文章编号:1000-5862(2021)01-0038-08

# 数学问题提出能力的测评模型及指标赋权

洪清玉[1],康春花[1,2*],曾平飞[1],俞向军[1]
(1. 浙江师范大学教师教育学院,浙江 金华 321004;2. 浙江师范大学浙江省智能教育技术与应用重点实验室,浙江 金华 321004)

摘要:数学问题提出能力的测量与评估成为数学教学研究的热点议题,其测评模型及指标赋权的合理性与科学性是研究者关注的首要问题. 该文在梳理数学问题的定义、已有的测评内容和方式的基础上,从问题的本质特征、数学特征和语言特征这 3 个维度构建数学问题提出的测评模型,并对该模型中的指标进行了 2 级赋权. 研究结果表明:(i)验证性因素分析的各项指标均较好,所提测评模型具有较好的结构效度,并且各维度的内部信度也较高;(ii)最大特征根计算的一致性指标 $C_I$ 和一致性比例 $C_R$ 表明,基于矩阵判别表的专家赋权具有较高的一致性,赋权具有较好的合理性和科学性. 测评模型和指标权重的确定,为如何测量及评估学生的问题提出能力提供了较为合理的思路.

关键词:数学问题提出能力;测评指标;测评工具;指标赋权
中图分类号:B 841　　文献标志码:A　　DOI:10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2021.01.06

## 0 问题提出

阿尔伯特·爱因斯坦[1]曾说过,提出问题要从新的角度来看待旧的问题,需要一定的创造性和想象力,往往比解决问题更重要. 1989、1991 和 2000 年全美数学教师联合会 NCTM 颁布的《学校数学课程与评价标准》[2]《数学教学的专业标准》[3]和《学校数学的原则与标准》[4]都明确强调数学问题提出的重要性. 在国际学生评价项目(Programmer for International Student Assessment,PISA)所界定的 8 项数学素养中,问题提出能力位居第 2[5]. 中国 2011 年《全日制义务教育数学课程标准》[6]在原有分析和解决问题的基础上,进一步明确要求学生能从数学角度提出问题、理解问题,注重培养学生的应用意识、创新意识和实践能力. 2017 年《普通高中数学课程标准》[7]从数学学科核心素养的角度出发,再次强调了发现和提出问题的重要性,要求学生能用数学语言发现问题和提出问题,把发现问题、提出问题、分析问题和解决问题这“四能”作为学生应掌握的基本能力. 可见,问题提出能力是数学学科核心能力的重要组成部分,对于数学学习、培养学生数学思维均起着重要的作用. 在培育数学核心素养背景下,学生问题提出能力作为数学抽象素养的一种体现逐渐成为数学教育研究和实践领域的主要关注点之一[8],其中数学问题提出能力测评模型的构建及指标赋权就是一个重要议题.

纵观数学问题提出能力测评的文献,已有研究的视角和侧重点各不相同. 有的研究是从问题的性质[9-10]和信息处理方式[11]等角度对测评指标进行论述,但要么未体现问题该有的本质特征,要么在具体应用中较烦琐,例如要进行质性分析和编码,没有可量化的指标直接对其进行判断. 此外,尽管少数学者对测评指标进行了赋权的研究,但其思路是直接利用教师赋权的数值作为各指标的权重[12]. 若能利用专家在判断矩阵上的数值,充分发挥专家群决策功能,通过统计方法计算出各级指标的权重,并对赋权结果进行信度验证,则在一定程度上可以避免直接赋权的主观性和不一致性. 为此,本文拟在梳理“问题”和“数学问题”的本质特征、数学问题提出的测评方式等相关文献的基础上,构建一个较为合理的测评模型,对模型中的各级指标进行科学赋权,并对 2 者的信效度进行验证,以期为学生数学问题提出能力的相关研究提供可直接量化的测评模型和指标权重. 数学问题提出能力的量化与显性化,对于教材的编写、学生问题提出的教学与培养、测评方式的

收稿日期:2020-07-11
基金项目:教育部人文社会科学青年基金(19YJC880122)和浙江省智能教育技术与应用重点实验室开放研究基金(jykf20050)资助项目.
通信作者:康春花(1974-),女,江西弋阳人,副教授,博士,主要从事心理测量与评价研究. E-mail:akang@zjnu.edu.cn

变革等均有一定的参考价值.

