文章编号:1000-5862(2020)06-0604-05

非线性分数阶 Fredholm 积分方程的 B 样条小波解法

闫 洁[1,2],韩惠丽[2*],陆万顺[1],马 旭[1]

(1. 宁夏师范学院数学与计算机科学学院,宁夏 固原 756000;2. 宁夏大学数学统计学院,宁夏 银川 750021)

摘要:利用 B 样条小波函数数值求解非线性分数阶第 2 类 Fredholm 积分方程,将具有紧支集的线性半正交 B 样条尺度函数和小波函数一起应用于数值求解非线性分数阶第 2 类 Fredholm 积分方程中. 这种方法将非线性分数阶 Fredholm 积分方程转化为非线性代数方程组,再通过数值求解方程组得到原方程的数值解,证明了误差边界值,数值算例验证了本方法的有效性和准确性.

关键词:分数阶微积分;B 样条小波;Fredholm 积分方程;配置法

中图分类号:O 175.5 **文献标志码**:A **DOI**:10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2020.06.10

0 引言

20 世纪 70 年代,法国工程师 J. Morlet[1] 提出了小波变换的概念,建立了反演公式. 1986 年著名数学家 Y. Meyer 等[2] 建立了构造小波基的多分辨分析方法,小波分析开始蓬勃发展起来. 小波分析是近 20 年来发展起来的一门新兴数学分支[3],是泛函数、Fourier 分析、调和分析、数值分析的最完美结晶. 基于小波的消失矩、高正则性、正交性及局部紧支撑性,大量的积分算子用小波基可以得到稀疏的矩阵[4] 表示. 小波系数的稀疏性使得变换后的矩阵维数降低、具有多分辨性、选择基底具有灵活性.

样条理论已成为函数逼近[5-6] 的有力工具. 它在数据处理、数值微分、数值积分、微分方程和积分方程数值解等数学领域上有广泛应用. 在插值问题中,样条插值[7] 通常比多项式插值更好用. 用低阶的样条插值能产生和高阶的多项式插值类似的结果,而且可以避免产生龙格现象.

分数阶积分微分方程更能真实客观地刻画许多复杂的物理过程,成为描述不规则现象、中间过程等物理问题数学建模的重要工具. 因此,分数阶积分、微分方程的理论与计算方法的研究都显得尤为迫切,目前研究积分、微分方程的数值方法已经有很多,如同伦摄动法[8-9]、泰勒展开法、变分迭代法[10]、网格法、Adomian 分解法[11-12]、Galerkin 方法、小波方法[13-15] 等,在应用领域中起着至关重要的作用,况且并非所有的分数阶积分微分都能得到其解析解. 因此,发展新数值算法和建立分数阶积分微分方程的数值方法是非常必要的,有着重要的理论意义和实际应用价值. 但是目前较少见采用 B 样条小波研究分数阶积分微分方程数值解问题的相关文献. 本文利用 2 阶半正交 B 样条小波求解非线性分数阶 Fredholm 积分方程[16]

$$f(x)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(x-t)^{\alpha-1}K(x,t)F(t,g(t))\mathrm{d}t=g(x),\alpha>0,\tag{1}$$

其中 $f(x)$ 是在 $[0,1]$ 上的已知连续函数,$K(x,t)$ 是定义在矩形区域 $\{(x,t)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant t\leqslant 1\}$ 上的已知连续函数,$g(x)$ 是未知函数.

1 半正交 B 样条小波

半正交小波利用 B 样条在有界区间上进行特定的构造,这提供了一个紧支集,半正交小波形式是空间 $L^2(\mathbf{R})$ 的基. 类似文献[17],$L^2(\mathbf{R})$ 中任意的函数都可以由这组基表示为小波级数,在有限区间 $[0,1]$ 上的函数不能完全地由这组基表示. 这是因

收稿日期:2018-09-16

基金项目:宁夏师范学院校级科研课题(NXSFZDC1803)资助项目.

通信作者:韩惠丽(1972-),女,河北正定人,教授,博士,主要从事复分析及其应用以及积分方程数值解法研究. E-mail:nx-han@126.com

为一些支集在区间左端点或者右端点处被截断. 因此,将有限区间上的有界尺度函数和有界小波函数作为一种特殊的基.

