第 44 卷 第 6 期 江西师范大学学报(自然科学版) Vol. 44 No. 6
2020 年 11 月 Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science) Nov. 2020

文章编号:1000-5862(2020)06-0594-05

慢增长 Laplace-Stieltjes 变换的 β-级和下 β-级

陆万春,陈楠楠

(萍乡学院工程与管理学院,江西 萍乡 337055)

摘要:通过定义 β-级,研究了在右半平面上收敛的慢增长 Laplace-Stieltjes 变换的 β-级及下 β-级,得到右半平面收敛的慢增长 Laplace-Stieltjes 变换的 β-级、下 β-级以及 β-正规增长的系数特征,推广了 Laplace-Stieltjes 变换及 Dirichlet 级数的相关结果.

关键词:Laplace-Stieltjes 变换;零级;β-级;下 β-级

中图分类号:O 174.52 文献标志码:A DOI:10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2020.06.08

0 引言

本文考虑如下的 Laplace-Stieltjes 变换

$$F(s)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}\alpha(x)\ (s=\sigma+\mathrm{i}t,\sigma,t\in\mathbf{R}),\tag{1}$$

其中 $\alpha(x)$ 是定义在 $[0,+\infty)$ 上的实数值或复数值函数,且在任何闭区间 $[0,X](0<X<+\infty)$ 上有界变差.

设序列 $\{\lambda_n\}$ 满足

$$0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n\uparrow+\infty\tag{2}$$

及

$$\varlimsup_{n\to\infty}(\lambda_{n+1}-\lambda_n)=h<+\infty,\ \varlimsup_{n\to\infty}n/\lambda_n=D<+\infty.\tag{3}$$

对于 Laplace-Stieltjes 变换(1),余家荣[1]证明了重要的 Valiron-Knopp-Bohr 公式. 而且,若序列 $\{\lambda_n\}$ 满足(2)和(3)式,则根据 Valiron-Knopp-Bohr 公式可知,当变换(1)满足

$$\varlimsup_{n\to\infty}(\log A_n^*)/\lambda_n=0\tag{4}$$

时,其中 $A_n^*=\sup\limits_{\lambda_n<x<\lambda_{n+1},t\in\mathbf{R}}\left|\int_{\lambda_n}^{x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ty}\mathrm{d}\alpha(y)\right|$,变换(1)所确定的函数 $F(s)$ 在右半平面 $\mathrm{Re}\ s\geqslant 0$ 上解析.

设 D_0 表示满足条件(2)~(4)的变换(1)所确定的函数 $F(s)$ 的全体. 对 $F(s)\in D_0$,记

$$M_u(\sigma,F)=\sup_{0<x<+\infty,t\in\mathbf{R}}\left|\int_0^x\mathrm{e}^{-(\sigma+\mathrm{i}t)y}\mathrm{d}\alpha(y)\right|,$$

$$\mu(\sigma,F)=\max_{1<n<+\infty}A_n^*\mathrm{e}^{-\lambda_n\sigma},$$

$$\lambda_{N(\sigma)}\equiv\lambda_{N(\sigma,F)}=\max(\lambda_n:\mu(\sigma,F)=A_n^*\mathrm{e}^{-\lambda_n\sigma}),$$

$M_u(\sigma,F)$、$\mu(\sigma,F)$、$\lambda_{N(\sigma)}$ 分别被称为函数 $F(s)$ 在右半平面上的最大模、最大项和最大项中心指标. 孔荫莹[2]证明了 $\log\mu(\sigma,F)$ 在 $\sigma>0$ 内是非增凸函数.

