第 44 卷 第 6 期 江西师范大学学报(自然科学版) Vol. 44 No. 6
2020 年 11 月 Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science) Nov. 2020

文章编号:1000-5862(2020)06-0609-05

服从 FGM Copula 的实值重尾随机游动的局部 Max-Sum 等价

柳福祥,龚 婵,崔 盛*
(三峡大学理学院,湖北 宜昌 443002)

摘要: 该文考虑了服从 FGM copula 的实值重尾随机游动. 在边缘分布满足一定条件下,利用局部重尾分布理论和 FGM copula 的有关性质研究了部分和的尾分布局部渐近性质,进而将在该相依结构下重尾随机游动的局部 Max-Sum 等价成立的范围由正实数推广到全体实数情形. 该结果在风险理论中具有一定的应用价值.

关键词: 局部重尾分布; FGM copula; 局部 Max-Sum 等价
中图分类号: O 211.3 **文献标志码:** A **DOI:** 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2020.06.11

0 引言

众所周知,在金融保险、排队论、复杂网络等领域中存在着大量的"二八"现象,而重尾分布是刻画这类现象的主要工具. 称分布 F 是重尾分布,若 $\forall a>0$,有$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{a|x|}F(\mathrm{d}x)=\infty$. 进一步地,S. Asmussen 等[1] 系统地提出了局部重尾分布族的概念,用于刻画重尾分布的局部渐近性质. 随后,有一些学者对其展开了后续研究[2-5].

为了记号的简便,本文约定,除非特殊说明,文中的极限均指 $x\to\infty$ 的情形. 对任意 2 个正实值函数 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$,$\limsup\alpha(x)/\beta(x)<\infty$ 记 $\alpha(x)=O(\beta(x))$;$\lim\alpha(x)/\beta(x)=0$ 记 $\alpha(x)=o(\beta(x))$;$\limsup\alpha(x)/\beta(x)\leqslant 1$ 记 $\alpha(x)\lesssim\beta(x)$;$\liminf\alpha(x)/\beta(x)\geqslant 1$ 记 $\alpha(x)\gtrsim\beta(x)$;$\lim\alpha(x)/\beta(x)=1$ 记 $\alpha(x)\sim\beta(x)$. 对任意分布 F,其正部和负部分别记为 $F^{+}(x)=F(x)1_{\{x>0\}}$ 和 $F^{-}(x)=F(x)1_{\{x\leqslant 0\}}+1_{\{x>0\}}$. F^{2*} 表示分布 F 与自身的 2 重卷积,进一步地,$F*G$ 表示分布 F 与分布 G 的 2 重卷积. $\forall T(0<T\leqslant\infty)$,记 $x+\Delta_T=(x,x+T]$,$F(x+\Delta_T)=F(x+T)-F(x)$ 表示 F 的局部分布. 接下来给出局部长尾分布族和局部次指数分布族的定义.

定义 1 称支撑在 $\mathbf{R}$ 上的分布 F 是局部长尾的,记作 $F\in L_{\Delta_T}(0<T\leqslant\infty)$,若 $F(x+\Delta_T)$ 最终为正,且 $\forall t\in\mathbf{R}$,有 $F(x+t+\Delta_T)\sim F(x+\Delta_T)$.

定义 2 称支撑在 $\mathbf{R}^{+}$ 上的分布 F 是局部次指数的,记作 $F\in S_{\Delta_T}(0<T\leqslant\infty)$,若 $F\in L_{\Delta_T}$,且 $F^{2*}(x+\Delta_T)\sim 2F(x+\Delta_T)$. 进一步地,称支撑在 $\mathbf{R}$ 上的分布 F 是局部次指数的,若 $F^{+}\in S_{\Delta_T}$.

