文章编号: 1000-5862(2021)01-0022-04

时间反向热传导问题的拟逆正则化方法及误差估计

石娟娟，熊向团*

(西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州　730070)

摘要: 该文讨论了时间反向热传导问题，该问题是严重不适定问题，它的解在一定条件下存在但不连续依赖于数据，这给数据处理带来了很大的不便. 该文给出一个简单便捷的拟逆正则化方法来恢复解对数据的连续依赖性. 根据拟逆正则化问题构造正则解，在先验正则化参数选取规则下，给出了该问题的近似解和精确解之间的误差估计，并用数值算例表明该方法是有效的.

关键词: 不适定问题; 反向热方程; 拟逆正则化方法; 误差估计

中图分类号: O 175　　文献标志码: A　　DOI: 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2021.01.03

0　引言

热传导问题在自然科学和工程技术领域中有许多应用，而时间反向热传导问题是不适定问题的一类重要问题，它在图像处理问题中有重要应用，通常为已知终值时刻的温度分布来求初始时刻的温度分布. 由于时间反向热传导问题违反了事物发展的时间次序，因此时间反向热传导问题是一个典型的病态问题[1]. 也就是说即使解在非常强的条件下存在，它也不连续依赖于数据，因此解决此类问题需要各种稳定的数值方法来处理，即需要特殊的正则化方法. 本文将采用一个新的拟逆正则化方法来处理时间反向热传导问题. 拟逆正则化方法来源于文献[2-3]，在文献[4-7]中该方法有更一般的应用. 拟逆正则化方法的优点在于: 若对于给定问题没有解的表达式，则可以通过该方法直接数值求解，从而更方便地求解不适定问题. 时间反向热传导问题如今已有许多的研究，文献[8]用修正的 Tikhonov 正则化方法解决反向热传导问题，文献[9]使用数值方法求解非齐次反向热传导问题，文献[10]用无时空网格法求解反向热传导问题. 而本文所讨论的问题在文献[11]中已被 Fourier 正则化方法研究. 下面将考虑在 1 维无界域[11]上的时间反向热传导问题:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in \mathbf{R}, 0 \leqslant t < T, \\ u(x,T) = g(x), & x \in \mathbf{R}. \end{cases} \tag{1}$$

这里希望从数据 $g(x)$ 来确定 $u(x,t)$ 在 $[0,T)$ 上的温度分布. 由于问题的不适定性，本文采用拟逆正则化方法来解决此问题. 这里的输入数据 $g(x)$ 往往是被测量出来的，记 $g^\delta(x) \in L^2(\mathbf{R})$ 为带噪音的测量数据并且满足

$$\| g - g^\delta \| \leqslant \delta, \tag{2}$$

δ 表示输入数据的噪音水平且 $\delta > 0$，因此定义 $f(x) \in L^2(\mathbf{R})$ 的 Fourier 变换 $\hat{f}(\xi)$ 为

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x)\,dx.$$

对问题(1)中的精确解 $u(x,t)$ 进行 Fourier 变换得到 $\hat{u}(\xi,t)$ 的形式为

$$\hat{u}(\xi,t) = e^{\xi^2(T-t)}\hat{g}(\xi), \tag{3}$$

因此 $u(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} e^{\xi^2(T-t)}\hat{g}(\xi)\,d\xi.$

更进一步，当 $t = 0$ 时，记 $f(\cdot) = u(\cdot,0)$，有

$$f(\xi) = \hat{u}(\xi,0) = e^{\xi^2 T}\hat{g}(\xi). \tag{4}$$

为了得到收敛率，需假设存在一个先验界 E，使得

$$\| f(\cdot) \| = \| u(\cdot,0) \| = \| \hat{u}(\cdot,0) \|_{L^2} \leqslant E, \tag{5}$$

这里的 $\|\cdot\|$ 表示 $L^2(\mathbf{R})$ 中的范数，并且 E 是大于 0 的有界常数，由(4) ~ (5)式以及 Parseval 等式有

$$\| f(\cdot) \|^2 = \| \hat{u}(\cdot,0) \|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} | e^{\xi^2 T}\hat{g}(\xi) |^2 d(\xi) < \infty.$$

考虑只有噪音数据 $g^\delta(x) \in L^2(\mathbf{R})$ 可用，当 $|\xi| \to \infty$ 时 $e^{\xi^2 T} \to \infty$，而 $e^{\xi^2 T}\hat{g}^\delta(\xi)$ 往往不在 $L^2(\mathbf{R})$

收稿日期: 2020-10-25

基金项目: 国家自然科学基金(11661072)和西北师范大学科学计算创新团队(NWNU-LKQN-17-5)资助项目.