# 1　数学问题提出能力测评模型的构建

## 1.1　关于“问题”“数学问题”的定义

要研究数学问题提出，首先要清楚“问题”和“数学问题”的本质特征. 从心理学的视角而言[13]，问题应包括事物的初始状态、想要达到的目标状态以及存在于 2 者之间的障碍. 从信息加工的角度来说[14]，数学问题对于学生而言，是一组尚未达到目标状态的、有待加工处理的信息系统，由已知条件、结果状态和算法的数学表达构成.《义务教育数学课程标准(2011 年版)》[15]中指出: 问题提出能力是创新意识的一种体现，它指的是学生根据所给问题情境，基于自身数学经验和对特定情境的理解，建构出包含已知条件、目标信息(即应达到的结果状态)以及运算信息(即包括算法或策略在内的数学问题表达，这种表达可以是文字、图形或者符号).

## 1.2　数学问题提出能力已有的测评方式

已有关于数学问题提出能力的测评，多是基于问题情境[9-10]，让学生提出不同难度水平的数学问题，通过评价学生所提数学问题的质量来评估学生的数学问题提出能力.

早期的研究主要是要求学生在完全开放式的情境中提出尽可能复杂的问题，测评方式主要是凭借教师或研究者的经验主观地从难度(复杂度)、新奇性等维度对学生问题提出能力进行评定[16-17]，该测评方式较为简单粗糙、缺乏统一的量化标准，但为后来的研究者提供了一些可参考的测评指标要素.

随着研究的不断深入，研究者们逐渐意识到早期经验性的测评框架的不严谨性，开始采用基于具体的情境任务的评价方式. 通过让学生根据所给情境提出问题，对学生提出的问题进行分类，根据学生所提问题的性质[9-10]或信息处理方式[11]对其所提问题进行分类，从而对其问题提出能力加以评价. 但这些测评方式均未从“问题”的本质特征进行清楚界定. 如有研究采用具体的任务情境，要求学生在规定时间内根据给定的问题情境提出可解答的问题，以是否为数学问题、问题是否可解以及问题的复杂性 3 个指标对学生提出的数学问题进行编码[9]，但该测评方式并未从“问题”的本质特征出发界定清楚所提问题是否为数学问题.

夏小刚等[12]借鉴创造力的测评方式，通过问题的数量来评价思维的流畅性，通过问题的种类来评价思维的灵活性，通过问题的新颖性来评价思维的独创性，从而对学生的数学问题提出能力进行评价，但创造性这一“质”的标准的衡量仍是一个难点，以流畅性、变通性、创新性为标准的评价体系，这 3 个标准能否涵盖学生提问能力的全部仍有待商榷.

C. Osman 等[18]结合前人的研究，从问题的可解性、合理性、数学结构、问题情境以及语言 5 个 1 级指标对数学问题提出能力进行评价. 该研究较好地体现了问题的多样性，从多角度多层面综合地对数学问题提出能力进行评价，但测评指标是否在同一层面以及各个指标的权重是否一致值得进一步思考.

## 1.3　数学问题提出能力测评模型的提出

通过梳理文献可以发现，已有研究其研究范式是一致的，均是基于某一问题情境，让学生尽可能多地提出不同的数学问题，然后从多个角度对学生所提问题进行分析，从而判断其数学问题提出能力，但其“多个角度”各不相同，这就无法形成一个统一的、完善的评价模型. 综合上述文献，要通过分析学生所提问题的质量来推断其问题提出能力，研究者认为: 首先就要看所提问题是否符合“问题”和“数学问题”的基本特征，若符合了 3 个本质特征，则至少学生所提的是个问题; 其次，则是看所提问题的广度和深度，这可以通过学生提出问题的数量、复杂性、隐含信息等数学特征来分析; 再次，还要看所提问题的语言特征，相同的问题，语言表述的精确性与简洁性不一样，其质量也不一样. 由此，可以通过分析学生在问题的本质特征、数学特征和语言特征下各级指标的得分来评估学生的问题提出能力.

**1.3.1　问题的本质特征**　“问题”应包含条件信息、目标信息和运算信息[13]，从而学生所提的问题首先要符合问题的本质特征，即: (i) 已知条件的描述是否清晰合理; (ii) 是否是在基于对所给问题情境的理解下提出的; (iii) 根据已知条件问题的目标状态能否求解. 这既符合了 D. H. Jonassen[19]关于结构良好问题的定义，也符合了问题提出活动的特性——所提问题基于对所给情境的理解. 情境理解性是指学生理解所给的问题情境，提出的数学问题符合题目给定的问题情境[20]. 此外，研究者发现理解问题情境很有可能是问题提出的首要步骤，理解问题情境直接影响提出问题质量[21]. 因此，将问题的本质特征归纳为: 已知条件合理性、目标状态可解性以及情境理解性.

**1.3.2　问题的数学特征**　已有研究[22-23]将问题的数量作为评价问题提出能力的要素之一，这是值得借鉴的，合理、可解的数学问题的数量在一定程度上

反映了学生思维的流畅性.