定义 1[17]　在区间[0,1]上定义 2 阶半正交 B 样条(尺度)函数为

$$\varphi_{j,k}(x)=\begin{cases}x_j-k, & k\leqslant x_j<k+1,\\ 2-(x_j-k), & k+1\leqslant x_j<k+2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

这里 $k=-1,0,1,\cdots,2^j-2$,左右边界上的尺度函数分别为

$$\varphi_{j,k}(x)=\begin{cases}2-(x_j-k),0\leqslant x_j<1,k=-1,\\ 0, \quad \text{其他},\end{cases}$$

$$\varphi_{j,k}(x)=\begin{cases}x_j-k,k\leqslant x_j<k+1,k=2^j-1,\\ 0, \quad \text{其他},\end{cases}$$

实际坐标位置 x 与 x_j 有关,根据 $x_j=2^jx$.

定义 2[17]　在区间[0,1]上定义 2 阶 B 样条小波为

$$\psi_{j,k}(x)=\frac{1}{6}\begin{cases}x_j-k, & k\leqslant x_j<k+1/2,\\ 4-7(x_j-k), & k+1/2\leqslant x_j<k+1,\\ -19+16(x_j-k), & k+1\leqslant x_j<k+3/2,\\ 29-16(x_j-k), & k+3/2\leqslant x_j<k+2,\\ -17+7(x_j-k), & k+2\leqslant x_j<k+5/2,\\ 3-(x_j-k), & k+5/2\leqslant x_j<k+3,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 $k=0,1,\cdots,2^j-3$,左右边界上的小波函数分别为

$$\psi_{j,k}(x)=\frac{1}{6}\begin{cases}-6+23x_j,0\leqslant x_j<1/2,\\ 14-17x_j,\ 1/2\leqslant x_j<1,\\ -10+7x_j,1\leqslant x_j<3/2,\\ 2-x_j, \quad 3/2\leqslant x_j<2,\\ 0, \quad \text{其他},\end{cases}$$

$$\psi_{j,k}(x)=\frac{1}{6}\begin{cases}2-(k+2-x_j),k\leqslant x_j<k+1/2,\\ -10+7(k+2-x_j),k+1/2\leqslant x_j< \\ k+1,\\ 14-17(k+2-x_j),k+1\leqslant x_j< \\ k+3/2,\\ -6+23(k+2-x_j),k+3/2\leqslant x_j< \\ k+2,\\ 0,\text{其他}.\end{cases}$$

其中在左边界时 $k=-1$,在右边界时 $k=2^j-2$.

对于定义在区间[0,1]上的函数 $f(x)$ 可用 B 样条小波逼近[18]表示为

$$f(x)=\sum_{k=-1}^{2^{j_0}-1}c_{j_0,k}\varphi_{j_0,k}(x)+\sum_{j=j_0}^{\infty}\sum_{k=-1}^{2^j-2}d_{j,k}\psi_{j,k}(x). \tag{2}$$

特别地,当 $j_0=2$ 时,方程(2)的无限序列在 M 处截断,可以被写为

$$f(x)\approx\sum_{k=-1}^{3}c_{2,k}\varphi_{2,k}(x)+\sum_{j=2}^{M}\sum_{k=-1}^{2^j-2}d_{j,k}\psi_{j,k}(x)=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Psi}(x), \tag{3}$$

其中 $\varphi_{2,k}(x)$ 和 $\psi_{2,k}(x)$ 分别是尺度函数和小波函数. 并且 $\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{\Psi}$ 分别是 B 样条小波的系数向量和基向量函数,都是 $(2^{M+1}+1)\times 1$ 的向量,且

$$\boldsymbol{C}=(c_{-1},c_0,\cdots,c_3,d_{2,-1},\cdots,d_{2,2},d_{3,-1},\cdots,d_{3,6},\cdots,d_{M,-1},\cdots,d_{M,2^M-2})^{\mathrm{T}}, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{\Psi}=(\varphi_{2,-1},\varphi_{2,0},\cdots,\varphi_{2,3},\psi_{2,-1},\cdots,\psi_{2,2},\psi_{3,-1},\cdots,\psi_{3,6},\cdots,\psi_{M,-1},\cdots,\psi_{M,2^M-2})^{\mathrm{T}}$$

以及

$$c_k=\int_0^1 f(x)\tilde{\varphi}_{2,k}(x)\mathrm{d}x,k=-1,0,\cdots,3,$$

$$d_{j,k}=\int_0^1 f(x)\tilde{\psi}_{j,k}(x)\mathrm{d}x,j=2,3,\cdots,M,k=-1,0,1,\cdots,2^j-2,$$

其中 $\tilde{\varphi}_{2,k}(x)$ 和 $\tilde{\psi}_{j,k}(x)$ 分别是 $\varphi_{2,k}(x)$ 和 $\psi_{j,k}(x)$ 的共轭函数.