对于 $F(s)\in D_0$,为了研究其增长性,孔荫莹[2]将其级 ρ 和下级 λ 定义为

$$\rho=\varlimsup_{\sigma\to0}\frac{\log^+\log^+M_u(\sigma,F)}{-\log\sigma},$$

$$\lambda=\varliminf_{\sigma\to0}\frac{\log^+\log^+M_u(\sigma,F)}{-\log\sigma},$$

当 $\rho=0$ 时称变换(1)为零级 Laplace-Stieltjes 变换. 对于零级 Laplace-Stieltjes 变换,上述指标就不能很好地刻画其增长性. 为此,文献[3-4]通过定义对数级和对数型,研究了零级 Laplace-Stieltjes 变换的增长性,并得到对数级及对数型的相关系数特征,文献[5-6]在对数型的基础上进一步考虑了 Laplace-Stieltjes 变换的 λ^*-对数型和对数 p-型. 孔荫莹等[7-8]研究了在全平面上解析和在半平面上解析的慢增长 Laplace-Stieltjes 的广义级和广义型. 此外,关于无穷级 Laplace-Stieltjes 变换,文献[9]研究了

收稿日期:2020-07-24

基金项目:国家自然科学基金(11661065),江西省教育厅科技课题(GJJ181101,GJJ181112)和萍乡市科技计划(2017GY005)资助项目.

作者简介:陆万春(1978-),男,江西信丰人,副教授,主要从事复分析研究. E-mail:125058827@qq.com

其增长性及逼近问题,文献[10]讨论了无穷级 Laplace-Stieltjes 变换的(p,q)-级,文献[11]讨论了无穷级 Laplace-Stieltjes 变换的β-级. 文献[12-13]研究了广义 Laplace-Stieltjes 变换的相关增长性. 文献[9]和文献[6]还研究了有关 Laplace-Stieltjes 变换的逼近问题. 本文将利用文献[14-16]中关于慢增长 Dirichlet 级数的β-级定义方法,定义右半平面收敛的慢增长 Laplace-Stieltjes 变换的β-级和下β-级,得到其β-级与下β-级的系数特征,本文的结果推广了 Dirichlet 级数及文献[3-4]的相关结果.

用Λ表示满足下列条件的函数$\beta(x)$的全体:

(Ⅰ) $\beta(x)$是定义在$[a,+\infty)$内的连续可微的严格递增的正值函数,且当$x\to\infty$时,$\beta(x)\to\infty$;

(Ⅱ) 对于所有的$c\in(0,+\infty)$,$\lim\limits_{x\to+\infty}\beta(cx)/\beta(x)=1$.

对于$F(s)\in D_0$,记

$$\rho(\beta,F)=\overline{\lim_{\sigma\to0^+}}\frac{\beta(\log^+M_u(\sigma,F))}{\beta(\log(1/\sigma))},$$

$$\lambda(\beta,F)=\underline{\lim_{\sigma\to0^+}}\frac{\beta(\log^+M_u(\sigma,F))}{\beta(\log(1/\sigma))},$$

其中$\beta\in\Lambda$,$\rho(\beta,F)$和$\lambda(\beta,F)$分别被称为$F(s)$的β-级和下β-级. 特别地,若令$\beta(x)=\log x$,则可得到文献[3-4]的对数级. 若$\rho(\beta,F)=\lambda(\beta,F)$,则称$F(s)\in D_0$是$\beta$-正规增长的;若$\rho(\beta,F)>\lambda(\beta,F)$,则称$F(s)\in D_0$是$\beta$-非正规增长的.

1　主要引理

引理 1[2]　设$F(s)\in D_0$,并且满足(2)式,则$\forall\varepsilon\in(0,1)$以及充分接近 0 的$\sigma(\sigma>0)$,有
$\mu(\sigma,F)/3\leqslant M_u(\sigma,F)\leqslant K(\varepsilon)\mu(\sigma(1-\varepsilon),F)/\sigma$,
其中$K(\varepsilon)$是仅与ε相关的常数.

引理 2　设$F(s)\in D_0$,且具有β-级$\rho(\beta,F)$. 记$G(x,c)=\beta^{-1}(c(\log x))$,其中$c\geqslant1$,且满足下列条件:

(i) 对所有$c\geqslant1$,存在仅与c有关的常数$x_0(c)$,使得对于$x>x_0(c)$有

$$\mathrm{d}G(x,c)/\mathrm{d}x\leqslant G(x,c)/x;$$

(ii) 对每一个$c\geqslant1$,当$x\to+\infty$时,$G(x,c)/x\to0$,则有

$$\rho(\beta,F)\leqslant\max(1,\theta),$$

其中$\theta=\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\beta(\log^+A_n^*)/(\beta(\log\lambda_n))$.

