第 45 卷 第 2 期 江西师范大学学报(自然科学版) Vol. 45 No. 2
2021 年 3 月 Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science) Mar. 2021

文章编号:1000-5862(2021)02-0204-07

闭正则模糊拟阵单点收缩子拟阵的基有序性质

李尧龙

(渭南师范学院数理学院,陕西 渭南 714000)

摘要:该文研究了模糊拟阵的单点收缩子拟阵的基有序性质;在闭正则模糊拟阵的单点延拓的基有序基础上,研究了闭正则模糊拟阵单点收缩子拟阵的基有序的若干性质,得到了闭正则模糊拟阵的单点收缩子拟阵的基有序性质是保持的,并举例说明了闭正则模糊拟阵的单点收缩子拟阵的基有序性质.

关键词:模糊拟阵;闭正则模糊拟阵;子拟阵;单点收缩;基有序

中图分类号:O 157.1 文献标志码:A DOI:10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2021.02.15

0 引言

拟阵理论是在推广图与矩阵时提出的一种新理论,主要研究在有限集合上的抽象相关关系.由于拟阵理论有很强的应用背景,所以拟阵理论自产生后已经被广泛应用到组合优化、几何学、网络流、电网络等许多应用领域[1-9]中.由于信息科学、组合优化理论的快速发展,拟阵理论的研究也拓展到偏序集拟阵、无限拟阵、三支拟阵等领域[10-18]中.近几十年来,由于组合优化理论的广泛应用,拟阵理论与其他学科的交叉研究也取得了丰硕的成果.拟阵理论为图论、代数理论以及优化算法等许多数学领域提供了非常有用的研究方法.

确定一个集合上的拟阵有很多方法,一个集合上的拟阵可以由独立集、基、极小圈、闭包算子、秩函数等概念去定义,这使得拟阵理论能够广泛应用到实际问题中.拟阵一个最为基本的优化性质是每个极大独立集都是一个最大独立集,这通常表示为拟阵的贪心(greedy)算法.许多拟阵的最优化问题都是从这个基本性质出发而得到发展或推广的,如在实际应用中的最大权独立集问题、带权拟阵最大公共独立集问题、最大网络流问题等.

拟阵理论在组合优化中有很重要的应用.设 E 是一个非空有限集合,$\mathscr{S}$为 E 上某拟阵的独立集族.令 $\omega: E\to\mathbf{R}^+$ 是一个权函数,扩张其为 $\omega: 2^E\to\mathbf{R}^+$ 使得 $\forall A\in 2^E,\omega(A)=\sum\limits_{e\in A}\omega(e)$.需要找 $\mathscr{S}$的一个成员 B,使其满足如下优化问题:

$$\max\ \omega(B),\ \text{s.t.}\ B\in\mathscr{S},\tag{1}$$

这个问题的最有效解决方法就是 greedy 算法.然而在实际问题中,权函数 $\omega: E\to\mathbf{R}^+$ 的值有时未必是一个具体的实数,可能它仅仅是一个模糊区间或模糊数,一般拟阵在解决上述权函数的最优化问题时有局限性.

为了解决问题(1),J. R. Goetschel 等[14]在模糊集上引入了一种模糊拟阵(简称 G-V 模糊拟阵),开始了 G-V 模糊拟阵的系统研究.之后,他们还给出了 G-V 模糊拟阵的基、极小圈、闭包算子、秩函数、积与和等结构,并研究了 G-V 模糊拟阵的 greedy 算法等性质[14-17].当 $\omega: [0,1]^E\to\mathbf{R}^+$ 为权函数时,闭正则 G-V 模糊拟阵可以应用 greedy 算法来寻找一个极大或极小赋权模糊集,可以解决上述权函数对应的最优化问题.由于闭正则 G-V 模糊拟阵可以应用 greedy 算法来寻找一个极值赋权模糊集,这使得 G-V 模糊拟阵有十分广泛的应用前景[18-22].近年来,模糊拟阵得到了快速发展,许多新的拟阵模糊化方法被提出来,如 L-拟阵、M-模糊化拟阵、(L,M)-拟阵、双极模糊拟阵、(L,M)-双极拟阵和模糊广义拟阵等[21-26].