计算

$$\boldsymbol{P}=\int_0^1\boldsymbol{\Psi}(t)\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(t)\mathrm{d}t=\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}_1 & \\ & \boldsymbol{P}_2\end{pmatrix}, \tag{5}$$

得到 $\boldsymbol{P}_1$ 是 5×5 的实对称矩阵,$\boldsymbol{P}_2$ 是 $(2^{M+1}-4)\times(2^{M+1}-4)$ 的分化矩阵,每一分块均是对角矩阵,其中

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1/12 & 1/24 & 0 & 0 & 0\\ 1/24 & 1/6 & 1/24 & 0 & 0\\ 0 & 1/24 & 1/6 & 1/24 & 0\\ 0 & 0 & 1/24 & 1/6 & 1/24\\ 0 & 0 & 0 & 1/24 & 1/6\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}\boldsymbol{N}_{4\times4} & & & \\ & 1/2\boldsymbol{N}_{8\times8} & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1/2^{M-2}\boldsymbol{N}_{2^M\times2^M}\end{pmatrix},$$

$$N=\begin{pmatrix} 2/27 & 1/96 & -1/864 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1/96 & 1/16 & 5/432 & -1/864 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1/864 & 5/432 & 1/16 & 1/96 & -1/864 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & -1/864 & 5/432 & 1/16 & 5/432 & -1/864 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1/864 & 5/432 & 1/16 & 1/96 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & -1/864 & 1/96 & 2/27 \end{pmatrix}.$$

假设 $\tilde{\boldsymbol{\Psi}}$ 是 $\boldsymbol{\Psi}$ 的共轭函数

$$\tilde{\boldsymbol{\Psi}}=(\tilde{\varphi}_{2,-1},\tilde{\varphi}_{2,0},\cdots,\tilde{\varphi}_{2,3},\tilde{\psi}_{2,-1},\cdots,\tilde{\psi}_{2,2},\tilde{\psi}_{3,-1},\cdots,\tilde{\psi}_{3,6},\cdots,\tilde{\psi}_{M,-1},\cdots,\tilde{\psi}_{M,2^M-2})^{\mathrm{T}},$$

并且

$$\int_0^1\tilde{\boldsymbol{\Psi}}(t)\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(t)\,\mathrm{d}t=\boldsymbol{I},\qquad(6)$$

其中 $\boldsymbol{I}$ 是 $(2^{M+1}+1)\times(2^{M+1}+1)$ 的单位矩阵. 由方程(5)和(6)可得

$$\tilde{\boldsymbol{\Psi}}(x)=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\Psi}(x).$$

2 方程转化

首先,假设

$$F(x,g(x))=u(x),0\leqslant x\leqslant 1.\qquad(7)$$

由方程(3),可以逼近下面的函数

$$u(x)=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Psi}(x),\qquad(8)$$

$$g(x)=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Psi}(x),\qquad(9)$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是 $(2^{M+1}+1)\times 1$ 的列向量,与方程(4)中定义的 $\boldsymbol{C}$ 相似.

用小波函数的共轭函数,可以逼近函数 $f(x)$ 和 $K(x,t)$

$$f(x)=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{\Psi}}(x),\qquad(10)$$

$$K(x,t)=\tilde{\boldsymbol{\Psi}}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{D}\tilde{\boldsymbol{\Psi}}(x),\qquad(11)$$

其中

$$\boldsymbol{D}=\int_0^1\left(\int_0^1 K(x,t)\boldsymbol{\Psi}(t)\,\mathrm{d}t\right)\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=\int_0^1 f(x)\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(x)\,\mathrm{d}x.$$

由方程(7)、(8)和(11)可得

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(x-t)^{\alpha-1}K(x,t)F(t,g(t))\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(x-t)^{\alpha-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Psi}(t)\tilde{\boldsymbol{\Psi}}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{D}\tilde{\boldsymbol{\Psi}}(x)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\left(\int_0^1(x-t)^{\alpha-1}\boldsymbol{\Psi}(t)\tilde{\boldsymbol{\Psi}}^{\mathrm{T}}(t)\,\mathrm{d}t\right)\boldsymbol{D}\tilde{\boldsymbol{\Psi}}(x)=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}(x)\boldsymbol{D}\tilde{\boldsymbol{\Psi}}(x),$$

其中 $\boldsymbol{Q}(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(x-t)^{\alpha-1}\boldsymbol{\Psi}(t)\tilde{\boldsymbol{\Psi}}^{\mathrm{T}}(t)\,\mathrm{d}t$.