问题类型在一定程度上体现了学生认知水平，心理学家将问题划分为常规问题和非常规问题[24]. 解决常规问题的依据主要是从已有认知结构中提取，更多体现的是复现性，给出了所有必要的已知条件有确定的答案. 解决非常规问题不能直接用已知经验来处理当前情境，需要以原来的认知结构为基础，通过独立思考形成新的认知结构. 非常规问题通常是开放型的，没有确定的答案，还缺乏很多有关信息，解决非常规性问题的方式更多体现为创造性和探索性[25].

从认知的角度来看，情境是认知活动的信息来源. 数学情境是包含相关数学知识和数学思想方法的情境，激发数学问题提出的同时也能为数学问题的提出和解决提供相应的信息和依据. 适宜的问题表征可以促进个体对问题的正确理解. 学生需要根据所给的问题情境，在已有认知结构的基础上对问题情境进行理解和内化，发现问题空间从而形成问题图式[26]. 因此，本文将学生通过数学语言、符号或图形进行表达的问题表征作为评价学生的数学问题提出能力的指标之一.

学生所提数学问题的复杂性可通过问题结构的完整性来体现，问题的复杂性本质上是初始状态到目标状态的算子，算子不同，即从初始状态到目标状态所要克服的障碍不同[27]. 有的算子只需要单步骤便能实现起始状态向目标状态的转换，而有的算子需要多步骤的操作才能完成任务. 这与纽威尔和西蒙所提出的问题空间理论相一致[27]. 因此，本文通过解答学生提出的问题所需步骤判断该问题结构的完整程度，作为评价学生数学问题提出能力的要素之一.

问题的已知条件是否含有隐含信息，也会影响问题的空间状态，含有隐含信息的已知条件在认知加工过程中需要对信息进一步挖掘才能达到目标状态. 数学数量关系分为直述数量关系和隐含数量关系，区别在于是否通过题目直接给出，隐含数量关系指的是隐含的数值关系以及隐含的运算关系[28]. 因此，本文将是否含有隐含条件作为评价学生数学问题提出能力的要素之一.

1.3.3　问题的语言特征　从问题的语言特征出发，梳理出 3 个用于评价学生所提数学问题的评价指标: 语言的简洁性、精确性和逻辑性. 有学者认为一个好的数学问题表述应当是清晰、准确、简洁易懂的，且具有一定的逻辑性[29-30]. 可见，学生的语言表征能力对于学生提出数学问题是有一定影响的，语言表征包含学生的表达是否清晰易懂、是否清楚准确完整以及是否严谨有条理.

由此，综合对上述文献的梳理和分析，研究构建出数学问题提出能力的测评模型(见图 1).

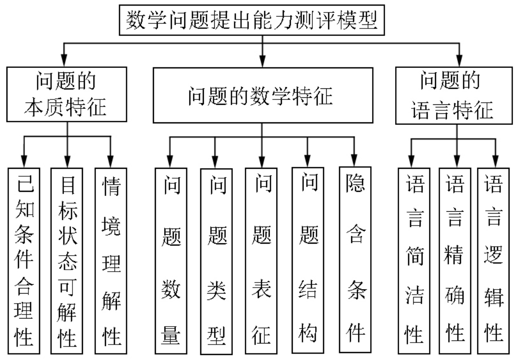

**图 1　数学问题提出能力的测评模型**

## 2　数学问题提出能力测评模型的信效度验证

图 1 已经明确了测评模型的各级关系，但模型构建是否合理，这需要通过收集相关数据来验证其信效度，具体步骤为: (ⅰ) 将 11 个指标设计成数学问题提出能力测评指标的调查问卷，收集一线教师、教研员等对于这些指标的认同度数据; (ⅱ) 效度的验证可直接通过验证性因素分析来进行; (ⅲ) 在验证性因素分析确定了最终模型的基础上，信度的验证可通过分析总维度及各分维度的内部一致性系数来进行.

### 2.1　研究对象

中小学一线数学教师、教研员、数学专业的硕士和博士，以及从事数学教育的高校教师. 本次共收集 353 份数据. 其中小学数学教师 162 名、初中数学教师 116 名、高中数学教师 41 名、高校教师 3 名、数学专业硕士和博士共 31 名. 通过问卷星收集了福建、浙江、安徽、河南、江西、四川等 14 个省的数据.

### 2.2　研究工具

将 11 个指标设计成数学问题提出能力测评指标的调查问卷，要求参与调查者根据自己对数学问题提出的理解，判断各个指标用于评价学生所提数学问题的重要性程度，各指标均给出具体解释以便被试能够更好地理解. 例如，已知条件合理性是指学生提出的问题对已知条件的描述是否清楚合理，请根据您的理解，判断该指标的重要性程度. 问卷采用李克特 5 点计分，1 表示非常不重要，5 表示非常重要.