由于一个拟阵可以由基来定义,并且拟阵的许多性质也是由基来刻画的,所以基在拟阵理论的研究中有十分重要的作用,基有序性质在拟阵理论中有很好的应用[1-3].在 G-V 模糊拟阵中得到了基的许多性质,这为研究 G-V 模糊拟阵提供了很好的条件.

收稿日期:2020-05-19

基金项目:国家自然科学基金(11201112)和渭南师范学院科研课题(17YKF01)资助项目.

作者简介:李尧龙(1970—),男,陕西渭南人,教授,主要从事模糊拟阵理论的研究.E-mail:liyaolong188@163.com

本文在文献[9]的基础上,研究闭正则 G-V 模糊拟阵的单点收缩的基有序性质,并举例说明了闭正则 G-V 模糊拟阵单点收缩基有序性质的应用; 给出了闭正则 G-V 模糊拟阵单点收缩的基有序性质,为进一步研究闭正则 G-V 模糊拟阵的结构进行了有效的补充. 为了方便,以下称 G-V 模糊拟阵为模糊拟阵.

1　预备知识

定义 1　设 E 是有限集,I 为 E 的非空子集族,它满足如下条件:

(i) 若 $A \in I$ 且 $B \subseteq A$,则 $B \in I$;

(ii) 若 A、$B \in I$ 且 $|A| < |B|$ ($|A|$ 表示 A 的势),则有 $C \in I$ 使得 $A \subset C \subseteq A \cup B$,

称偶对 $M = (E, I)$ 为 E 上的一个拟阵,I 中的元素为 M 的独立集,M 的极大独立集为 M 的基,M 的所有基的集合记为 $\beta(M)$.

设 E 是有限集,$\mu: E \to [0,1]$ 是一映射,称 μ 为 E 上的一个模糊集. 用 $F(E)$ 表示 E 上的所有模糊集组成的集族. $\forall \mu$、$v \in F(E)$,记 $\mathrm{supp}\,\mu = \{x \in E \mid \mu(x) > 0\}$,$m(\mu) = \inf\{\mu(x) \mid x \in \mathrm{supp}\,\mu\}$,$C_r(\mu) = \{x \in E \mid \mu(x) \geqslant r\}$ ($r \in (0,1]$);E 上一个尖 S_e^λ 是一个支撑集为 $\{e\}$、高度为 λ 的模糊集.

定义 2　设 E 是有限集,$\mathscr{S} \subseteq F(E)$ 为 E 上的非空模糊子集族,它满足如下条件:

(i) $\forall \mu \in \mathscr{S}$,$v \in F(E)$,若 $v < \mu$,则 $v \in \mathscr{S}$;

(ii) $\forall \mu$、$v \in \mathscr{S}$,若 $|\mathrm{supp}\,\mu| < |\mathrm{supp}\,v|$,则 $\exists \eta \in \mathscr{S}$ 使得 $\mu < \eta \leqslant \mu \vee v$ 且 $m(\eta) \geqslant \min\{m(\mu), m(v)\}$,

称偶对 $M = (E, \mathscr{S})$ 为 E 上的一个模糊拟阵,$\mathscr{S}$ 中的元素为 M 的模糊独立集,M 的极大模糊独立集为 M 的模糊基,M 的所有模糊基的集合记为 $\beta(M)$.

引理 1[14-17]　设 $M = (E, \mathscr{S})$ 是一个模糊拟阵,则存在有限序列 $0 = r_0 < r_1 < \cdots < r_n \leqslant 1$ 使得:

(i) 当 $0 < s \leqslant r_n$ 时,$I_s \neq \varnothing$,当 $s > r_n$ 时,$I_s = \varnothing$;

(ii) $\forall s$、$t \in (r_{i-1}, r_i]$,有 $I_s = I_t$ ($i = 1,2,\cdots,n$);

(iii) 若 $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1$,则 $I_t \subseteq I_s$;

(iv) 若 $r_{i-1} < s < r_i < t < r_{i+1}$ ($i = 1,2,\cdots,n-1$),则 $I_t \subset I_s$,

称 $0 = r_0 < r_1 < \cdots < r_n \leqslant 1$ 为 $M = (E, \mathscr{S})$ 的基本列. 若 $\forall i \in \{1,2,\cdots,n\}$,有 $I_r = I_{r_i}$,则称 M 为闭模糊拟阵. 若 $\forall s$、$t \in (0,1]$,$r < s$,并且对于 $M_r = (E, I_r)$ 的任何基 A,都有 $M_s = (E, I_s)$ 的基 B,使得 $B \subseteq A$,则称 $M = (E, \mathscr{S})$ 为正则模糊拟阵.