证　由于$\theta=+\infty$是显然成立的,所以下面证明当$0\leqslant\theta<+\infty$时也成立.

(i) 当$1\leqslant\theta<+\infty$时,$\forall\varepsilon>0$,$\exists n_0=n_0(\varepsilon)$,使得对$n>n_0$有

$$\log A_n^*\leqslant G(\lambda_n,\bar\theta),\bar\theta=\theta+\varepsilon.\tag{5}$$

$\forall x>0$,$\exists n\in\mathbf{N}$,$\lambda_n\leqslant x\leqslant\lambda_{n+1}$,使得

$$\int_0^x\mathrm{e}^{-(\sigma+\mathrm{i}t)y}\mathrm{d}\alpha(y)=\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\mathrm{e}^{-(\sigma+\mathrm{i}t)y}\mathrm{d}\alpha(y)+\int_{\lambda_n}^x\mathrm{e}^{-(\sigma+\mathrm{i}t)y}\mathrm{d}\alpha(y).$$

记$I_k(x,\mathrm{i}t)=\int_{\lambda_k}^x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ty}\mathrm{d}\alpha(y)$ $(\lambda_k\leqslant x\leqslant\lambda_{k+1})$,$\forall t\in\mathbf{R}$,有

$$|I_k(x,\mathrm{i}t)|\leqslant A_k^*\leqslant\mu(\sigma,F)\mathrm{e}^{\lambda_k\sigma}(\sigma>0).$$

因此对于$x\in[\lambda_n,\lambda_{n+1}]$以及$\sigma>0$,有

$$\int_0^x\mathrm{e}^{-(\sigma+\mathrm{i}t)y}\mathrm{d}\alpha(y)=\sum_{k=1}^{n-1}\Big(\mathrm{e}^{-\lambda_{k+1}\sigma}I_k(\lambda_{k+1},\mathrm{i}t)-\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}I_k(y,\mathrm{i}t)\,\mathrm{de}^{-\sigma y}\Big)+\mathrm{e}^{-x\sigma}I_n(x,\mathrm{i}t)-\int_{\lambda_n}^xI_n(y,\mathrm{i}t)\,\mathrm{de}^{-\sigma y}.$$

由(5)式,有

$$\left|\int_0^x\mathrm{e}^{-(\sigma+\mathrm{i}t)y}\mathrm{d}\alpha(y)\right|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}A_n^*\mathrm{e}^{-\lambda_n\sigma}=P(n_0)+\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\exp(G(\lambda_n,\bar\theta)-\sigma\lambda_n),\tag{6}$$

其中前n_0项和是有界的.

对每个$\sigma(\sigma>0)$,定义自然数$n(\sigma)$满足

$$\lambda_{n(\sigma)}\leqslant2G(2/\sigma,2\bar\theta)/\sigma<\lambda_{n(\sigma)+1},$$

对于充分接近 0 的$\sigma(\sigma>0)$,则有$n(\sigma)>n_0$. 故由(6)式得

$$M_\mu(\sigma,F)\leqslant P(n_0)+\sum_{n=n_0+1}^{n(\sigma)}\exp(G(\lambda_n,\bar\theta)-\sigma\lambda_n)+\sum_{n=n(\sigma)+1}^{\infty}\exp(G(\lambda_n,\bar\theta)-\sigma\lambda_n)\leqslant P(n_0)+n(\sigma)\exp(G(\lambda_n,\bar\theta))+\sum_{n=n(\sigma)+1}^{\infty}\exp(G(\lambda_n,\bar\theta)-\sigma\lambda_n).\tag{7}$$

