n}$ 表示 $L_{\lambda_{n+1}}$ 去掉 L_{λ_n} 的部分,则存在常数 A_0 使得当 n 充分大且 $\lambda \in L_{\lambda_{n+1}} - L_{\lambda_n}$ 时,有 $|I_\lambda - I_{\lambda_n}| \leqslant A_0$,其中 I_λ 表示 L_λ 的长度.

用与文献[7]中定理 1.1 类似的方法,可以证明广义 Laplace-Stieltjes 变换在上述条件及条件 $\limsup_{n\to\infty}(\ln A_n)/\omega_n = -\infty$($A_n$ 见定义 1)下所表示的函数 $F(s)$ 为整函数. 本文就在上述条件下研究整函数 $F(s)$ 的增长性. 关于广义 L-S 变换目前也有一些研究成果[8-11].

为研究广义 L-S 变换所表示整函数的增长性,需要定义最大模、最大项.

定义 1[11] (1) 式所表示的整函数 $F(s)$ 的最大模、最大项可分别定义为

$$M(r,F) = \sup_{\lambda\in L,|s|=r}\left|\int_{L_\lambda} e^{-sz}\mathrm{d}\alpha(z)\right|,\ m(r,F) = \max_{1\leqslant n<+\infty} A_n e^{hr\omega_n}, \quad (2)$$

其中

$$h = 1 + \tan\tau(0 \leqslant \tau < \pi/2),$$

$$A_n = \sup_{\lambda\in L_{\lambda_{n+1}}-L_{\lambda_n},|s|=r\neq 0}\left|\int_{L_\lambda - L_{\lambda_n}} e^{(-s-hr)z}\mathrm{d}\alpha(z)\right|. \quad (3)$$

注 1 在全文中 A 为正常数,不同的地方取值

收稿日期:2020-07-29
基金项目:国家自然科学基金(11661044)资助项目.
作者简介:宁菊红(1977-),女,河南三门峡人,副教授,博士,主要从事复分析研究. E-mail:ningjuh@163.com

不同.

1　广义 L-S 变换所表示整函数的 β 级

为区别零级整函数的增长性,需要引进增长更缓慢的 β 级,首先介绍 β 类函数.

定义 2 [12-13]　令 Λ 表示所有满足下列条件的 $\beta(x)$ 所构成的集合:

(i) $\beta(x)$ 为定义在 $[a,+\infty)(a>0)$ 上,严格递增、可微的正函数,并且当 $x\to+\infty$ 时,$\beta(x)\to+\infty$;

(ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\beta'(x)=0$.

注 2　存在上述定义的函数,如 $\psi(x)=(\ln x)^c$, $0<c<1$; $\varphi(x)=\ln^{[p]}x$, $p\geqslant 2$, $\ln^{[p]}x=\ln(\ln^{p-1}x)$.

定义 3　若 $\beta(x)\in\Lambda$,由(1)式定义的广义 L-S 变换所表示的整函数 $F(s)$ 的 β 级定义为

$$\rho_\beta=\overline{\lim_{r\to+\infty}}\beta(\ln M(r,f))/r.$$

为证明本文定理,需要如下引理.

引理 1 [12]　若 $\beta(x)\in\Lambda$,则对任意常数 $c>0$,有

$$\lim_{x\to\infty}\beta(cx)/\beta(x)=1,\ \lim_{x\to\infty}\beta(c+x)/\beta(x)=1.$$

引理 2 [11]　若 $F(s)$ 为(1)式所表示的整函数,则 $\forall\varepsilon>0$,有

$$m(r,F)/(Ar)\leqslant M(r,F)\leqslant A\mathrm{e}^{Ar}m((1+2\varepsilon)r,F),$$

其中 $M(r,F)$、$m(r,F)$ 由(2)式定义.

定理 1　若 $F(s)$ 为(1)式所表示的整函数,则有

$$\limsup_{r\to+\infty}\beta(\ln M(r,F))/r=\rho_\beta\Leftrightarrow$$

$$\limsup_{n\to\infty}(\ln A_n)/(h\omega_n\beta(h\omega_n))=\begin{cases}-\infty, & \rho_\beta=0,\\ -1/\rho_\beta, & 0<\rho_\beta<+\infty,\\ 0, & \rho_\beta=+\infty.\end{cases}$$

证　先在 $0<\rho_\beta<+\infty$ 下证必要性.