本文沿用文献[1,14-20]的术语和记号,未加说明或定义的概念,请参见文献[1,14-20].

2　拟阵单点收缩的基有序性质

拟阵的基有序性质是拟阵理论的一个重要性质,可以揭示拟阵基的内部构造,拟阵的许多重要性质都是由基刻画的. 在文献[3]中,关于拟阵的延拓与基有序性质,有如下结论成立.

引理 2[3]　设 $M = (E, I)$ 是一个拟阵,若 $x \in E$,$y \notin E$,β 为 M 的基集,令

$\beta' = \{B \cup y \mid B \in \beta\} \cup \{B \cup x \mid B \in \beta, x \notin B\}$,

则 β' 是关于 $E \cup y$ 上一个拟阵的基集. 称这个拟阵是拟阵 M 在 x 用 y 的一个系列延拓,记为 $S_M(x, y)$. 容易证明,拟阵的系列延拓是基有序的.

引理 3[3]　设 $M = (E, I)$ 是一个基有序拟阵,若 $x, y \in E$ 使得 $M = S_{M_1}(x, y)$,其中 M_1 是关于 $E \backslash y$ 的一个拟阵,则 M_1 是基有序的. 称 M_1 是 M 的一个单点收缩.

文献[3]没有给出引理 3 的证明,为了和下述定理 1 进行比对,本文给出引理 3 的证明.

证　设 $x, y \in E$ 使得 $M = S_{M_1}(x, y)$,其中 M_1 是关于 $E \backslash y$ 的一个拟阵,设 β 为 M_1 的基集,则 (E, I) 的基集 $\beta' = \{B \cup y \mid B \in \beta\} \cup \{B \cup x \mid B \in \beta, x \notin B\}$,由于 $M = (E, I)$ 是一个基有序拟阵,存在一个双射 $\pi: B_1' \to B_2'$ (其中 $B_1', B_2' \in \beta'$) 使得 $(B_1' \backslash e) \cup \pi(e) \in \beta'$,$(B_2' \backslash \pi(e)) \cup e \in \beta'$. 下面分 3 种情况讨论:

1) 若 B_1'、$B_2' \in \{B \cup y \mid B \in \beta\}$,存在交换序 $\pi: B_1 \cup y \to B_2 \cup y$ 使得 $((B_1 \cup y) \backslash e) \cup \pi(e) = ((B_1 \backslash e) \cup \pi(e)) \cup y \in \beta'$,$((B_1 \backslash \pi(e)) \cup e) \cup y \in \beta'$,

(i) 若 $e = y$,则 $((B_1 \cup y) \backslash e) \cup \pi(e) = B_1 \cup \pi(e)$,由于 $B_1 \cup \pi(e) \in \beta'$,由 β' 的定义知,$\pi(e) = y$.

(ii) 若 $e \neq y$,则有 $((B_1 \cup y) \backslash \pi(e)) \cup e = B_1 \cup e \in \beta'$. 矛盾! 这样 $\pi(e) \neq y$.

由于 $\pi: B_1 \cup y \to B_2 \cup y$ 为交换序,由以上分析易知,交换序 $\pi: B_1 \cup y \to B_2 \cup y$ 为

$$\pi(e) = \begin{cases} \pi(e), & e \in B_1, \\ y, & e = y. \end{cases}$$

令$\pi|_{E\backslash y}: B_1 \to B_2$为$\pi(e)|_{E\backslash y} = \pi(e)$,$e \in B_1$. 这样$\pi|_{E\backslash y}: B_1 \to B_2$为双射且$(B_1\backslash e) \cup \pi(e) \in \beta$,$(B_2\backslash\pi(e)) \cup e \in \beta$,即$\pi|_{E\backslash y}: B_1 \to B_2$为交换序.

2) 若B_1'、$B_2' \in \{B \cup x \mid B \in \beta, x \notin B\}$,则存在交换序$\pi: B_1 \cup x \to B_2 \cup x$使得$((B_1 \cup x)\backslash e) \cup \pi(e) = ((B_1\backslash e) \cup \pi(e)) \cup x \in \beta'$,$((B_2\backslash\pi(e)) \cup e) \cup x \in \beta'$.