所以,对于充分接近 0 的$\sigma(\sigma>0)$及所有$n>n(\sigma)$,由$\beta(x)\in\Lambda$,则有

$$G(\lambda_n,\bar\theta)/\lambda_n\leqslant G(\lambda_{n(\sigma)+1},\bar\theta)/\lambda_{n(\sigma)+1}\leqslant G(2G(2/\sigma,2\bar\theta)/\sigma,\bar\theta)/(2G(2/\sigma,2\bar\theta)/\sigma)\leqslant\sigma/2.$$

又由(3)式,对上述给定的$\varepsilon>0$,$\exists\bar n=\bar n(\varepsilon)$,对所有的$n>\bar n$有$n<D+\varepsilon$. 故对充分接近 0 的$\sigma(\sigma>0)$,有

$\sum_{n=n(\sigma)+1}^{\infty}\exp(G(\lambda_n,\bar{\theta})-\sigma\lambda_n)<\sum_{n=n(\sigma)+1}^{\infty}\exp(-\sigma\lambda_n/2)<\sum_{n=n(\sigma)+1}^{\infty}\exp(-\sigma n/(2(D+\varepsilon)))\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\exp(-\sigma n/(2(D+\varepsilon)))=1/(1-\exp(-\sigma/(2(D+\varepsilon))))\sim 2(D+\varepsilon)/\sigma.$

利用(7)式及 $n(\sigma)$ 的定义,有

$$M_u(\sigma,F)\leqslant P(n_0)+n(\sigma)\exp(G(\lambda_{n(\sigma)},\bar{\theta})\cdot(4(D+\varepsilon))/\sigma.$$

故对充分接近 0 的 $\sigma(\sigma>0)$,有

$$\log M_u(\sigma,F)\leqslant\log n(\sigma)+G(\lambda_{n(\sigma)},\bar{\theta})+\log(2/\sigma)+O(1)\leqslant\log(D+\varepsilon)+\log\lambda_{n(\sigma)}+G(\lambda_{n(\sigma)},\bar{\theta})+\log(2/\sigma)+O(1)\leqslant\log(2/\sigma)+\log G(2/\sigma,2\bar{\theta})+G(2G(2/\sigma,2\bar{\theta})/\sigma,\bar{\theta})+\log(2/\sigma)+O(1)\leqslant 4\log(2/\sigma)+G((2/\sigma)^2,\bar{\theta})\leqslant 5\log(2/\sigma).$$

由上述不等式容易得到 $\rho(\beta,F)\leqslant\bar{\theta}=\theta+\varepsilon$. 由 ε 的任意性,有

$$\rho(\beta,F)\leqslant\theta=\overline{\lim_{n\to+\infty}}\beta(\log^+A_n^*)/(\beta(\log\lambda_n)).$$

(ii) 当 $\theta<1$ 时,在上面分析中取 $\bar{\theta}=1$ 可知 $\rho(\beta,F)\leqslant 1$.

综合(i)和(ii),可知引理 2 是成立的.

注 1 称满足引理2条件(i)和(ii)的函数 $\beta\in\Lambda$ 为容许函数,例如 $\log_p x$ 就是一个容许函数,其中 $p\in\mathbf{N}$,$\log_1 x=\log x$,$\log_p x=\log(\log_{p-1}x)$.

由引理 1 及 $\beta(x)\in\Lambda$,容易得到

引理 3 设 $F(s)\in D_0$,且具有 β-级 $\rho(\beta,F)$ 及下 β-级 $\lambda(\beta,F)$. 设 $\beta(x)$ 是容许函数,若 $\rho(\beta,F)>1$,则有

$$\rho(\beta,F)=\overline{\lim_{\sigma\to0^+}}\beta(\log^+\mu(\sigma,F))/(\beta(\log(1/\sigma))),$$

而且,若 $\lambda(\beta,F)>1$,则有

$$\lambda(\beta,F)=\underline{\lim_{\sigma\to0^+}}\beta(\log^+\mu(\sigma,F))/(\beta(\log(1/\sigma))).$$

注 2 引理 3 是文献[4]定理 3.2 的推广.