通信作者: 熊向团(1977-)，男，湖北武汉人，教授，博士，博士生导师，主要从事微分方程数值解研究. E-mail: xiongxt@fudan.edu.com

中，这是因为 $\hat{g}^{\delta}(x)$ 往往不是急降函数. 由于严重的不适定性，因此本文采用拟逆正则化方法来有效地解决时间反向热传导问题，将对问题(1)建立一种新的拟逆正则化方法.

1　拟逆正则化方法

拟逆正则化方法主要是对原不适定问题加上一个小的扰动，使其扰动后的定解问题变为适定的，进而用扰动问题的解来构造原不适定问题的近似解，这里的小扰动参数即为正则化参数，因此提出新的拟逆正则化方法：

$$u_t - \alpha(u_{xx})_t - u_{xx} = 0. \tag{6}$$

构造方法来自文献[12]，它考虑了一类标准的逆热传导问题[13]. 现在拟逆正则化方法已经被用于解决各种类型的反问题[4-7]，拟逆正则化方法的数值实现可参见文献[14-15]. 对于上述时间反向热传导问题(1)，已有的拟逆方法在文献[16]中出现如下形式：$u_t - \alpha u_{xxxx} - u_{xx} = 0$，此方法要求解存在 4 阶导数，而(6)式只要求解存在 3 阶导数. 下面将用拟逆正则化方法近似问题(1)如下：

$$\begin{cases} u_t - \alpha(u_{xx})_t - u_{xx} = 0, x \in \mathbf{R}, 0 \leqslant t < T, \\ u(x,T) = g^{\delta}(x), \qquad x \in \mathbf{R}. \end{cases} \tag{7}$$

对(7)式作 Fourier 变换有

$$\begin{cases} \hat{u}_t - \alpha(\mathrm{i}\xi)^2 \hat{u}_t - (\mathrm{i}\xi)^2 \hat{u} = 0, x \in \mathbf{R}, 0 \leqslant t < T, \\ \hat{u}(\xi,T) = \hat{g}^{\delta}(\xi), \qquad \xi \in \mathbf{R}. \end{cases} \tag{8}$$

由(8)式得

$$\alpha\xi^2 \hat{u}_t + \xi^2 \hat{u} + \hat{u}_t = 0. \tag{9}$$

由常微分方程可得(9)式的通解为 $\hat{u}_{\alpha}^{\delta}(\xi,t) = C_0 \mathrm{e}^{-\xi^2 t/(1+\alpha\xi^2)}$，其中 C_0 为任意实数，并且由(8)式的终值条件得

$$C_0 \mathrm{e}^{-\xi^2 T/(1+\alpha\xi^2)} = \hat{g}^{\delta}(\xi),$$

有 $C_0 = \mathrm{e}^{\xi^2 T/(1+\alpha\xi^2)} \hat{g}^{\delta}(\xi)$. 故得到(8)式的解为

$$\hat{u}_{\alpha}^{\delta}(\xi,t) = \mathrm{e}^{\xi^2(T-t)/(1+\alpha\xi^2)} \hat{g}^{\delta}(\xi). \tag{10}$$

从而有 $u_{\alpha}^{\delta}(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} \mathrm{e}^{\xi^2(T-t)/(1+\alpha\xi^2)} \hat{g}^{\delta}(\xi)\, \mathrm{d}\xi$.

因此(10)式被称为问题(1)的正则解，容易看出 $\forall \alpha, \xi^2(T-t)/(1+\alpha\xi^2)$ 关于 ξ 是有界的，称 $\hat{u}_{\alpha}^{\delta}(\xi,t)$ 是 $u(x,t)$ 的近似解. 下面将对上述拟逆正则化方法做误差分析.