事实上,由定义 1 可知,若 $F\in L_{\Delta_T}$,则 $F(\log x+\Delta_T)$ 是慢变函数,由此可知,$\forall t>0$,$F(x+s+\Delta_T)\sim F(x+\Delta_T)$ 关于 $|s|\leqslant t$ 一致成立,即

$$\lim\sup_{|s|\leqslant t}|F(x+s+\Delta_T)/F(x+\Delta_T)-1|=0.$$

另外,关于实数轴上局部次指数分布族的定义不止一种,本文采用的定义 2 源自文献[3-4],有关这几种定义相互关系的讨论参见文献[5].

"二八"现象在数学上的表述为 Max-Sum 等价,即考虑 n 个实值随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$,相应的边缘分布分别为 $F_1,F_2,\cdots,F_n$,其部分和与最大值分别用 $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$ 和 $X_{(n)}=\max_{1\leqslant i\leqslant n}X_i$ 表示;若对某个 T $(0<T<\infty$(或 $T=\infty$))有 $P(S_n\in x+\Delta_T)\sim P(X_{(n)}\in x+\Delta_T)$ 成立,则称该随机游动具有局部(或整体)Max-Sum 等价性. 自 P. Embrechts 等[6] 提出整体 Max-Sum 等价的概念以来,众多学者致力于研究在独立不同分布或相依情形下部分和的整体尾渐近性,并讨论使得 Max-Sum 等价成立的充分

收稿日期:2020-08-30
基金项目:国家自然科学基金(71671166)和教育部人文社科规划基金(17YJA630066)资助项目.
通信作者:崔 盛(1979-),男,湖北宜昌人,讲师,博士,主要从事保险精算与风险管理研究. E-mail:cs10220896@163.com

条件[7-13].

近年来,由于在应用概率论诸多领域中,局部渐近性有着广泛应用,并且重尾分布的局部性质不能通过其尾分布的性质来刻画.因此,有部分学者对此展开了相应的研究.目前该方向的研究文献相对于整体情形要少很多,主要有 S. Asmussen 等[1]、刘希军等[14]、江涛等[15],其中刘希军等[14]讨论了实数轴上独立不同分布卷积的局部渐近性;江涛等[15]进一步考虑了非负随机变量序列的相依结构服从 Farlie-Gumbel-Morgenstern(FGM) copula 的情形,在适当的局部次指数分布条件下,得到了局部 Max-Sum 等价式.众所周知,FGM copula 是刻画随机变量相依关系的一种重要结构,其表达式为

$$C(u_1,u_2,\cdots,u_n)=\prod_{i=1}^{n}u_i\Big(1+\sum_{1\leqslant l<j\leqslant n}\alpha_{lj}(1-u_l)(1-u_j)\Big),u_i\in[0,1],1\leqslant i\leqslant n, \quad (1)$$

其中相依系数 $\alpha_{lj}(1\leqslant l<j\leqslant n)$ 的取值范围为 $[-1,1]$,且 $\sum_{1\leqslant l<j\leqslant n}|\alpha_{lj}|\leqslant 1$. 关于该 copula 相关性质和应用的进一步讨论参见文献[16-17].

在此基础上,本文假设边缘分布满足一定条件,利用局部重尾分布和 FGM copula 的相关性质,将江涛等[15]的结果推广到全体实数情形,该结果可以用来讨论风险理论中破产概率的局部渐近性质,并且证明技巧可以用于更广的 copula 结构中.本文主要结果如下:

定理 1 设实值随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 服从形如(1)式的 FGM copula,相应的边缘分布 $F_1,F_2,\cdots,F_n\in L_{\Delta_T}$,且 $F_i*F_j\in S_{\Delta_T}$,$1\leqslant i<j\leqslant n$,$0<T<\infty$. 若下列条件之一成立:

(i) $\forall i(1\leqslant i\leqslant n)$,$F_i^-$ 是轻尾的,即 $\exists a(0<a<\infty)$,使得 $\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{-ax}F_i^-(\mathrm{d}x)<\infty$;

(ii) $\forall i(1\leqslant i\leqslant n)$,$F_i$ 的局部分布是几乎单调下降的,即 $\forall x,y,0<x<y,\exists c_i>0$,使得

$$F_i(y+\Delta_T)\leqslant c_iF_i(x+\Delta_T),$$

则有 $P(S_n\in x+\Delta_T)\sim P(\sum_{i=1}^{n}Y_i\in x+\Delta_T)$,这里 $Y_i=X_i$ 或 X_i^+,其中 $X_i^+=\max\{x,0\}$,$i=1,2,\cdots,n$.