2 主要结果

定理 1 设 $F(s)\in D_0$ 且具有 β-级 $\rho(\beta,F)$,$\rho(\beta,F)>1$,且 $\beta(x)$ 是容许函数,则有

$$\rho(\beta,F)=\max(1,\theta),$$

其中 θ 的定义同引理 2.

证 先证明 $\rho(\beta,F)\geqslant\max(1,\theta)$. 由于 $\rho(\beta,F)=+\infty$ 显然是成立的,下面假定 $\rho(\beta,F)<+\infty$. 由 β-级 $\rho(\beta,F)$ 的定义,$\forall\varepsilon>0$,$\exists\sigma_0=\sigma_0(\varepsilon)>0$,对于 $0<\sigma<\sigma_0$ 有

$$\log^+M_u(\sigma_k,F)<\beta^{-1}(\bar{\rho}\beta(\log(1/\sigma))),$$

其中 $\bar{\rho}=\rho(\beta,F)+\varepsilon$. 由引理 1,则对于 $0<\sigma<\sigma_0$ 及所有 n,有

$$\beta^{-1}(\bar{\rho}\beta(\log(1/\sigma)))>(\log^+A_n^*-\sigma\lambda_n)/3.$$

在上式中取 $\sigma=1/\lambda_n$,则有

$$\beta^{-1}(\bar{\rho}\beta(\log(1/\sigma)))+3>\log^+A_n^*/3.$$

由上式和 $\beta(x)\in\Lambda$ 容易得到

$$\rho(\beta,F)+\varepsilon=\bar{\rho}\geqslant\overline{\lim_{n\to+\infty}}\beta(\log^+A_n^*)/(\beta(\log\lambda_n)).$$

由 ε 的任意性及引理 2 可得定理 1 成立.

注 3 定理 1 是文献[4]中定理 3.1 的推广.

定理 2 设 $F(s)\in D_0$,且具有下 β-级 $\lambda(\beta,F)$,则对任意递增序列 $\{n_k\}$ 有

$$\lambda(\beta,F)\geqslant\underline{\lim_{k\to+\infty}}\beta(\log^+A_{n_k}^*)/(\beta(\log\lambda_{n_{k+1}})).$$

证 记 $S=\underline{\lim_{k\to+\infty}}\beta(\log^+A_{n_k}^*)/(\beta(\log\lambda_{n_{k+1}}))$,显然 $0\leqslant S\leqslant+\infty$. 先假定 $0<S<+\infty$,则 $\forall\varepsilon>0(\varepsilon<S)$,$\exists k_0=k_0(\varepsilon)$,对于所有的 $k>k_0$ 有

$$\log^+A_{n_k}^*\geqslant G(\lambda_{n_{k+1}},\bar{S}),$$

其中 $\bar{S}=S-\varepsilon$,$G(x,c)=\beta^{-1}(c\beta(x))$. 取 $\sigma_k=1/\lambda_{n_k}$,对 $\sigma_{k+1}\leqslant\sigma\leqslant\sigma_k$,由引理 1 有

$$3(\log^+M_u(\sigma,F))\geqslant\log^+\mu(\sigma,F)\geqslant\log A_{n_k}^*-\sigma\lambda_{n_k}\geqslant G(\lambda_{n_{k+1}},\bar{S})-\sigma_k\lambda_{n_k}\geqslant G(1/\sigma_k,\bar{S})-1\geqslant G(1/\sigma,\bar{S})-1.$$

由上述不等式和 $\beta(x)\in\Lambda$ 可得

$$\lambda(\beta,F)\geqslant\bar{S}=S-\varepsilon.$$

由 ε 的任意性,则有

$$\lambda(\beta,F)\geqslant S.\tag{8}$$

当 $S=0$ 时,(8)式是显然成立的. 当 $S=+\infty$ 时,由上面的讨论可知 $\lambda(\beta,F)=+\infty$. 这样就证明了定理 2.

注 4 定理 2 是文献[4]中定理 3.4 的推广.

由定理 1 和定理 2 可得如下定理.