2　误差估计

引理 1[17]　对于 $r \geqslant 0$，有不等式

$$1 - \mathrm{e}^{-r} \leqslant r. \tag{11}$$

定理 1 给出问题(1)的精确解(3)和近似解(10)之间的误差估计，本文最主要的结论如下：

定理 1　对于 $t \in [0,T]$，假设 $u(\cdot)$ 是带有精确数据 $g(x)$ 的精确解，$u_{\alpha}^{\delta}(\cdot)$ 是带有噪音数据 $g^{\delta}(x)$ 的正则解，假设条件(2)和(5)成立，若选择正则化参数为

$$\alpha = (T-t)/\ln(E/\delta)^{1/2}, \tag{12}$$

则有

$$\| u_{\alpha}^{\delta}(\cdot,t) - u(\cdot,t) \| \leqslant \delta^{1/2} E^{1/2} + CE/\ln(E/\delta)^{1/2}, \tag{13}$$

其中 C 为常数且 $C = 4(T-t)^2 \mathrm{e}^{-2}/t^2$.

证　根据三角不等式可得，

$$\| u_{\alpha}^{\delta}(\cdot,t) - u(\cdot,t) \| = \| \hat{u}_{\alpha}^{\delta}(\cdot,t) - \hat{u}(\cdot,t) \| \leqslant \| \hat{u}_{\alpha}^{\delta} - \hat{u}_{\alpha} \| + \| \hat{u}_{\alpha} - \hat{u} \| = I_1 + I_2. \tag{14}$$

首先估计 I_1，由(2)式和(10)式可得

$$I_1 = \| \hat{u}_{\alpha}^{\delta} - \hat{u}_{\alpha} \| = \| \mathrm{e}^{\xi^2(T-t)/(1+\alpha\xi^2)} \hat{g}^{\delta}(\xi) - \mathrm{e}^{\xi^2(T-t)/(1+\alpha\xi^2)} \hat{g}(\xi) \| = \| \mathrm{e}^{\xi^2(T-t)/(1+\alpha\xi^2)} (\hat{g}^{\delta}(\xi) - \hat{g}(\xi)) \| \leqslant \| \mathrm{e}^{\xi^2(T-t)/(1+\alpha\xi^2)} \| \| \hat{g}^{\delta}(\xi) - \hat{g}(\xi) \| \leqslant \sup_{\xi \in \mathbf{R}} \mathrm{e}^{\xi^2(T-t)/(1+\alpha\xi^2)} \delta. \tag{15}$$

令 $A(\xi) = \mathrm{e}^{\xi^2(T-t)/(1+\alpha\xi^2)}$，则有

$$A(\xi) = \mathrm{e}^{\xi^2(T-t)/(1+\alpha\xi^2)} \leqslant \mathrm{e}^{(T-t)/\alpha} (\xi \in \mathbf{R}).$$

因此，由(15)式知

$$I_1 = \| \hat{u}_{\alpha}^{\delta} - \hat{u}_{\alpha} \| \leqslant \sup_{\xi \in \mathbf{R}} A(\xi)\delta \leqslant \delta \mathrm{e}^{(T-t)/\alpha}. \tag{16}$$

接下来估计 I_2，由(3)、(4)和(10)式知

$$I_2 = \| \hat{u}_{\alpha} - \hat{u} \| = \| \mathrm{e}^{\xi^2(T-t)} \hat{g}(\xi) - \mathrm{e}^{\xi^2(T-t)/(1+\alpha\xi^2)} \hat{g}(\xi) \| = \| (\mathrm{e}^{\xi^2(T-t)} - \mathrm{e}^{\xi^2(T-t)/(1+\alpha\xi^2)}) \cdot \hat{g}(\xi) \| = \| (\mathrm{e}^{\xi^2(T-t)} - \mathrm{e}^{\xi^2(T-t)/(1+\alpha\xi^2)}) \mathrm{e}^{\xi^2 T} \hat{g}(\xi)/\mathrm{e}^{\xi^2 T} \| \leqslant \| \mathrm{e}^{-\xi^2 t}(1 - \mathrm{e}^{-\alpha\xi^4(T-t)/(1+\alpha\xi^2)}) \hat{u}(\xi,0) \| \leqslant \sup_{\xi \in \mathbf{R}} (1 - \mathrm{e}^{-\alpha\xi^4(T-t)/(1+\alpha\xi^2)}) \mathrm{e}^{-\xi^2 t} \| \hat{u}(\xi,0) \|.$$