应该指出的是,在定理 1 的条件(ii)中的几乎单调下降性最早由 N. H. Bingham 等[18]引入,并且常见的局部次指数分布都满足该性质,有关该性质的深入讨论可参见文献[5].

结合定理 1 以及江涛等[15]的结论,有如下推论:

推论 1 在定理 1 的条件下,进一步有 $P(S_n\in x+\Delta_T)\sim P(X_{(n)}\in x+\Delta_T)\sim\sum_{i=1}^{n}F_i^+(x+\Delta_T)$.

1 引理

在证明主要结论之前,先给出一些必要的引理.

引理 1[14] 若对于某个 $T(0<T\leqslant\infty)$,有 $F\in L_{\Delta_T}$,则 $H_{\Delta_T}(F)=\{h:h(x)\uparrow\infty,h(x)=o(x),F(x+t+\Delta_T)\sim F(x+\Delta_T)$ 对所有 $|t|\leqslant h(x)$ 一致成立$\}\neq\varnothing$. 若 $h_1\in H_{\Delta_T}(F)$,$h_2(x)\leqslant h_1(x)$,且 $h_2(x)\uparrow\infty$,则 $h_2\in H_{\Delta_T}(F)$. 因此,$\forall n\geqslant 1$,若 $F_1,F_2,\cdots,F_n\in L_{\Delta_T}$,则 $\bigcap_{i=1}^{n}H_{\Delta_T}(F_i)\neq\varnothing$.

引理 2[15] 若非负随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 服从形如(1)式的 FGM copula,且 $\forall x_i\geqslant 0,1\leqslant i\leqslant n$,有 $F_i(x_i+\Delta_T)>0$,则 $\forall x_i\in\mathbf{R}$,有

$$P(X_i\in x_i+\Delta_T|X_j=x_j,1\leqslant j\neq i\leqslant n)=F_i(x_i+\Delta_T)(1+\alpha_i(x_i,x_j)/\beta_i(x_l,x_j)),$$

其中 $\alpha_i(x_i,x_j)=\sum_{1\leqslant j\neq i\leqslant n}\alpha_{ij}(1-\overline{F}_i(x_i+T_i)-\overline{F}_i(x_i))(1-2\overline{F}_j(x_j))$,$\beta_i(x_l,x_j)=\sum_{1\leqslant l\neq i<j\neq i\leqslant n}\alpha_{lj}(1-2\overline{F}_l(x_l))(1-2\overline{F}_j(x_j))+1$.

引理 3[15] 若非负随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 服从形如(1)式的 FGM copula,其边缘分布分别为 $F_1,F_2,\cdots,F_n\in L_{\Delta_T}$,且 $F_i*F_j\in S_{\Delta_T}$,$1\leqslant i<j\leqslant n$,则有

$$P(S_n\in x+\Delta_T,\bigcap_{i=1}^{n}\{X_i>h(x)\})=o(\sum_{i=1}^{n}F_i(x+\Delta_T)).$$

2 定理 1 的证明

为证明定理 1 的结论成立,只需证明

$$P(S_n\in x+\Delta_T)\sim P(S_{n-1}+X_n^+\in x+\Delta_T). \quad (2)$$

对(2)式的证明将分为 2 步:

第 1 步证明

$$P(S_n\in x+\Delta_T)-P(S_{n-1}+X_n^+\in x+\Delta_T)\sim o(\sum_{i=1}^{n-1}F(x+\Delta_T)); \quad (3)$$