定理 3 设 $F(s)\in D_0$,具有 β-级 $\rho(\beta,F)$ 及下 β-级 $\lambda(\beta,F)$,$\beta(x)$ 是容许函数且满足

(i) $\beta(\log\lambda_n)\sim\beta(\log\lambda_{n+1})(n\to+\infty)$;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\beta(\log^+A_n^*)/(\beta(\log\lambda_n))=\theta_0(1<\theta_0<+\infty)$ 存在,

则 $F(s)$ 是 β-正规增长的,且 $\rho(\beta,F) = \lambda(\beta,F) = \theta_0$.

定理 4　设 $F(s) \in D_0$,具有下 β-级 $\lambda(\beta,F)$, $\lambda(\beta,F) > 1$, $\beta(x)$ 是容许函数且满足

(i) 对所有 c, $1 < c < +\infty$,有
$$x^2 \mathrm{d}G(x,c)/\mathrm{d}x \to +\infty \ (x \to +\infty);$$

(ii) 对于充分大的 $n(n > n_0)$, $\varphi(n) = (\log A_n^* - \log A_{n+1}^*)/(\lambda_{n+1} - \lambda_n)$ 是关于 n 的非减函数,则
$$\lambda(\beta,F) \le \varliminf_{n\to\infty} \beta(\log^+ A_n^*)/(\beta(\log \lambda_n)).$$

证　由条件(ii) 及 $\lambda(\beta,F) > 1$ 可知,有无穷个 n 满足 $\varphi(n) > \varphi(n-1)$,而且显然有 $\varphi(n) \to 0 (n \to +\infty)$. 由于当 $\varphi(n) > \varphi(n-1)$ 时, $A_n^* e^{-\lambda_n \sigma}$ 就是最大项,所以对于 $\varphi(n) > -\sigma \ge \varphi(n-1)$,有
$$\mu(\sigma,F) = A_n^* e^{-\lambda_n \sigma}.$$

先假定 $1 < \lambda(\beta,F) < +\infty$,则由引理 3, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \sigma_1 = \sigma_1(\varepsilon)$,对于所有的 $0 < \sigma < \sigma_1$,有
$$\beta(\log^+ \mu(\sigma,F)) \ge G(1/\sigma, \bar{\lambda}),$$
其中 $\bar{\lambda} = \lambda(\beta,F) - \varepsilon$.

设 $A_{n_1}^* e^{-\lambda_{n_1}\sigma}$ 和 $A_{n_2}^* e^{-\lambda_{n_2}\sigma}$ $(n_1 > n_0, \varphi(n_1 - 1) > -\sigma_1)$ 是 2 个连续的最大项,且满足 $n_1 \le n_2 - 1$,则对所有满足 $\varphi(n_2) \ge -\sigma \ge \varphi(n_2 - 1)$ 的 σ,有
$$\log A_{n_2}^* - \lambda_{n_2}\sigma \ge G(1/\sigma, \bar{\lambda}).$$

设 $n \in [n_1, n_2 - 1]$,则显然有 $\varphi(n_1) = \varphi(n_1 + 1) = \cdots = \varphi(n) = \cdots = \varphi(n_2 - 1)$,且对 $-\sigma = \varphi(n)$,有 $A_n^* e^{-\lambda_n \sigma} = A_{n_2}^* e^{-\lambda_{n_2}\sigma}$. 所以
$$\log A_n^* + \lambda_n \varphi(n) \ge G(-1/(\varphi(n)), \bar{\lambda}),$$
即
$$\log A_n^* \ge G(-1/(\varphi(n)), \bar{\lambda}) - \lambda_n \varphi(n). \quad (9)$$