若 $\limsup\limits_{r\to+\infty}\beta(\ln M(r,F))/r=\rho_\beta$,则 $\forall\varepsilon>0$, $\exists r_0>0$,当 $r>r_0$ 时,$\beta(\ln M(r,F))\leqslant(\rho_\beta+\varepsilon)r$,所以

$$M(r,F)\leqslant\exp(\beta^{-1}((\rho_\beta+\varepsilon)r)).$$

由引理 2 可知,

$$m(r,F)\leqslant ArM(r,F)<Ar\exp(\beta^{-1}((\rho_\beta+\varepsilon)r)),$$

则有

$$A_n\exp(h\omega_n r)\leqslant Ar\exp(\beta^{-1}((\rho_\beta+\varepsilon)r)),\text{即}$$

$$\ln A_n\leqslant\ln Ar+\beta^{-1}((\rho_\beta+\varepsilon)r)-h\omega_n r.$$

令

$$r_n=(1/(\rho_\beta+\varepsilon))\beta((h\omega_n-1)/(\rho_\beta+\varepsilon)),$$

取 $r=r_n$ 代入上式可得

$$\ln A_n\leqslant\ln\frac{A}{\rho_\beta+\varepsilon}+\ln\beta\left(\frac{h\omega_n-1}{\rho_\beta+\varepsilon}\right)-\frac{h\omega_n}{\rho_\beta+\varepsilon}\beta\cdot\left(\frac{h\omega_n-1}{\rho_\beta+\varepsilon}\right)+\frac{h\omega_n-1}{\rho_\beta+\varepsilon}$$

和

$$\frac{\ln A_n}{h\omega_n\beta(h\omega_n)}\leqslant\frac{\ln(A/(\rho_\beta+\varepsilon))}{h\omega_n\beta(h\omega_n)}+\frac{\ln\beta((h\omega_n-1)/(\rho_\beta+\varepsilon))}{h\omega_n\beta(h\omega_n)}-\frac{(h\omega_n/(\rho_\beta+\varepsilon))\beta((h\omega_n-1)/(\rho_\beta+\varepsilon))}{h\omega_n\beta(h\omega_n)}+\frac{h\omega_n-1}{(\rho_\beta+\varepsilon)h\omega_n\beta(h\omega_n)},$$

由引理 1 可知当 $n\to\infty$ 时,有 $\beta((h\omega_n-1)/(\rho_\beta+\varepsilon))$ 与 $\beta(h\omega_n)$ 是等价无穷大,因此由 ε 的任意性可得

$$\limsup_{n\to\infty}(\ln A_n)/(h\omega_n\beta(h\omega_n))\leqslant-1/\rho_\beta.$$

下证上面不等式的小于号不成立. 若 $\limsup\limits_{n\to\infty}(\ln A_n)/(h\omega_n\beta(h\omega_n))<-1/\rho_\beta$,则 $\exists\delta\in(0,\rho_\beta)$,使得 $\limsup\limits_{n\to\infty}(\ln A_n)/(h\omega_n\beta(h\omega_n))<-1/(\rho_\beta-\delta)$. 因此 $\exists N>0$, $\forall n>N$,有

$$A_n<\exp(-(h\omega_n\beta(h\omega_n)/(\rho_\beta-\delta))).$$

$\forall r>0$, $\forall\varepsilon>0$,有

$$A_n\mathrm{e}^{h\omega_n(1+2\varepsilon)r}<\exp(-h\omega_n\beta(h\omega_n)/(\rho_\beta-\delta)+h\omega_n(1+2\varepsilon)r)\leqslant\exp(\max_{x>0}(-x\beta(x)/(\rho_\beta-\delta)+x(1+2\varepsilon)r)).$$

令

$$h(x)=-x\beta(x)/(\rho_\beta-\delta)+x(1+2\varepsilon)r,x>0,$$

则当 $x_0=\beta^{-1}((\rho_\beta-\delta)(1+2\varepsilon)r-o(1))$ 时,$h_{\max}=o(1)\beta^{-1}((\rho_\beta-\delta)(1+2\varepsilon)r-o(1))/(\rho_\beta-\delta)$,从而有

$$A_n\mathrm{e}^{h\omega_n(1+2\varepsilon)r}<\exp(o(1)\beta^{-1}((\rho_\beta-\delta)(1+2\varepsilon)r-o(1))/(\rho_\beta-\delta)).$$