### 2.3　数据分析方法

采用 Amos24.0 通过验证性因素分析对数学问题提出能力测评模型进行效度验证，采用 SPSS23.0 软件对数据进行信度分析.

### 2.4　研究结果

数学问题提出能力是一种综合能力，其影响因素之间具有密不可分的关系. 因此，构建的数学问题提出能力模型应该是多层次和多变量的. 本文从多角度综合对数学问题提出能力进行评价，利用调查数据进行建构效度检验，验证数学问题提出能力测评模型的有效性与科学性.

验证性因素分析的结果如图 2 和表 1 所示. 从图 2 和表 1 可知，所有的观测变量与潜在变量之间的因素负荷量均高于 0.6; $C_{MIN}/D_F$ 为 3.214，小于 5; 所有的拟合指数均高于 0.9; 残差指标均小于 0.08，在适当范围内. 这些结果均达到测量学要求，这表明所构建的模型较为科学合理[31]，具有良好的建构效度[32].

在测评模型确定的基础上，对总问卷及各分问卷进行信度分析，结果发现总问卷的克隆巴赫 $\alpha$ 系数为 0.871，问题的本质特征、数学特征、语言特征的克隆巴赫 $\alpha$ 系数分别为 0.717、0.761、0.824，均大于 0.650，这表明该模型的总维度及各分维度均具有较好的内部一致性.

表 1　模型拟合指数

| MODEL | GFI | CFI | IFI | NFI | ACFI | RMSEA | RMR |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 0.938 | 0.938 | 0.938 | 0.913 | 0.900 | 0.080 | 0.033 |

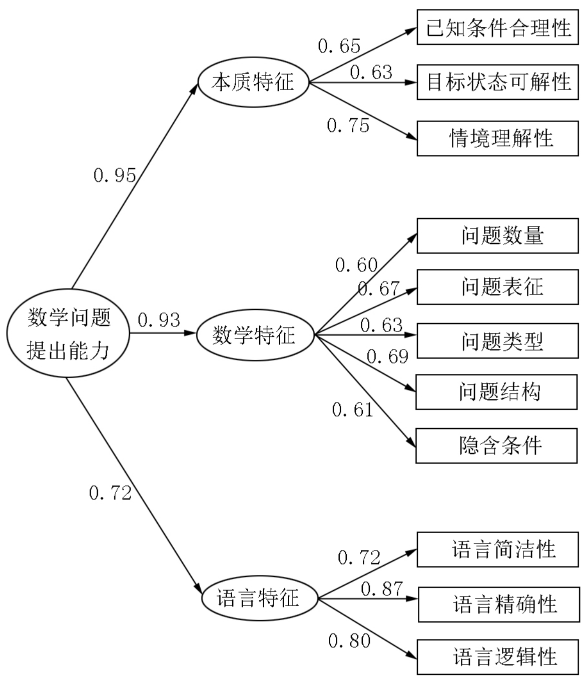


图 2　数学问题提出能力的测评模型

## 3　数学问题提出能力测评指标的赋权

验证性因素分析确定了测评模型，其中问题的本质特征、数学特征及语言特征为 1 级指标，其余均为 2 级指标（见图 2）. 虽然模型中各级指标会互相影响，但并非所有指标对于评价数学问题提出的影响程度都是一致的，因此需要对各指标进行赋权.

为了降低研究者的主观性，研究采用层次分析法（The analytic hierarchy process，AHP）[33]对各级测评指标进行赋权. 层次分析法将一个复杂决策系统视为整体，首先将与决策有关的元素分解为目标、准则、方案等层次，然后层层分解为若干层次目标和影响因素; 其次，用量化的方式来体现各个因素之间关于重要性的主观判定，构建判断矩阵表; 再次，通过数学方法可以计算出各层次中所蕴含的各个因素的相对重要性的权重; 最后，利用定性指标模糊量化方法算出各层次权向量的单排序和总排序，实现定性问题的定量化研究，从而确保得出的指标权重具有较高的可信度，指标权重能代表该项指标在整个评价体系中的重要性.

### 3.1　研究对象

层次分析法（AHP）主要是以研究对象理解问题的实质和要素为出发点，其中定性的成分占据了主导地位，因此需要的定量数据较少[33]. 本文的研究对象均是教龄在 10 年以上的专家，其中包含 4 名数学专家和 1 名测量学专家，专家的职称结构为 1 名一级教师和 4 名高级教师.