第 2 步证明

$$P(S_n\in x+\Delta_T)\gtrsim\sum_{i=1}^{n-1}F_i(x+\Delta_T). \quad (4)$$

首先证明第 1 步. 记 $A_k=\{$在 $X_1,X_2,\cdots,X_{n-1}$ 中恰有 k 项为正$\}$,$B_m=\{$在 k 项为正中恰有 m 项大于 $h(x)\}$,$1\leqslant k\leqslant n-1$,$1\leqslant m\leqslant k$,其中 $h\in\bigcap_{i=1}^{n}H_{\Delta_T}(F_i)$,则(3)式左边可分解为

$$\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{m=1}^{k}(P(S_n\in x+\Delta_T,A_kB_m,X_n\leqslant 0)-P(S_{n-1}\in x+\Delta_T,A_kB_m,X_n\leqslant 0)).$$

不失一般性，只需证明在前 k 项为正，前 m 项大于 $h(x)$ 的情形下(3)式成立，即 $\forall k,m,1\leqslant k\leqslant n-1,1\leqslant m\leqslant k$，有

$$I_{km}=I_{km1}-I_{km2}=P(S_n\in x+\Delta_T,\bigcap_{i=1}^{m}\{X_i>h(x)\},\bigcap_{r=m+1}^{k}\{0<X_r\leqslant h(x)\},\bigcap_{j=k+1}^{n}\{X_j\leqslant 0\})-P(S_{n-1}\in x+\Delta_T,\bigcap_{i=1}^{m}\{X_i>h(x)\},\bigcap_{r=m+1}^{k}\{0<X_r\leqslant h(x)\},\bigcap_{j=k+1}^{n}\{X_j\leqslant 0\})=o(\sum_{i=1}^{n-1}F_i(x+\Delta_T))\quad(5)$$

成立即可. 相应地，记 I_{km}、I_{km1} 和 I_{km2} 的被积函数分别为 $\tilde I_{km}$、$\tilde I_{km1}$ 和 $\tilde I_{km2}$.

当 $k=m=1$ 时，对 $X_2,X_3,\cdots,X_n$ 同时取条件，得 $I_{11}=\int_{(-\infty,0]^{n-1}}(\tilde I_{111}-\tilde I_{112})P(\bigcap_{j=2}^{n}X_j\in \mathrm{d}x_j)$. 记 $v_i=x-\sum_{1\leqslant j\neq i\leqslant n}x_j$，$u_i=x-\sum_{1\leqslant j\neq i\leqslant n-1}x_j$，由引理 2 和 $F_1\in L_{\Delta_T}$ 可知，有 $\tilde I_{111}-\tilde I_{112}=F_1(v_1+\Delta_T)(1+\alpha_1(v_1,x_j)/\beta_1(x_l,x_j))-F_1(u_1+\Delta_T)(1+\alpha_1(v_1,x_j)/\beta_1(x_l,x_j))=o(F_1(x+\Delta_T))$.

下面只需验证 $\tilde I_{11}/F_1(x+\Delta_T)$ 满足控制收敛定理即可. 由绝对值不等式可知

$$|\tilde I_{11}|=|\tilde I_{111}-\tilde I_{112}|\leqslant|\tilde I_{111}|+|\tilde I_{112}|.$$

不失一般性，只考虑 $\tilde I_{111}/F_1(x+\Delta_T)$ 满足控制收敛定理即可. 显然，若 $\alpha_{1j}=0,2\leqslant j\leqslant n$，则 $\alpha_1(v_1,x_j)/\beta_1(x_l,x_j)=0$. 若 α_{1j} 不全为 0，从而有 $1-\sum_{2\leqslant l<j\leqslant n}|\alpha_{lj}|>0$，且 $\bar F_i(x_i)\in[0,1]$，$1\leqslant i\leqslant n$，则

$$|\alpha_1(v_1,x_j)|\leqslant\left|\sum_{j=2}^{n}\alpha_{1j}\right|<1,$$

由绝对值不等式可知，

$$1-\sum_{2\leqslant l<j\leqslant n}|\alpha_{lj}|\leqslant|\beta_1(x_l,x_j)|\leqslant 1+\sum_{2\leqslant l<j\leqslant n}|\alpha_{lj}|,$$