把方程(7)~(11)应用到方程(1)中,得

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{\Psi}}(x)+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}(x)\boldsymbol{D}\tilde{\boldsymbol{\Psi}}(x)=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Psi}(x).\qquad(12)$$

将(12)式两边同时乘以 $\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(x)$,再在区间[0,1]上积分得

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}(x)\boldsymbol{D}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P},\qquad(13)$$

其中 $\boldsymbol{P}$ 是 $(2^{M+1}+1)\times(2^{M+1}+1)$ 的实对称矩阵,

$$\boldsymbol{P}=\int_0^1\boldsymbol{\Psi}(t)\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(t)\,\mathrm{d}t=\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}_1 & \\ & \boldsymbol{P}_2\end{pmatrix},\int_0^1\tilde{\boldsymbol{\Psi}}(t)\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(t)\,\mathrm{d}t=\boldsymbol{I}.$$

方程(13)为含 $2\times(2^{M+1}+1)$ 个未知量的有 $(2^{M+1}+1)$ 个代数方程的方程组.

取节点 $x_i=(i-1)/2^{M+1},i=1,2,\cdots,2^{M+1}+1$. 为求出方程(9)的解 $g(x)$,给方程

$$F(x,\boldsymbol{B\Psi}(x))=\boldsymbol{A\Psi}(x)\qquad(14)$$

应用配置点 $x_i=(i-1)/2^{M+1},i=1,2,\cdots,2^{M+1}+1$.

方程(14)为含 $2\times(2^{M+1}+1)$ 个未知量的有 $(2^{M+1}+1)$ 个代数方程的方程组.

组合方程(13)和(14)得到含 $2\times(2^{M+1}+1)$ 个未知量的有 $2\times(2^{M+1}+1)$ 个代数方程的方程组,这就可以利用数学软件进行数值求解.

3 误差分析

定理 1[19] 假设 $g(x)\in C^m[0,1]$,$\psi_{j,k}$ 有 m 阶的消失矩,则小波系数 $d_{j,k}$ 满足不等式 $|d_{j,k}|\leqslant C_m 2^{-n(m+1/2)}\max\limits_{\xi\in[0,1]}|g^{(m)}(\xi)|$,其中 C_m 是与 j、k 和 $g(x)$ 无关的常数.

随着 m 的不断增大,C_m 以指数形式不断减小,由于截断半正交 B 样条小波的系数即为方程的近似解,所以定义 2- 范数的误差函数为

$$\|e_j g(x))\|_2=\left(\int_0^1(g(x)-g_j(x))^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\approx\left(\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N}(g(x_i)-g_j(x_i))^2\right)^{1/2},$$

其中 $g(x)$ 为精确解,$g_j(x)$ 为(13)式得到的数值解.

定理 2 设 $g(x)\in C^2[0,1]$,

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Psi}(x) = \sum_{k=-1}^{3} c_{2,k}\varphi_{2,k}(x) + \sum_{j=2}^{M}\sum_{k=-1}^{2^j-2} d_{j,k}\psi_{j,k}(x)$$

是由 B 样条小波求出的近似解,则误差满足下列不等式

$$\| e_j(g(x)) \|_2 \leqslant \left\| \frac{1}{2^{M+3}} \max_{\xi\in[0,1]} |g^{(2)}(\zeta)| \right\|_2.$$

证　由内积空间的 2- 范数定义知

$$\| e_j g(x)) \|_2 = \left(\int_0^1 (g(x) - \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Psi}(x))^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2}$$