### 3.2　研究思路

根据层次分析法（AHP）的原理，结合验证性因素分析所得出的测评指标，将用于评价数学问题提出能力的要素进行分层. 本研究的目标就是数学问题提出能力，目标层为本研究的决策目标——数学问题提出能力，准则层为 3 个评价学生所提问题质量的 1 级指标——问题的本质特征、问题的数学特征和问题的语言特征，方案层为 11 个 2 级测评指标. 利用两两比较的分析方法，每次确定 2 个指标之间的相对重要性，编制各层次的指标权重判断矩阵表. 利用 Yaahp 软件中的专家群决策功能，采用判断矩阵加权几何平均的方法集结专家的数据，计算各个权重矩阵的特征值和特征向量、最大特征值，并算出一致性比例进行一致性检验，最后得出在整个指标体系中各指标所对应的权重[33]（见图 3）.

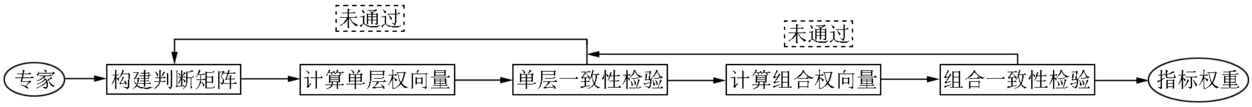


**图 3　层次分析法流程图**

## 3.3　数据分析

Yaahp 软件是一种以层次分析法和模糊综合评价法为基础的综合评价软件，为层次模型构造、判断矩阵数据录入、排序权重计算等提供帮助[33]. 该软件是一种可视化建模与计算软件，能够简便快捷地进行矩阵一致性判断，得到权重向量. 并且能够对判断矩阵进行一定范围的自主修改，节省大量的矩阵计算步骤及时间. 本文采用 Yaaph 软件对数学问题提出能力的各级指标进行赋权.

## 3.4　研究结果

3.4.1　**测评指标的权重**　根据层次分析法设计权重判断矩阵表，专家根据自己对数学核心素养及问题提出能力的理解对各级指标的相对重要程度进行量化评分，重要程度可用 1、2、3、⋯、7、8、9 及其倒数来表示. 1 表示 2 个指标的重要性一致; 3 表示前者比后者稍微重要; 5 表示前者比后者明显重要; 7 表示前者比后者强烈重要; 9 表示前者比后者极端重要. 2、4、6、8 表示上述相邻判断的中值. 反之，若后者比前者重要，则用1 ~ 9的倒数表示. 如问题解决能力: 问题提出能力，若您认为问题解决比问题提出极端重要，则用 9 来表示; 若您认为问题提出比问题解决极端重要，则用 1/9 来表示.

表 3 为 Yaaph 软件所得各级指标权重. 结果如下: ( i) 1 级指标权重之和为 1，即问题的本质特征、数学特征及语言特征的权重系数相加为 1. 此外，如问题本质特征下的 3 个 2 级指标，即已知条件合理性、目标状态可解性及情境理解性，这 3 个 2 级指标的权重系数相加也为 1. ( ii) 基于测评工具的 1 级指标、2 级指标及其权重系数能够直接量化学生的数学问题提出能力，不仅能够得出学生数学问题提出能力的分值，而且能够得到学生在问题本质特征、数学特征及语言特征上的具体表现. ( iii) 在 1 级指标中，问题的本质特征所占比例最大，进一步验证了学生要提出一个合理的数学问题，首先要判断是否符合问题的本质特征. 问题本质特征对于评价学生数学问题提出能力占据着至关重要的位置. 指标权重的结果也验证了本文从问题的本质特征出发提出的测评模型是合理的，学生只有真正理解了“问题”的本质才有可能提出问题.

**表 3　数学问题提出能力各级指标的权重汇总表**

| 1 级指标 | 权重系数 | 2 级指标 | 权重系数 | 总权重系数 |
|---|---|---|---|---|
| 本质特征 | 0.553 9 | 已知条件合理性 | 0.425 6 | 0.235 7 |
| | | 目标状态可解性 | 0.445 8 | 0.246 9 |
| | | 情境理解性 | 0.128 6 | 0.071 2 |
| 数学特征 | 0.259 7 | 问题数量 | 0.200 2 | 0.052 0 |
| | | 问题类型 | 0.186 7 | 0.048 5 |
| | | 问题表征 | 0.252 9 | 0.065 7 |
| | | 问题结构 | 0.242 3 | 0.062 9 |
| | | 隐含条件 | 0.118 0 | 0.030 6 |
| 语言特征 | 0.186 4 | 语言简洁性 | 0.162 7 | 0.030 3 |
| | | 语言精确性 | 0.367 9 | 0.068 6 |
| | | 语言逻辑性 | 0.469 4 | 0.087 5 |