则有

$$|(1+\alpha_1(v_1,x_j)/\beta_1(x_l,x_j)|<+\infty.\quad(6)$$

若条件(i)满足，则

$$F_1(v_1+\Delta_T)/F_1(x+\Delta_T)=\exp(-a\sum_{j=2}^{n}x_j)\cdot\exp(-a(x-\sum_{j=2}^{n}x_j))F_1(x-\sum_{j=2}^{n}x_j+\Delta_T)/(\exp(-ax)\cdot F_1(x+\Delta_T))\leqslant\sup_{v_1\geqslant x}(\exp(-av_1)F_1(v_1+\Delta_T))/(\exp(-ax)F_1(x+\Delta_T))\exp(-a\sum_{j=2}^{n}x_j)\sim\exp(-a\cdot\sum_{j=2}^{n}x_j),$$

其中最后一步用到了文献[8]的定理 1.5.3，即对于支撑在 $\mathbf{R}$ 上的分布函数 F，若对某个 $T(0<T<\infty)$，有 $F\in L_{\Delta_T}$，则 $\forall a,0<a<\infty$，当 $y\geqslant x$ 时，都有 $\sup(\exp(-ay)F(y+\Delta_T))\sim\exp(-ax)F(x+\Delta_T)$.

进一步有

$$\int_{(-\infty,0]^{n-1}}\exp(-a\sum_{j=2}^{n}x_j)P(\bigcap_{j=2}^{n}\{X_j\in \mathrm{d}x_j\})=\int_{(-\infty,0]^{n-1}}\exp(-a\sum_{j=2}^{n}x_j)\,\mathrm{d}\prod_{j=2}^{n}F_j(x_j)(1+\sum_{2\leqslant i<l\leqslant n}\alpha_{il}(1-F_i(x_i))(1-F_l(x_l)))=\int_{(-\infty,0]^{n-1}}\exp(-a\sum_{j=2}^{n}x_j)\cdot\mathrm{d}\prod_{j=2}^{n}F_j(x_j)+\sum_{2\leqslant i<l\leqslant n}\alpha_{il}\int_{(-\infty,0]^{n-1}}\exp(-a\sum_{j=2}^{n}x_j)\,\mathrm{d}\prod_{j=2}^{n}F_j(x_j)-2\sum_{2\leqslant i<l\leqslant n}\alpha_{il}\int_{(-\infty,0]^{n-1}}\exp(-a\sum_{j=2}^{n}x_j)(F_i(x_i)+F_l(x_l))\cdot\mathrm{d}\prod_{j=2}^{n}F_j(x_j)+4\sum_{2\leqslant i<l\leqslant n}\alpha_{il}\int_{(-\infty,0]^{n-1}}\exp(-a\sum_{j=2}^{n}x_j)\cdot F_i(x_i)F_l(x_l)\,\mathrm{d}\prod_{j=2}^{n}F_j(x_j)=O(\int_{(-\infty,0]^{n-1}}\exp(-a\cdot\sum_{j=2}^{n}x_j)\prod_{j=2}^{n}F_j(\mathrm{d}x_j))=O(\prod_{j=2}^{n}\int_{(-\infty,0]^{n-1}}\exp(-ax_j)\cdot F_j(\mathrm{d}x_j))<\infty.\quad(7)$$

若条件(ii)满足，类似可得

$$F_1(v_1+\Delta_T)/F_1(x+\Delta_T)\leqslant c_1.\quad(8)$$

由(6)～(8)式可知，在条件(i)或条件(ii)下，$\tilde I_{111}/F_1(x+\Delta_T)$ 满足控制收敛定理. 于是当 $k=m=1$ 时，(5)式成立. 由于在 2 种条件下的讨论大同小异，因此在之后的讨论中，本文只给出在条件(i)情形下的证明.