而由引理 2 可得

$$M(r,F)\leqslant A\mathrm{e}^{Ar}m((1+2\varepsilon)r,F)<A\mathrm{e}^{Ar}\cdot\exp(o(1)\beta^{-1}((\rho_\beta-\delta)(1+2\varepsilon)r-o(1))/(\rho_\beta-\delta)).$$

又由于

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{\beta(Ar+\beta^{-1}((\rho_\beta-\delta)(1+2\varepsilon)r)}{\beta((1+o(1))\beta^{-1}((\rho_\beta-\delta)(1+2\varepsilon)r))}=1,$$

由上式和引理 1 得

$$\limsup_{r\to+\infty}\beta(\ln M(r,F))/r=\rho_\beta-\delta<\rho_\beta.$$

这与已知条件矛盾,故 $\limsup\limits_{n\to\infty}(\ln A_n)/(h\omega_n\cdot\beta(h\omega_n))=-1/\rho_\beta$. 必要性得证. 类似地可证明充分性.

对$\rho_\beta=0$和$\rho_\beta=+\infty$的情形,证明可类似作出.

2 广义 L-S 变换所表示整函数的广义型

定义 4[14] 若$\rho_\beta\in(0,+\infty)$,设此时存在函数$\rho(t)$在$t\geqslant t_0,t_0>0$上单调、连续可微且满足$\lim\limits_{t\to+\infty}\rho(t)=\rho_\beta,\lim\limits_{t\to+\infty}\rho'(t)t\ln t=0$. 记$U(t)=t^{\rho(t)}(t>0)$,则称$U(t)$为$F(s)$的型函数,$\rho(t)$为$F(s)$的精确级. $\tau=\limsup\limits_{r\to+\infty}\beta(\ln M(r,F))/U(\mathrm{e}^r)$称为$F(s)$的广义型.

注 3[14] 令$x=U(t),t=W(x)(t>0,x>0)$,$U(t)$和$W(x)$互为反函数,且下列式子成立

$$\lim_{t\to+\infty}U(kt)/U(t)=k^{\rho_\beta},\lim_{x\to+\infty}W(kx)/W(x)=k^{1/\rho_\beta}(0<k<+\infty).$$

定理 2 若$F(s)$为(1)式所表示的整函数,则有

$$\tau=\limsup_{r\to+\infty}\frac{\beta(\ln M(r,F))}{U(\mathrm{e}^r)}=\limsup_{n\to\infty}\frac{\beta(h\omega_n)}{\mathrm{e}^{\rho_\beta}U(A_n^{-1/(h\omega_n)})},$$

其中$U(t)=t^{\rho(t)}(t>0)$是$F(s)$的型函数.

证 分 2 步证明.

(i) 若$\tau=\limsup\limits_{r\to+\infty}\beta(\ln M(r,F))/U(\mathrm{e}^r)$,则$\forall\varepsilon>0,\exists r_0>0$,当$r>r_0$时,有

$$M(r,F)<\exp(\beta^{-1}((\tau+\varepsilon)U(\mathrm{e}^r))).$$

由引理 2 可得

$$A_n<\exp(\beta^{-1}((\tau+\varepsilon)U(\mathrm{e}^r))-h\omega_n r+\ln Ar),$$

从而有

$$A_n^{-1/(h\omega_n)}>\exp(-\beta^{-1}((\tau+\varepsilon)U(\mathrm{e}^r))/(h\omega_n)+r-(\ln Ar)/(h\omega_n)).$$

令$r_n=\ln(W(\beta(h\omega_n)/(\tau+\varepsilon)))$,$W$为$U$的反函数,则

$$W(\beta(h\omega_n)/(\tau+\varepsilon))=\mathrm{e}^{r_n},$$

$$A_n^{-1/(h\omega_n)}>\exp(-1+\ln(W(\beta(h\omega_n)/(\tau+\varepsilon)))-(\ln Ar_n)/(h\omega_n)).$$

当n充分大时,由$\lim\limits_{t\to+\infty}U(kt)/U(t)=k^{\rho_\beta}$,$\lim\limits_{x\to+\infty}W(kx)/W(x)=k^{1/\rho_\beta}(0<k<+\infty)$可得

$$\mathrm{e}^{\rho_\beta}U(A_n^{-1/(h\omega_n)})>\mathrm{e}^{\rho_\beta}U(\exp(-1+\ln(W(\beta(h\omega_n)/(\tau+\varepsilon)))-(\ln Ar_n)/(h\omega_n))),$$