3.4.2　**测评指标权重的验证**　本文使用了 Yaahp 软件对权重的计算进行简单化处理，只需要在软件中输入对应的层级关系和权重判断矩阵表的比较数值即可自动计算出各准则层的权重. 以数学问题提出能力的 3 个 1 级指标的权重矩阵 $A$ 为例，计算步骤如下: ( i) 对权重矩阵 $A$ 的列向量进行归一化处理，求出矩阵 $A$ 的最大特征根 $\lambda_{\max}$; ( ii) 通过一致性指标检验 $C_I$ 来验证权重判断矩阵中各个因素权重之间是否合理; ( iii) 引入平均随机一致性指标 $R_I$ 对一致性指标 $C_I$ 进行校正，$R_I$ 值可根据矩阵阶数 $n$ 来确定( 见表 4) . 校正后得一致性比例 $C_R = C_I/R_I$.

判断矩阵偏离一致性条件需要在容许的范围之内，通过一致性检验指标 $C_I$ 和 $R_I$ 来衡量矩阵偏离一致性程度. 一般认为，当一致性比例 $C_R > 0.1$ 时，计算出的指标权重未通过显著性检验，需要对判断矩阵做进一步的调整; 当一致性比例 $C_R < 0.1$ 时，计算出的指标权重通过显著性检验，即判断矩阵的一致性较高，计算的指标权重有效[33].

表 4　随机一致性指标 $R_I$ 值表

| 矩阵阶数 $n$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $R_I$ | 0 | 0.52 | 0.90 | 1.12 | 1.24 | 1.32 | 1.41 | 1.45 | 1.49 |

根据层次分析法的计算思路可知,需要对各级指标的权重做进一步的验证,即一致性比例 $C_R$ 是否小于 0.1. 各级判断矩阵的最大特征根及一致性比例如表 5 所示. 其中,数学问题提出能力判断矩阵的最大特征根为 3.001 6,一致性比例 $C_R$ 为 0.001 6,远小于0.1,能通过一致性检验. 各级指标的数据结果表明本文各个判断矩阵的指标权重是合理的、有效的.

表 5　各级指标的一致性比率汇总表

| 指标 | 最大特征根 $\lambda_{\max}$ | 一致性比例 $C_R$ |
|---|---|---|
| 数学问题提出能力 | 3.001 6 | 0.001 6 |
| 问题的本质特征 | 3.002 1 | 0.002 1 |
| 问题的数学特征 | 5.042 0 | 0.009 4 |
| 问题的语言特征 | 3.000 6 | 0.000 5 |

## 4　讨论与结论

### 4.1　所提测评模型的合理性

本文借鉴已有测评框架和评分规则[9,12,18],从“问题”本质特征出发提出假设模型:(i) 评价学生理解“数学问题”本身的能力是否理解到位,即所提数学问题是否包含“问题”的 3 个成分;(ii) 从数学的特征出发,评估学生对于数学信息的分析、整合以及概括应用能力是否到位,即提出数学问题的质量和复杂性;(iii) 从问题的语言表征出发评价学生的数学问题表述能力.

已有测评框架和测量指标[9,18]尽管研究视角和侧重点不同,但几乎未体现“问题”该有的本质特征. “问题”是数学问题提出能力的核心,只有从问题本质的特征出发,才能更好地体现学生数学问题提出能力的表现. 验证性因素分析结果表明了假设模型的成立,且该测评模型具有较好的信效度. 通过理论结合实际,本文从“问题”特征及已有研究中综述出数学问题提出能力的各级指标,通过调查专家对指标的认同度以及模型的验证结果均表明本文所构建测评模型是合理的、有意义的.

### 4.2　指标赋权的合理性

已有的关于问题提出能力的测评框架或测评指标关于赋分以及权重设置的研究是人为主观判断[12],并未对其进行科学系统地赋权. 基于多名专家对各级指标权重判定的内部关系,本文采用层次分析法对数学问题提出能力的测评指标进行赋权,并检验权重判断一致性.

层次分析法是一种将非定量问题的定性分析转为定性和定量相结合的系统分析,将复杂的问题数学化、简单化[33]. 通过文献综述、一线数学教师对测评指标的认可调查等提出测评模型并对模型进行信效度验证. 赋权结果也表明该模型的适宜性,问题的本质特征对于评价学生的数学问题提出能力有 55% 的贡献. 从问题本质的特征出发,多角度多层面对问题进行评价. 对数学问题提出能力的表现进行测评,学生如果理解什么是“数学问题”、问题的本质特征是什么,那么就能够提出基本的数学问题. 但在此基础上,要提出更深更难更复杂的数学问题则要从问题的数学特征和语言特征入手. 因此,无论是从理论还是从指标权重来说,本文提出的模型是合理的,是符合理论逻辑的.