当 $2\leqslant k\leqslant n-1,m=1$ 时，有

$$I_{k1}=\int_{(0,h(x)]^{k-1}\times(-\infty,0]^{n-k}}(\tilde I_{k11}-\tilde I_{k12})P(\bigcap_{j=2}^{n}\{X_j\in \mathrm{d}x_j\}).$$

由 $F_1\in L_{\Delta_T}$ 可得 $\tilde I_{k1}=o(F_1(x+\Delta_T))$. 与当 $k=m=1$ 时的讨论类似，下面只需验证 $\tilde I_{k11}/F_1(x+\Delta_T)$ 满足控制收敛定理即可. 由引理 1 可知，$\forall\varepsilon>0$ 和 $\forall x_{k+1},x_{k+2},\cdots,x_n<0$，$\exists x_0>0$，使得当 $x>x_0$ 时，有 $F_1(x-\sum_{r=2}^{k}x_r-\sum_{j=k+1}^{n}x_j+\Delta_T)\leqslant(1+\varepsilon)F_1(x+\Delta_T-\sum_{j=k+1}^{n}x_j)$ 对所有 $x_2,x_3,\cdots,x_k\in[0,h(x)]$ 均成立. 进而，再由条件(i)可知，对于充分大的 x，有

$$\frac{F_1(v_1+\Delta_T)}{F_1(x+\Delta_T)}\lesssim(1+\varepsilon)\exp(-a\sum_{j=k+1}^{n}x_j).\quad(9)$$

结合(6)、(7)和(9)式可知 $\tilde{I}_{k11}/F_1(x+\Delta_T)$ 满足控制收敛定理. 则当 $2\leqslant k\leqslant n-1, m=1$ 时,(5)式成立.

当 $2\leqslant k=m\leqslant n-1$ 时,只需证明 $I_{kkt}=o(\sum_{i=1}^{n-1}F_i(x+\Delta_T))$, $t=1,2$. 不失一般性,只考虑 $t=1$ 的情形. 记 $A(x,k)=(h(x),\infty)^k\times(-\infty,0]^{n-k-1}$,则

$$I_{kk1}=P(S_n\in x+\Delta_T,\bigcap_{i=1}^{k}\{X_i>h(x)\},\bigcap_{j=k+1}^{n}\{X_j\leqslant 0\})=\int_{A(x,k)}F_{k+1}(v_{k+1}+\Delta_T)(1+\alpha_{k+1}(v_{k+1},x_j)/\beta_{k+1}(x_l,x_j))P(\bigcap_{1\leqslant j\neq k+1\leqslant n}\{X_j\in dx_j\})=O(P(S_k+X_{k+1}^*+\sum_{j=k+2}^{n}X_j\in x+\Delta_T),\bigcap_{i=1}^{k}\{X_i>h(x)\},X_{k+1}^*\leqslant 0,\bigcap_{j=k+2}^{n}\{X_j\leqslant 0\}),$$

其中 X_{k+1}^* 是 X_{k+1} 的独立拷贝,且与其余所有的 X_i 相互独立. 同理取 $X_{k+2},X_{k+3},\cdots,X_n$ 的独立拷贝 $X_{k+2}^*,X_{k+3}^*,\cdots,X_n^*$,且与 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立. 再依次对 $X_{k+2},X_{k+3},\cdots,X_n$ 取条件,得

$$I_{kk1}=O(P(S_k+\sum_{j=k+1}^{n}X_j^*\in x+\Delta_T),\bigcap_{i=1}^{k}\{X_i>h(x)\},\bigcap_{j=k+1}^{n}\{X_j^*\leqslant 0\})=O(\int_{(-\infty,0]^{n-k}}P(S_k\in x-\sum_{j=k+1}^{n}x_j+\Delta_T,\bigcap_{i=1}^{k}\{X_i>h(x)\})\prod_{j=k+1}^{n}F_j(dx_j)).$$

由引理 3 可知,$\forall\varepsilon>0,\exists x_0>0,\forall x>x_0$ 和 $x_j\leqslant 0, k+1\leqslant j\leqslant n$,有

$$P(S_k\in x-\sum_{j=k+1}^{n}x_j+\Delta_T,\bigcap_{i=1}^{k}\{X_i>h(x)\})\leqslant\varepsilon\sum_{i=1}^{k}F_i(x-\sum_{j=k+1}^{n}x_j+\Delta_T).$$