将区间[0,1]划分为 2^{M+1} 个小区间,每个小区间为 $I_n = [(n-1)/2^{M+1}, n/2^{M+1}]$,则 $g(x)$ 在每个小区间上的近似函数为具有最小二乘性质的 2 次多项式. 于是,得到误差函数

$$\| e_j g(x)) \|_2 = \left(\int_0^1 (g(x) - \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Psi}(x))^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2} = \left(\sum_{n=1}^{2^{M+1}} \int_{(n-1)/2^{M+1}}^{n/2^{M+1}} (g(x) - \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Psi}(x))^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{n=1}^{2^{M+1}} \int_{(n-1)/2^{M+1}}^{n/2^{M+1}} (g(x) - r_2(x))^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

又因为 $r_2(x)$ 为 $g(x)$ 在区间 I_n 上的 2 次插值多项式,所以

$$|g(x) - r_2(x)| \leqslant \frac{1}{2^{M+3}} \max_{\xi_n\in I_n} |g^{(2)}(\xi_n)|. \quad (15)$$

因此,由(15)式得

$$\| e_j g(x)) \|_2 \leqslant \left(\sum_{n=1}^{2^{M+1}} \int_{(n-1)/2^{M+1}}^{n/2^{M+1}} \left(\frac{1}{2^{M+3}} \cdot \max_{\xi_n\in I_n} |g^{(2)}(\xi_n)|\right)^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2} = \left(\sum_{n=1}^{2^{M+1}} \int_{(n-1)/2^{M+1}}^{n/2^{M+1}} \left(\frac{1}{2^{M+3}} \cdot \max_{\xi\in[0,1]} |g^{(2)}(\xi)|\right)^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2} = \left\| \frac{1}{2^{M+3}} \max_{\xi\in[0,1]} |g^{(2)}(\xi)| \right\|_2.$$

4　数值算例

例 1　考虑求解下列非线性分数阶 Fredholm 积分方程

$$g(x) - \int_0^1 (x-t)^{\alpha-1} x t g^3(t) \mathrm{d}t = f(x), x \in [0,1],$$

当 $\alpha = 1, f(x) = \mathrm{e}^x - (1 + 2\mathrm{e}^3)x/9$ 时该分数阶积分方程退化为整数阶积分方程,其精确解为 $g(x) = \mathrm{e}^x$.

令 $\alpha = 1$,在取 M 分别为 2、4 时进行数值求解,并与文献[20]中采用迭代 Galerkin 法得到的数值结果进行比较,结果列于表 1. 由表 1 可见,当 $\alpha = 1$ 时,半正交 B 样条小波方法的数值解一致逼近精确解.

表 1　B 样条小波法与迭代 Galerkin 法的数值解对比

x	精确解	Galerkin 法	B 样条小波	
			$M = 2$	$M = 4$
0.1	1.105 2	1.104 5	1.105 162 53	1.105 170 83
0.2	1.221 4	1.234 7	1.221 411 36	1.221 402 67
0.3	1.349 9	1.364 9	1.349 849 51	1.349 858 10
0.4	1.491 8	1.495 1	1.491 820 39	1.491 824 72
0.5	1.648 7	1.625 3	1.648 727 81	1.648 721 31
0.6	1.822 1	1.825 3	1.822 101 98	1.822 118 59
0.7	2.013 8	2.039 4	2.013 741 26	2.013 752 87
0.8	2.225 5	2.253 4	2.225 538 10	2.225 540 94
0.9	2.459 6	2.467 4	2.459 611 94	2.459 603 11
1.0	2.718 3	2.681 5	2.718 272 61	2.718 281 98

当 $\alpha = 6/5, f(x) = \mathrm{e}^x + 3^{4/5}\mathrm{e}^3\Gamma(1/5)x/75 - 2x/15$ 时,其精确解为 $g(x) = \mathrm{e}^x$. 当 M 分别取 1、2、3、4 时,2- 范数误差的近似值分别为 6.250 212 37 E-4、3.252 882 69 E-5、2.626 594 17 E-6、2.138 682 94 E-7. 可以看出:随着 M 的不断增大,数值解的精度逐渐提高,误差不断减小.

综上可见,本文将半正交紧支集 B 样条小波应用到第 2 类非线性 Fredholm 积分方程的数值求解中,使用这种程序,积分方程简化为求解非线性代数方程组,数值解高精度逼近精确解. 误差分析和数值算例证明了此方法的有效性、适用性和准确性.

5　参考文献

[1] 杨福生. 小波变换的工程分析与应用[M]. 北京:科学出版社,2001.

[2] 李晟. 小波与频谱分析[D]. 上海:上海交通大学,2009.