### 4.3　测评模型的应用及意义

由图 1 及表 3 可知,从问题的本质特征出发,从测评指标层层推进,最终得出了可操作的测评工具. 其中,1 级指标与各 2 级指标相乘的结果为总权重系数,总权重系数的和为 1,根据 2 级指标与总权重系数便能够直接量化学生的数学问题提出能力. 此外,根据学生在各个 2 级指标上的得分乘以各自的权重系数,将 2 级指标乘以权重后的分数相加后乘以对应的 1 级指标权重,即可得到 1 级指标的量化分数.

本文所提出的测评模型是从 3 个层面来评价学生所提问题的合理性、复杂性等,由此间接地反映学生的数学问题提出能力. 给学生一个具体的问题情境,要求学生据此提出数学问题. 通过使用本研究的测评工具评价问题的质量,根据指标赋权的结果对学生各级指标进行赋分,量化学生的数学问题提出能力. 问题本质特征的比例较大,这也说明了学生提出的首先要是一个问题,至于问题的复杂程度和难度等则通过问题的数学及语言特征来体现. 由此可见,采用本文的测评模型、测评维度及权重对学生的数学问题提出能力进行评价是合理可行的.

已有研究未利用具体测量指标直接量化问题提出能力,未从问题的本质特征出发且不易操作[9-10]. 本文从问题的本质特征出发,依据测评指标及指标

权重提出了一个直接可量化简单易行的数学问题提出能力的测评工具,具有较强灵活性和可操作性.数学问题提出能力得到了量化,教师能够更好地根据学生所提数学问题的水平来设计、指导课堂教学,使教学、评价、标准一致化成为可能,从而使学生的数学创新意识和能力得到进一步发展.

## 5 参考文献


[1] 阿尔伯特·爱因斯坦,利奥波德·英费尔德.物理学的进化[M].上海:上海科学技术出版社,1962:65-67.

[2] National Council of Teachers of Mathematics. Urriculum and evaluation standards for school mathematics[M]. Reston,VA:NCTM,1989:22-28.

[3] National Council of Teachers of Mathematics. Professional standards for teaching mathematics[M]. Reston,VA: NCTM,1991:90-100.

[4] National Council of Teachers of Mathematics. Principles and standards for school mathematics[M]. Reston,VA: NCTM,2000:20-30.

[5] Niss M. Mathematical competencies and the learning of mathematics:the Danish KOM project[R]. Third Mediterranean Conference on Mathematics Education,2003: 115-124.

[6] 中华人民共和国教育部.义务教育数学课程标准:2011年版[M].北京:北京师范大学出版社,2012:4-7,9.

[7] 谢先成.基于核心素养的《普通高中数学课程标准(2017年版)》解读:访数学课程标准修订组组长、东北师范大学原校长史宁中教授[J].教师教育论坛,2018,31(6):6-9.

[8] Singer F M,F Ellerton N,Cai Jinfa. Problem-posing research in mathematics education:some answered and unanswered questions[M]. New York:Springer,2015:4-8.

[9] Silver Edward A,Cai Jinfa. An analysis of arithmetic problem posing by middle school[J]. Journal for Research in Mathematics Education,1996,27(5):521-539.

[10] Amalina I K,Amirudin M,Budiarto M T. Students´ creativity:problem posing in structured situation[J]. Journal of Physics Conference,2018,947(1):12012.

[11] Gonzales N A. Problem formulation:insights from student generated questions[J]. School Science and Mathematics,1996,96(3):152-157.

[12] 夏小刚,汪秉彝,吕传汉.中小学生提出数学问题能力的评价再探[J].数学教育学报,2008,17(2):8-11.

[13] 彭聃龄.普通心理学[M].4版.北京:北京师范大学出版社,2012:302.

[14] Newell A,Shaw J C. Human problem solving[M]. New Jersey:Prenlice Hall,1972:39-146.

[15] 朱黎生.《义务教育数学课程标准(2011年版)》修订了什么[J].数学教育学报,2012,21(3):7-10.

[16] Ellerton N F. Children´s made-up mathematics problems:a new perspective on talented Mathematicians[J]. Educational Studies in Mathematics,1986,17(3):261-271.

[17] Silverman F L,Strohauer W D. Student-generated story problems[J]. The Arithmetic Teacher,1992,39(8):6-12.

[18] Osman C,zder Hasan. Generalizability theory research on developing a scoring rubric to assess primary school students´ problem posing skills[J]. Eurasia Journal of Mathematics,Science and Technology Education,2017,13(6):2423-2439.