则

$$\beta(h\omega_n)/(\mathrm{e}^{\rho_\beta}U(A_n^{-1/(h\omega_n)}))<\tau+\varepsilon,$$

由ε的任意性,有

$$\limsup_{n\to\infty}\beta(h\omega_n)/(\mathrm{e}^{\rho}U(A_n^{-1/(h\omega_n)}))\leqslant\tau.$$

(ii) 令$T=\limsup\limits_{n\to\infty}\beta(h\omega_n)/(\mathrm{e}^{\rho_\beta}U(A_n^{-1/(h\omega_n)}))$,则$\forall\varepsilon>0$,存在正整数$N,\forall n>N$,有

$$A_n<W^{-h\omega_n}(\beta(h\omega_n)/(\mathrm{e}^{\rho_\beta}(T+\varepsilon))),$$

则

$$\ln m(r,F)<-h\omega_n\ln(W(\beta(h\omega_n)/(\mathrm{e}^{\rho_\beta}(T+\varepsilon))))+h\omega_n r.$$

结合引理 2,有

$$\ln M(r,F)<\ln A+Ar+h\omega_n(1+2\varepsilon)r-h\omega_n\cdot\ln(W(\beta(h\omega_n)/(\mathrm{e}^{\rho_\beta}(T+\varepsilon)))),$$

对于每个$n,\exists r_n$,满足下列方程

$$\beta^{-1}((T+\varepsilon)U(\mathrm{e}^{(1+2\varepsilon)r_n}))+h\omega_n\ln(W(\beta(h\omega_n)/(\mathrm{e}^{\rho_\beta}(T+\varepsilon))))=(h\omega_n(1+2\varepsilon)+A)r_n,$$

所以

$$\ln M(r_n,F)<\ln A+\beta^{-1}((T+\varepsilon)U(\mathrm{e}^{(1+2\varepsilon)r_n})),$$

则

$$\beta(\ln M(r_n,F))/U(\mathrm{e}^{(1+2\varepsilon)r_n})<T+\varepsilon,$$

由$\lim\limits_{n\to\infty}r_n=+\infty$和$\varepsilon$的任意性,得

$$\lim_{r\to+\infty}\beta(\ln M(r,F))/U(\mathrm{e}^r)\leqslant T.$$

结合(i)~(ii),定理 2 得证.

3 相关推论

若令$\tau=0$,则L为包含原点的正实半轴,序列$\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}\subset L$为实序列且$h=1$,此时

$$F(s)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}\alpha(x).\tag{4}$$

关于(4)式即 Laplace-Stieltjes 变换的增长性的研究,目前通过研究最大模$M_u(\sigma,F)$和$\mu(\sigma,F)$已得到一系列结果[15-19]. 当$h=1$时,(2)和(3)式变为

$$M(r,F)=\sup_{\lambda\in L,|s|=r}\left|\int_0^{\lambda}\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}\alpha(x)\right|,m(r,F)=\max_{1\leqslant n<+\infty}A_n\mathrm{e}^{r\lambda_n},$$

$$A_n=\sup_{\lambda\in L_{\lambda_{n+1}}-L_{\lambda_n},|s|=r\neq0}\left|\int_{\lambda_n}^{\lambda}\mathrm{e}^{(-s-r)x}\mathrm{d}\alpha(x)\right|.$$

由定理 1 和定理 2 得到下列推论.

推论 1 若$F(s)$为(4)式所表示的整函数,则有

$$\limsup_{r\to+\infty}\beta(\ln M(r,F))/r=\rho_\beta\Leftrightarrow$$

$$\limsup_{n\to\infty}(\ln A_n)/(\lambda_n\beta(\lambda_n))=\begin{cases}-\infty, & \rho_\beta=0,\\ -1/\rho_\beta, & 0<\rho_\beta<+\infty,\\ 0, & \rho_\beta=+\infty.\end{cases}$$

推论 2 若$F(s)$为(4)式所表示的整函数,则有

$$\tau=\limsup_{r\to+\infty}\beta(\ln M(r,F))/U(\mathrm{e}^r)=\limsup_{n\to\infty}\beta(\lambda_n)/(\mathrm{e}^{\rho_\beta}U(A_n^{-1/\lambda_n})),$$

其中$U(t)=t^{\rho(t)}(t>0)$是$F(s)$的型函数.