于是有

$$I_{kk1}/\sum_{i=1}^{k}F_i(x+\Delta_T)\leqslant\int_{(-\infty,0]^{n-k}}(\varepsilon\sum_{i=1}^{k}F_i(x-\sum_{j=k+1}^{n}x_j+\Delta_T)/\sum_{i=1}^{k}F_i(x+\Delta_T))\prod_{j=k+1}^{n}F_j(dx_j)\lesssim\varepsilon\int_{(-\infty,0]^{n-k}}\exp(-a\sum_{j=k+1}^{n}x_j)\prod_{j=k+1}^{n}F_j(dx_j),$$

从而有 $I_{kk1}=o(\sum_{i=1}^{k}F_i(x+\Delta_T))$ 成立. 于是当 $2\leqslant k=m\leqslant n-1$ 时,(5)式成立.

当 $2\leqslant k\leqslant n-1, 2\leqslant m<k$ 时,类似上一种情形的讨论可知,有

$$I_{km1}=O(\int_{(0,h(x)]^{k-m}\times(-\infty,0]^{n-k}}P(S_m\in x-\sum_{j=m+1}^{n}x_j+\Delta_T,\bigcap_{i=1}^{m}\{X_i>h(x)\})\prod_{j=m+1}^{n}F_j(dx_j)).$$

利用在 $2\leqslant k=m\leqslant n-1$ 和 $2\leqslant k\leqslant n-1, m=1$ 中的证明方法,有 $I_{km1}=o(\sum_{i=1}^{m}F_i(x+\Delta_T))$. 于是在该情形下,(5)式也成立.

接下来证明第 2 步. 记 $B(x,n)=[-h(x),h(x)]^{n-1}$,当 x 充分大时,有

$$P(S_n\in x+\Delta_T)\geqslant P(S_n\in x+\Delta_T,\bigcup_{i=1}^{n}\{X_i>h(x),|X_j|\leqslant h(x),1\leqslant j\neq i\leqslant n\})=\int_{B(x,n)}\sum_{i=1}^{n}F_i(x+\Delta_T-\sum_{1\leqslant j\neq i\leqslant n}x_j\,|\,X_j=x_j,1\leqslant j\neq i\leqslant n)P(\bigcap_{1\leqslant j\neq i\leqslant n}\{X_j\in dx_j\})=\int_{B(x,n)}\sum_{i=1}^{n}F_i(v_i+\Delta_T)(1+\alpha_i(v_i,x_j)/\beta_i(x_l,x_j)).$$

$$P(\bigcap_{1\leqslant j\neq i\leqslant n}\{X_j\in dx_j\})\sim\sum_{i=1}^{n}F_i(x+\Delta_T)\cdot\int_{(-\infty,\infty)^{n-1}}(1+\alpha_i(x_j)/\beta_i(x_l,x_j))P(\bigcap_{1\leqslant j\neq i\leqslant n}\{X_j\in dx_j\}),\tag{10}$$

其中 $\alpha_i(x_j)=\sum_{1\leqslant j\neq i\leqslant n}\alpha_{ij}(1-2\overline{F}_j(x_j))$. 显然,若 $\alpha_{ij}=0, 1\leqslant j\neq i\leqslant n$,则有(4)式成立. 下面假设 α_{ij} 不全为 0, $1\leqslant j\neq i\leqslant n$,注意到 $F_j(X_j)\sim U(0,1)$,于是

$$\int_{-\infty}^{\infty}\overline{F}_j(x_j)F_j(dx_j)=1-E(F_j(X_j))=1/2,$$

再结合(6)式可得

$$\int_{(-\infty,\infty)^{n-1}}(1+\alpha_i(x_j)/\beta_i(x_l,x_j))P(\bigcap_{1\leqslant j\neq i\leqslant n}\{X_j\in dx_j\})=1.\tag{11}$$

由(10)~(11)式得(4)式成立. 定理 1 得证.