[19] Jonassen D H. Instructional design models for well-structured and III-structured problem-solving learning outcomes[J]. Educational Technology Research and Development,1997,45(1):65-94.

[20] 路海东,董妍,王晓平.小学生数学应用题解决的认知机制研究[J].心理科学,2004,27(4):867-870.

[21] An empirical taxonomy of problem posing processes[J]. ZDM,2005,37(3):149-158.

[22] Silver E A. On mathematical problem posing[J]. For the Learning of Mathematics,1994,14(1):19-28.

[23] English L D. Children´s problem posing within formal and informal contexts[J]. Journal Research in Mathematics Education,1998,29(1):83-106.

[24] Mayer R E. Cognitive,metacognitive,and motivational aspects of problem solving[J]. Instructional Science,1998,26(1/2):49-63.

[25] 袁维新,吴庆麟.问题解决:涵义、过程与教学模式[J].心理科学,2010(1):153-156.

[26] 宋广文,何文广,孔伟.问题表征、工作记忆对小学生数学问题解决的影响[J].心理学报,2011,43(11):1283-1292.

[27] 连榕.认知心理学[M].北京:高等教育出版社,2010:160-164.

[28] 呙亚慧.小学数学题中三类隐含数量关系提取[D].武汉:华中师范大学,2017.

[29] 郑毓信.问题解决与数学教育[M].南京:江苏教育出版社,1994:46-47.

[30] Hastie R. Problems for judgment and decision making[J]. Annual Review of Psychology,2001,52(1):653-683.

[31] 吴明隆.结构方程模型:AMOS的操作与应用[M].重庆:重庆大学出版社,2010:224.

[32] 荣泰生.AMOS与研究法方法[M].重庆:重庆大学出版社,2010:81-84.

[33] 张柄江.层次分析法及其应用[M].北京:电子王业出化社,2014.

# The Evaluation Model and Index Weighting of Ability to Propose Mathematical Problems

HONG Qingyu[1], KANG Chunhua[1,2*], ZENG Pingfei[1], YU Xiangjun[1]

(1. College of Teacher Education, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang 321004, China; 2. Key Laboratory of Intelligent Education Technology and Application of Zhejiang Province, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang 321004, China)

**Abstract:** The measurement and evaluation of the ability to propose mathematical problems has become a hot topic in mathematical teaching research, among which the rationality and scientificity of the evaluation model and index weight have become the primary concern of researchers. On the basis of sorting out the definition of mathematical problems, the existing evaluation contents and methods, the evaluation model proposed by mathematical problems is constructed from the three dimensions of the essential characteristics of the problems, the mathematical characteristics of the problems and the linguistic characteristics of the problems, and two levels of weights are assigned to the indexes in the model. The results show that the indicators of confirmatory factor analysis are good, the evaluation model has good structural validity, and the internal reliability of each dimension is high. The consistency index $C_I$ and the consistency ratio $C_R$ calculated based on the maximum characteristic root show that the expert weighting based on the matrix discriminant table has a high consistency, and the weighting is reasonable and scientific. The determination of evaluation model and index weight provides a scientific and reasonable way of thinking on how to measure and evaluate students´ ability to propose problems.

**Key words:** ability to propose mathematical problems; evaluation indicators; evaluation tools; weighting

(责任编辑:冉小晓)

(上接第 37 页)

# The Study on Test of Unfolding Data´s Unidimensionality Based on the Principal Factor Analysis

DENG Yuanping[1], DAI Haiqi[2], LANG Yongming[3]

(1. Teachers College, Jimei University, Xiamen Fujian 361021, China; 2. College of Psychology, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi 330022, China; 3. Network Information Center, Jinggangshan University, Jian Jiangxi 343009, China)

**Abstract:** The six different types of unfolding data are simulated based on the generalized graded unfolding model (GGUM) and the results of factor analysis (FA) based on using component analysis are investigated. The results show that ratio of the first eigenvalue to the second eigenvalue is less than 3 when items´ locative parameters distribute uniformly and the hemogeneity of sample is strong, the ratio is more than 3 in other cases. When the heterogeneity of sample is strong, the number of factors whose eigenvalues are more than 1 is 3, the number is 2 in other cases. When items´ locative parameters distribute in both ends, the shape of items´ loading in two factors is a parenthese. In another case, the shape is a horseshoe. The result shows that the current testing standards about unidimensionality of unfolding data by the factor analysis (FA) are not comprehensive, the results of FA, including eigenvalue ratio of the first two factors and item loding´s figure, shall be related with item´s locative parameter and the hemogeneity of subjects.

**Key words:** principal factor analysis; unfolding response mechanism; generalized graded unfolding model; unidimensionality

(责任编辑:冉小晓)