考虑函数 $H(x) = \lambda_n / x + G(x, \bar{\lambda})$,则
$$H'(x) = -\lambda_n / x^2 + \mathrm{d}G(x,\bar{\lambda})/\mathrm{d}x,$$
由于 $\beta(x)$ 是容许函数,则对 $x > x_1 = x_1(\bar{\lambda})$ 有 $G(x,\bar{\lambda}) < x$,且对 $x > x_2 = x_2(\bar{\lambda})$ 有 $\mathrm{d}G(x,\bar{\lambda})/\mathrm{d}x < G(x,\bar{\lambda})/x$. 取 $x_3 = \max(x_1, x_2)$,则对于 $n > n_3 = n_3(x_3)$ 有
$$H'(x_3) = -\lambda_n / x_3^2 + \mathrm{d}G(x,\bar{\lambda})/\mathrm{d}x|_{x=x_3} \le -\lambda_n / x_3^2 + G(x_3,\bar{\lambda})/x_3 < 0.$$

另一方面,由条件(i) 可知,对充分大的 x, $H'(x) > 0$. 因此,存在一点 $x^*(n)$ 使得
$$\min_{x_3 < x < +\infty} H(x) = H(x^*(n)) \ (n > n_3),$$
则 $\lambda_n / (x^*(n)^2) = \mathrm{d}G(x,\bar{\lambda})/\mathrm{d}x|_{x = x^*(n)}$,即
$$\lambda_n \le x^*(n) G(x^*(n), \bar{\lambda}) \le x^*(n)^2. \quad (10)$$

由(9) ~ (10) 式及 $x^*(n)$ 的定义,有
$$\log^+ A_n^* \ge \lambda_n / (x^*(n)^2) + G(x^*(n), \bar{\lambda}) \ge G(\sqrt{\lambda_n}, \bar{\lambda}).$$

再由 $\beta(x) \in \Lambda$,容易得到
$$\lambda(\beta,F) \le \varliminf_{n\to\infty} \beta(\log^+ A_n^*)/(\beta(\log \lambda_n)). \quad (11)$$

若 $\lambda(\beta,F) = +\infty$,则从上面讨论可知(11) 式也是成立的. 这样就证明了定理 4.

结合定理 2 和定理 4,有

定理 5　设 $F(s) \in D_0$,具有下 β-级 $\lambda(\beta,F)$, $\lambda(\beta,F) > 1$, $\beta(x)$ 是容许函数且满足

(i) 对所有 c, $1 < c < +\infty$,有 $x^2 \mathrm{d}G(x,c)/\mathrm{d}x \to +\infty \ (x \to +\infty)$;

(ii) 对充分大的 $n(n > n_0)$, $\varphi(n) = (\log A_n^* - \log A_{n+1}^*)/(\lambda_{n+1} - \lambda_n)$ 是关于 n 的非减函数;

(iii) $\beta(\log \lambda_n) \sim \beta(\log \lambda_{n+1}) \ (n \to +\infty)$,

其中 $G(x,c) = \beta^{-1}(c\beta(\log x))$,则
$$\lambda(\beta,F) = \varliminf_{n\to\infty} \beta(\log^+ A_n^*)/(\beta(\log \lambda_n)).$$

定理 6　设 $F(s) \in D_0$,具有下 β-级 $\lambda(\beta,F)$, $\lambda(\beta,F) \ge 1$, $\beta(x)$ 是容许函数且满足定理 4 中条件(i),而且 $\beta(\log \lambda_{n_j}) \sim \beta(\log \lambda_{n_{j+1}}) \ (j \to +\infty)$,其中 $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ 是最大项中心指标 $\lambda_{N(\sigma)}$ 的下标子列,则
$$\lambda(\beta,F) = \max(1, \max_{\{n_j\}}(\varliminf_{j\to+\infty} \beta(\log^+ A_{n_j}^*) / (\beta(\log \lambda_{n_{j+1}})). \quad (12)$$

证　首先假设 $\lambda(\beta,F) = 1$,由定理 2 可知(12) 式是成立的. 然后假设 $\lambda(\beta,F) > 1$. 取 $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$,使得 $\{\lambda_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ 是最大项中心指标,则由文献[2] 知
$$\varphi(n_j) = (\log A_{n_j}^* - \log A_{n_{j+1}}^*)/(\lambda_{n_{j+1}} - \lambda_{n_j})$$
是关于 j 的非减函数. 由定理 5,有
$$\lambda(\beta,F) = \varliminf_{j\to+\infty} \beta(\log^+ A_{n_j}^*)/(\beta(\log \lambda_{n_j})). \quad (13)$$

另由定理 2,有
$$\lambda(\beta,F) \ge \max_{\{n_j\}}\left(\varliminf_{j\to+\infty} \frac{\beta(\log^+ A_{n_j}^*)}{\beta(\log \lambda_{n_{j+1}})}\right). \quad (14)$$

由(13) ~ (14) 式可知定理 6 成立.