3 参考文献

[1] Asmussen S, Foss S, Korshunov D, et al. Asymptotics for sums of random variables with local subexponential behaviour [J]. Journal of Theoretical Probability, 2003, 16(2): 489-518.

[2] Cai Jun, Tang Qihe. On max-sum equivalence and convolution closure of heavy-tailed distributions and their applications [J]. Journal of Applied Probability, 2004, 41(1): 117-130.

[3] Wang Yuebao, Wang Kaiyong. Random walks with non-convolution equivalent increments and their applications [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,

2011，374(1)：88-105.

[4] Foss S，Korshunov D，Zachry S. An introduction to heavy-tailed and subexponential distributions [M]. New York：Springer，2013.

[5] Jiang Tao，Wang Yuebao，Cui Zhaolei，et al. On the almost decrease of a subexponential density [J]. Statistics and Probability Letters，2019，153：71-79.

[6] Embrechts P，Goldie C M. On closure and factorization properties of subexponential and related distributions [J]. Journal of the Australian Mathematical Society，1980，29(2)：243-256.

[7] Geluk J L，De Vries C G. Weighted sums of subexponential random variables and asymptotic dependence between returns on reinsureance equities [J]. Insurance Mathematics and Economics，2006，38(1)：39-56.

[8] Denisov D，Shneer V. Local asymptotics of the cycle maximum of a heavy-tailed random walk [J]. Advances in Applied Probability，2007，39(1)：221-244.

[9] Li Jinzhu，Tang Qihe. A note on max-sum equivalence [J]. Statistics and Probability Letters，2010，80(23/24)：1720-1723.

[10] Asmussen S，Rojas-Nandayapa L. Asymptotics of sums of lognormal random variables with Gaussian copula [J]. Statistics and Probability Letters，2008，78(16)：2709-2714.

[11] Geluk J，Tang Qihe. Asymptotic tail probabilities of sums of dependent subexponential random variables [J]. Journal of Theoretical Probability，2009，22(4)：871-882.

[12] Wang Dingcheng，Tang Qihe. Tail probabilities of randomly weighted sums of random variables with dominated variation [J]. Stochastic Models，2006，22(2)：253-272.

[13] Chen Yiqing，Yuen Kamchuen. Sums of pairwise quasi-asymptotically independent random variables with consistent variation [J]. Stochastic Models，2009，25(1)：76-89.

[14] 刘希军，王岳宝. 不同分布的卷积的局部封闭性及局部渐近性的充分条件和必要条件 [J]. 系统科学与数学，2009，29(4)：527-535.

[15] 江涛，徐晖. Farlie-Gumbel-Morgenstern 联合分布的 Max-Sum 局部等价式 [J]. 中国科学：数学，2016，46(1)：67-80.

[16] Kotz S，Balakrishnan N，Johnson N L. Continuous Multivariate Distributions，Volume 1：Models and Applications [M]. 2nd Edition. New York：John Wiley and Sons，2000.

[17] Nelsen R B. An introduction to copulas [M]. 2nd Edition. New York：Springer，2006.

[18] Bingham N H，Goldie C M，Teugels J L. Regular variation [M]. Cambridge：Cambridge University Press，1987.

The Local Max-Sum Equivalence of Real Valued Random Walks with Heavy-Tailed Increments Following FGM Copula

LIU Fuxiang，GONG Chan，CUI Sheng*

(College of Science，China Three Gorges University，Yichang Hubei 443002，China)

Abstract： The random walks with heavy-tailed increments following FGM copula are considered in this paper. Using a few of properties of local heavy-tailed distributions and FGM copula，the local asymptotics for the tail probabilities of partial sums are established under some mild conditions. Then，the local max-sum equivalence is generalized to the real value case and it has some values of application in risk theory.

Key words： local heavy-tailed distribution；FGM copula；local max-sum equivalence

（责任编辑：曾剑锋）