令 $B(\xi) = \mathrm{e}^{-\xi^2 t}(1 - \mathrm{e}^{-\alpha\xi^4(T-t)/(1+\alpha\xi^2)}) (\xi \in \mathbf{R})$，由(11)式得

$$(1 - \mathrm{e}^{-\alpha\xi^4(T-t)/(1+\alpha\xi^2)}) \leqslant \alpha\xi^4(T-t)/(1+\alpha\xi^2) (\xi \in \mathbf{R}),$$

因此

$$B(\xi) \leqslant \alpha\xi^4(T-t)\mathrm{e}^{-\xi^2 t}/(1+\alpha\xi^2) \leqslant \alpha\xi^4(T-t)\mathrm{e}^{-\xi^2 t} (\xi \in \mathbf{R}), \tag{17}$$

令 $G(\xi) = \alpha\xi^4(T-t)\mathrm{e}^{-\xi^2 t}$，则有

$$G'(\xi) = 4(T-t)\mathrm{e}^{-2}/t^2 (\xi \in \mathbf{R}),$$

故有 $G(\xi)$ 的极大值为 $\xi_0 = (2/t)^{1/2}$，因此由(17)式得 $\sup_{\xi \in \mathbf{R}} B(\xi) \leqslant \sup_{\xi \in \mathbf{R}} \alpha\xi^4(T-t)\mathrm{e}^{-\xi^2 t}$.

将极大值代入，有 $\sup_{\xi \in \mathbf{R}} B(\xi) \leqslant 4(T-t)\mathrm{e}^{-2}\alpha/t^2$. 故有

$$I_2 = \| \hat{u}_{\alpha} - \hat{u} \| \leqslant 4(T-t)\mathrm{e}^{-2}\alpha E/t^2. \tag{18}$$

因此由(12)、(14)、(16)和(18)式可得

$\| u_\alpha^\delta(\cdot,t) - u(\cdot,t) \| = \| \hat{u}_\alpha^\delta(\cdot,t) - \hat{u}(\cdot,t) \| \leqslant I_1 + I_2 \leqslant \delta e^{(T-t)/\alpha} + 4(T-t)e^{-2}\alpha E/t^2 \leqslant \delta^{1/2}E^{1/2} + CE/\ln(E/\delta)^{1/2}$,

其中 $C = 4(T-t)^2 e^{-2}/t^2$,因此(13)式成立,定理2得证.

3 数值实验

下面给出数值算例[11].设数据函数为

$$g(x) = e^{-x^2/(1+4T)}/\sqrt{1+4T}. \tag{19}$$

由(19)式容易验证函数 $u(x,t) = e^{-x^2/(1+4t)}/\sqrt{1+4t}$ 是初值问题

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in \mathbf{R}, t > 0, \\ u|_{t=0} = e^{-x^2}, & x \in \mathbf{R} \end{cases}$$

的唯一解.

考虑反向热传导方程在 $[0,T)$ 上的解 $u(x,t)$:

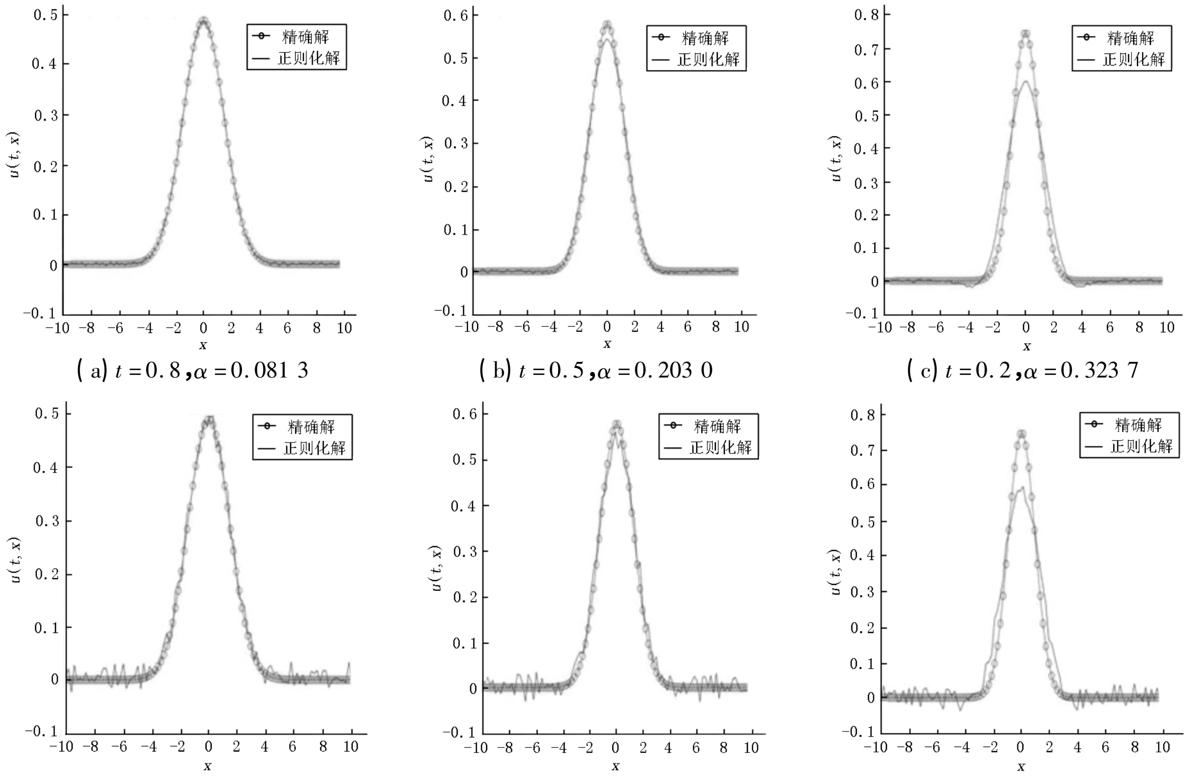
$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in \mathbf{R}, 0 \leqslant t < T, \\ u|_{t=T} = e^{-x^2/(1+4T)}/\sqrt{1+4T}, & x \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

现在用数值实验验证理论结果,运行环境为 Matlab R2017b.

当输入数据中包含噪音时,使用在 Matlab 软件中给出的随机函数来模拟噪声数据 $(g^\delta)_i = g_i + \varepsilon r(g_i)$,其中 $r(g_i)$ 是精确数据 g_i 在 $[0,1]$ 上的随机数,g 为离散向量,它的元素是 $g_i(i = 1,2,\cdots,N_x)$,ε 表示测量数据的噪音水平.测试参数为 $T = 1, N_x = 100, x \in [-10,10]$.

在图1(a)~图1(c)中 $T = 1$,t 分别取0.8、0.5、0.2,正则化参数 α 的取值分别为0.081 3、0.203 0、0.323 7;此时噪音水平固定为 1×10^{-3}.在图1(d)~图1(f)中 t 分别取0.8、0.5、0.2;正则化参数 α 的取值分别为0.102 6、0.257 6、0.411 4;此时噪音水平固定为 1×10^{-2}.

从图1可见:随着 t 的减小,数值结果变得更差.这是由于接近 $t = 0$ 的时刻,问题变得越来越不适定;同时可以看到,噪音水平越高,数值结果越差.在数值实验中正则化参数完全按照(12)式来选取,可见本文提出的拟逆正则化方法是有效的.



(a) $t = 0.8, \alpha = 0.081\ 3$ (b) $t = 0.5, \alpha = 0.203\ 0$ (c) $t = 0.2, \alpha = 0.323\ 7$

(d) $t = 0.8, \alpha = 0.102\ 6$ (e) $t = 0.5, \alpha = 0.257\ 6$ (f) $t = 0.2, \alpha = 0.411\ 4$

图1

4 结论

拟逆正则化方法是解决不适定问题的有效方法,本文通过一个新的构造方式来近似求解时间反向热传导问题,其结果表明:在选取先验参数的情况下得到收敛性的误差估计.本文虽然只研究了在1维无界域上的时间反向热传导方程,但该方法对

高维情形下变系数的复杂情况同样适用，它可以提供稳定的近似方法，进一步可以用差分离散近似拟逆方程，从而解决更复杂的时间反向问题.