3　参考文献

[1] 余家荣. Laplace-Stieltjes 变换所定义的整函数之 Borel 线[J]. 数学学报, 1963, 13(3): 471-484.

[2] Kong Yinying,Hong Yong. On the growth of Laplace-Stieltjes transforms and the singular direction of complex analysis [M]. Guangzhou: Jinan University Press,2010.

[3] 徐洪焱. Laplace-Stieltjes 变换的对数级与对数型[J]. 江西师范大学学报: 自然科学版,2017,41(2):180-183.

[4] 陆万春,易才凤,彭友花. 右半平面上解析的 Laplace-Stieltjes 变换对数级[J]. 数学杂志,2016,36(3):559-565.

[5] 陆万春. Laplace-Stieltjes 变换所确定的解析函数的 λ^*-对数型[J]. 江西师范大学学报: 自然科学版,2016,40(6):591-594.

[6] Lu Wanchun. On the proximate type of analytic function represented by Laplace-Stieltjes transformation[J]. Journal of Mathematical Research with Applications,2015,35(1):97-102.

[7] 罗茜,孔荫莹. 全平面上慢增长的 Laplace-Stieltjes 变换的级与型[J]. 数学物理学报,2012,32A(3):601-607.

[8] 孔荫莹,霍颖莹. 右半平面解析的 Laplace-Stieltjes 变换的广义级与型[J]. 数学学报: 中文版,2016,59(1):91-98.

[9] 徐洪焱,刘三阳. 无限级 Laplace-Stieltjes 变换所表示的整函数的增长性与逼近[J]. 数学物理学报,2020,40A(3):556-568.

[10] Srivastava G S,Singhal C. On the order and lower order of Laplace-Stieltjes transformations with index pair (p,q)[J]. Italian Journal of Pure and Applied Mathematics,2016,36:975-986.

[11] 陆万春,易才凤. Laplace-Stieltjes 变换所表示的解析函数的 β-级[J]. 数学物理学报,2014,34A(5):1236-1244.

[12] 宁菊红,陈菁菁,邓冠铁. 广义 Laplace-Stieltjes 变换的 (p,q) 级[J]. 北京师范大学学报: 自然科学版,2017,53(3):263-266.

[13] 项梦娟. 整 Dirichlet 级数表示的函数空间及广义 Laplace-Stieltjes 变换的增长性[D]. 南昌: 江西师范大学,2018.

[14] Nautiyal A. On the coefficients of analytic function represented by Dirichlet series[J]. Commentarii Mathematici Universitatis Sancti Pauli,1981,30:37-48.

[15] 徐洪焱,刘三阳. 慢增长的 Laplace-Stieltjes 变换的逼近[J]. 数学学报: 中文版,2019,62(3):457-468.

[16] Nautiyal A. On the coefficients of analytic Dirichlet series of fast growth[J]. Indian J Pure Appl Math,1984,15:1102-1114.

The β-Order and Lower β-Order of Laplace-Stieltjes Transform of Slow Growth

LU Wanchun,CHEN Nannan

(College of Engineering and Management,Pingxiang University,Pingxiang Jiangxi 337055,China)

Abstract: The β-order and lower β-order of analytic functions defined by zero order Laplace-Stieltjes transformation converging in right plane are studied. The characterizations of β-order,lower β-order and regular β-order of analytic functions of slow growth are obtained,which improve several previous results and extends some results of Dirichlet series.

Key words: Laplace-Stieltjes transform; zero order; β-order; lower β-order

(责任编辑: 王金莲)