[3] 徐振民. 高维空间的框架多分辨分析与小波[D]. 青岛:山东科技大学,2007.

[4] 郑小洋. 积分方程和微分方程的几种基于小波的新型数值解法[D]. 重庆:重庆大学,2011.

[5] Yüzbasi S, Sezer M, Kemanci B. Numerical solutions of in-

tegro-differential equations and application of a population model with an improved Legendre method [J]. Applied Mathematical Modelling,2013,37(4):2086-2101.

[6] Parand K,Delafkar Z,Pakniat N,et al. Collocation method using sinc and rational Legendre functions for solving Volterra's population model [J]. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat,2011,16(4):1811-1819.

[7] 朱琪.高次插值的龙格现象的测试 [J].湖南科技学院学报,2005,26(11):206-208.

[8] Hetmaniok E,Nowak I,Slota D,et al. A study of the convergence of and error estimation for the homotopy perturbation method for the Volterra-Fredholm integral equations [J]. Applied Mathematics Letters,2013,26(1):165-169.

[9] Sakar M G,Uludag F,Erdogan F. Numerical solution of time-fractional nonlinear PDEs with proportional delays by homotopy perturbation method [J]. Applied Mathematical Modelling,2016,40(13/14):6639-6649.

[10] Chang S H. Convergence of variational iteration method applied to two-point diffusion problems [J]. Applied Mathematical Modelling,2016,40(15/16):6805-6810.

[11] Wazwaz A M,Rach R,Duan J. The modified Adomian decomposition method and the noise terms phenomenon for solving nonlinear weakly-singular Volterra and Fredholm Integral equations [J]. Cent Eur J Eng,2013,3(4):669-678.

[12] 仝晓静.非线性分数阶积分方程的 Adomian 解法 [D].银川:宁夏大学,2015.

[13] Sahu P K,Saha Ray S. Legendre wavelets operational method for the numerical solutions of nonlinear Volterra integro-differential equations system [J]. Applied Mathematics and Computation,2015,256:715-723.

[14] Zhou Fengying,Xu Xiaoyong. The third kind chebyshev wavelets collocation method for solving the time-fractional convection diffusion equations with variable coefficients [J]. Applied Mathematics and Computation,2016,280:11-29.

[15] Yi Mingxu,Huang Jun. CAS wavelet method for solving the fractional integro-differential equation with a weakly singular kernel [J]. International Journal of Computer Mathematics,2015,92(8):1715-1728.

[16] 虎晓燕.分数阶积分微分方程的无网格重心插值配点法 [D].银川:宁夏大学,2016.

[17] 刘明才.小波分析及其应用 [M].北京:清华大学出版社,2013.

[18] 雷开彬,马志霞,黄天云.基于 de Boor-Cox 递推公式的样条函数 [C]//中国计算机图形学进展 2006 第六届中国计算机图形学术大会论文集.杭州:中国计算机学会,2006:29-33.

[19] Goswami J C,Chan A K,Chui C K. On solving first-kind integral equations using wavelets on a bounded interval [J]. IEEE Trans,Antennas Propag,1995,43(6):614-622.

[20] 吴光旭.第 2 类非线性 Fredholm 积分方程的迭代 Galerkin 法 [D].成都:电子科技大学,2012.

The Numerical Solution of Nonlinear Fractional-Order Fredholm Integral Equation by B-Spline Wavelet Collocation Method

YAN Jie[1,2],HAN Huili[2*],LU Wanshun[1],MA Xu[1]

(1. School of Mathematics and Computer Science,Ningxia Normal University,Guyuan Ningxia 756000,China;
2. School of Mathematics Statistics Science,Ningxia University,Yinchuan Ningxia 750021,China)

Abstract:The semiorthogonal B-spline wavelet are used to solve the solution of fractional-order Fredholm integral equation of the second kind. Compactly supported linear semiorthogonal B-spline scaling functions and wavelet functions are applied to approximate the solutions of nonlinear fractional-order Fredholm integral equation of the second kind. This method reduces the nonlinear fractional-order Fredholm integral equation to a nonlinear system of algebraic equations,numerical solution of original equation is obtained through solving algebraic equations and error bound value is estimated. Finally,some examples demonstrate the validity and precision of this method.

Key words:fractional calculus;B-spline wavelet;Fredholm integral equation;collocation

(责任编辑:曾剑锋)