5 参考文献

[1] Isakov V. Inverse problems for partial differental equation [M]. New York: Springer-Verlag, 1998.

[2] Lattés R, Lions J L. The method of quasi-reversibility: applications to partial differental equations [M]. New York: American Elseiver, 1969.

[3] Miller K. Stablized quasi-reversibility and other nearly-best-possible methods for non-well-possed problems [M] //Knops R J. Symposium on non-well-posed problems and logarthmic convexity. Berlin: Springer-Verlag, 1973: 161-176.

[4] Wang Jungang, Wei Ting. Quasi-reversibility method to identify a space-dependent source for the time-fractional diffusion equation [J]. Applied Mathematical Modelling, 2015, 39(20): 6139-6149.

[5] Li Xiaoxiao, Yang Fan, Liu Jie, et al. The quasi-reversibility regularization method for identifying the unknown source for the modified Helmholtz equation [J]. Journal of Applied Mathematics, 2013, 2013(2): 245963.

[6] Liu Jichuan, Wei Ting. A quasi-reversibility regularization method for an inverse heat conduction problem without intial data [J]. Applied Mathematics and Computation, 2013, 219(23): 10866-10881.

[7] Yang Fan, Fu Chuli. The quasi-reversibility regularization method for identifying the unknown source for time fractional diffusion equation [J]. Applied Mathematical Modelling, 2015, 39(5/6): 1500-1512.

[8] Zhao Zhenyu, Meng Zehong. A modified Tikhonov regularization method for a backward heat equation [J]. Inver Problems in Science and Engineering, 2011, 19(8): 1175-1182.

[9] Su Lingde, Jiang Tongsong. Numerical method for solving nonhomogeneous backward heat conduction problem [J]. International Journal of Differential Equations, 2018, 2018: 1868921.

[10] Ku Chengyu, Liu Chihyu, Yeih Weichung, et al. A novel space-time meshless method for solving the backward heat conduction problem [J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2019, 130: 109-122.

[11] Fu Chuli, Xiong Xiangtuan, Qian Zhi. Fourier regularization for a backward heat equation [J]. Journal of Mathematical Analysis and Application, 2007, 331(1): 472-480.

[12] Eldén L. Approximations for a Cauchy problem for the heat equation [J]. Inverse Problems, 1987, 3(2): 263-273.

[13] Weber C F. Analysis and solution of the ill-posed inverse heat conduction problem [J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 1981, 24(11): 1783-1792.

[14] Qian Zhi, Fu Chuli, Feng Xiaoli. A modified method for high order numerical derivatives [J]. Applied Mathematics and Computation, 2006, 182(2): 1191-1200.

[15] Qian Zhi, Fu Chuli, Xiong Xiangtuan. A modified method for a non-standard inverse heat conduction problem [J]. Applied Mathematics and Computation, 2006, 180(2): 453-468.

[16] Liu Jijun, Yamamoto M. A backward problem for the time-fractional diffusion equation [J]. Applicable Analysis, 2010, 89(11): 1769-1788.

[17] Qian Ailin, Xiong Xiangtuan, Wu Yujiang. On a quasi-reversibility regularization method for a Cauchy problem of the Helmholtz equation [J]. Journal of Computation and Applied Mathematics, 2010, 233(8): 1969-1979.

The Quasi-Reversibility Regularization Method and Error Estimate for the Time-Inverse Heat Conduction Problem

SHI Juanjuan, XIONG Xiangtuan*

(School of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu 730070, China)

Abstract: The backward heat conduction problem in time is considered, although its solution exists but discontinuously depends on the data. It is very inconvenient for numerical computation, so a simple and convenient new quasi-reversibility regularization method is proposed to restore the continuous dependence of the solution on the data. The regularization solution is obtained according to the quasi-reversibility regularization problem. Meanwhile, the convergence of errors between the approximate solution and the exact solution for the ill-posed problem is estimated, and the priori regularization parameter selection rules of the method are given. A numerical example is made to demonstrate the effectiveness of the proposed method.

Key words: ill-posed problem; inverse heat equation; quasi-reversibility regularization method; error estimate

（责任编辑：曾剑锋）