4 参考文献

[1] Levin B Ya. Lectures on Entire Functions [M]. Providence: Amercian Mathematical Society，1996: 3-8.

[2] 涂金，黄海霞，徐洪焱，等. 单位圆内亚纯函数与解析函数的级与型 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版，2013，37(5): 449-452.

[3] 涂金，吕凤恒，江杰. 整函数与解析函数的最大模 $M(r, f)$ 及其导函数 $M'(r, f)$ 增长性比较 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版，2019，43(4): 331-335.

[4] 涂金，孙合庆，刘杰. 整函数及复合整函数的相对 [p,q] 级与相对 [p,q] 型 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版，2020，44(1): 1-5.

[5] 吴世玕，宁菊红. 有限级 Dirichlet 级数 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版，2008，32(4): 388-391.

[6] 陆万春，易才凤. 在矩控制下随机 Dirichlet 级数的 $(p, q)(\mathbf{R})$ 型 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版，2012，36(5): 482-486，505.

[7] 余家荣. Laplace-Stieltjes 变换所定义的整函数之 Borel 线 [J]. 数学学报，1963，13(3): 471-484.

[8] 姜淑珍. 广义 Laplace-Stieltjes 变换的收敛性 [J]. 数学杂志，1989，9(1): 97-102.

[9] 姜淑珍. 广义 Laplace-Stieltjes 变换的准确零 (R) 级 [J]. 数学研究与评论，1997，17(2): 292-296.

[10] 宁菊红，周萍萍，黄文平. 广义 Laplace-Stieltjes 变换的无限级 [J]. 数学的实践与认识，2014，44(3): 245-254.

[11] 宁菊红，陈菁菁，邓冠铁. 广义 Laplace-Stieltjes 变换的 (p, q) 级 [J]. 北京师范大学学报: 自然科学版，2017，53(3): 263-266.

[12] Huang Huijun，Ning Juhong. Order of dirichlet series in the whole plane and remainder estimation [J]. Chin Quart J of Math，2015，30(4): 515-523.

[13] 陆万春，易才凤. Laplace-Stieltjes 变换所表示的解析函数的 β 级 [J]. 数学物理学报，2014，34A(5): 1236-1244.

[14] 刘素红，田宏根. Dirichlet 级数的增长性 [J]. 纯粹数学与应用数学，2013，29(3): 264-274.

[15] 徐洪焱. Laplace-Stieltjes 变换的对数级与对数型 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版，2017，41(2): 180-183.

[16] 王金莲，陆万春. 全平面上收敛的零级 Laplace-Stieltjes 变换的增长性 [J]. 兰州大学学报: 自然科学版，2013，49(1): 108-110.

[17] 张洪申，孙道椿. 右半平面上 Laplace-Stieltjes 变换的值分布 [J]. 数学学报: 中文版，2012，55(3): 535-542.

[18] 尚丽娜，高宗升. Laplace-Stieltjes 变换所定义的无限级整函数的增长性 [J]. 数学物理学报，2007，27A(6): 1035-1043.

[19] 李云霞，邓冠铁. Laplace-Stieltjes 变换所定义的有限级整函数的级与型 [J]. 北京师范大学学报: 自然科学版，2009，45(3): 244-246.

The β Order and Generalized Type of Entire Functions Represented by Generalized Laplace-Stieltjes Transforms

NING Juhong[1]，SONG Wenpei[2]，HUANG Wenping[3]

(1. School of Mathematics and Statistics，Jiangxi Normal University，Nanchang Jiangxi 330022，China;
2. Suzhouwan Experimental Junior Middle School，Suzhou Jiangsu 215200，China;
3. Basic Department，Army Infantry College，Nanchang Jiangxi 330103，China)

Abstract: The growth of the entire function represented by the generalized Laplace-Stieltjes transform is studied in this paper. Firstly，the definition of the maximum modulus and maximum term of the entire function is introduced. Secondly，the equivalence relation between the β order，generalized type of the entire function represented by the maximum modulus and maximum term and the β order，generalized type of the entire function represented by A_n、λ_n is studied and obtained. Finally，the corresponding corollaries of the theorem are given. The β order and generalized type of the entire function represented by Laplace-Stieltjes transform on the circumference are obtained.

Key words: entire functions; generalized Laplace-Stieltjes; maximum modulus; maximum term; β order; generalized type

(责任编辑: 王金莲)