(i) 若$e = x$,则$((B_1 \cup x)\backslash e) \cup \pi(e) = B_1 \cup \pi(e)$,由于$B_1 \cup \pi(e) \in \beta'$,由$\beta'$的定义知$\pi(e) = x$.

(ii) 若$e \neq x$,则$((B_1 \cup x)\backslash e) \cup \pi(e) = ((B_1\backslash e) \cup \pi(e)) \cup x$. 由于$((B_1\backslash e) \cup \pi(e)) \cup x \in \beta'$,由$\beta'$的定义知$((B_1\backslash e) \cup \pi(e)) \in \beta$,这样$\pi(e) \neq x$.

由于$\pi: B_1 \cup x \to B_2 \cup x$为交换序,由以上分析可知交换序$\pi: B_1 \cup x \to B_2 \cup x$为

$$\pi(e) = \begin{cases} \pi(e), & e \in B_1, \\ x, & e = x. \end{cases}$$

令$\pi|_{E\backslash y}: B_1 \to B_2$为$\pi(e)|_{E\backslash y} = \pi(e)$,$e \in B_1$,这样$\pi|_{E\backslash y}: B_1 \to B_2$为双射且$(B_1\backslash e) \cup \pi(e) \in \beta$,$(B_2\backslash\pi(e)) \cup e \in \beta$,即$\pi|_{E\backslash y}: B_1 \to B_2$为交换序.

3) 若$B_1' \in \{B \cup y \mid B \in \beta\}$,$B_2' \in \{B \cup x \mid B \in \beta, x \notin B\}$,则存在交换序$\pi: B_1 \cup y \to B_2 \cup x$使得$((B_1 \cup y)\backslash e) \cup \pi(e) = ((B_1\backslash e) \cup \pi(e)) \cup y \in \beta'$,$((B_2\backslash\pi(e)) \cup e) \cup x \in \beta'$.

(i) 若$e = y$,则$((B_1 \cup y)\backslash e) \cup \pi(e) = B_1 \cup \pi(e)$,由于$B_1 \cup \pi(e) \in \beta'$,由$\beta'$的定义知$\pi(e) = x$.

(ii) 若$e \neq y$,则$((B_1 \cup x)\backslash\pi(e)) \cup e = ((B_1\backslash\pi(e)) \cup e) \cup x$. 若$\pi(e) = x$,由于$((B_1\backslash e) \cup \pi(e)) \cup y \in \beta'$,则$((B_1 \cup x)\backslash\pi(e)) \cup e = B_1 \cup e \notin \beta'$. 矛盾! 这样$\pi(e) \neq x$.

由于$\pi: B_1 \cup y \to B_2 \cup x$为交换序,由以上分析知,交换序$\pi: B_1 \cup y \to B_2 \cup x$为

$$\pi(e) = \begin{cases} \pi(e), & e \in B_1, \\ x, & e = y. \end{cases}$$

令$\pi|_{E\backslash y}: B_1 \to B_2$为$\pi(e)|_{E\backslash y} = \pi(e)$,$e \in B_1$,这样$\pi|_{E\backslash y}: B_1 \to B_2$为双射且$(B_1\backslash e) \cup \pi(e) \in \beta$,$(B_2\backslash\pi(e)) \cup e \in \beta$,即$\pi|_{E\backslash y}: B_1 \to B_2$为交换序.

由上述3种情况讨论知M_1是基有序的.

3 闭正则模糊拟阵 I-型单点收缩的基有序性质

在模糊拟阵中,闭正则拟阵是一类很重要的拟阵,研究表明闭正则拟阵可以由基来定义[18],闭正则拟阵也存在单点收缩的基有序性质. 文献[19]给出了闭正则模糊拟阵的基有序定义.

定义3[19] 设$M = (E, \mathscr{I})$是闭正则模糊拟阵,$S_x^{r_1}$为$(E, \mathscr{I})$的尖,若对$(E, \mathscr{I})$的任意2个基μ_1、μ_2都存在一个双射Zadeh型函数$\pi: \mu_1 \to \mu_2$,使得$\forall e \in \operatorname{supp}\mu_1$,有$(\mu_1 \backslash\backslash e) \vee S_{\pi(e)}^{r_1} \in \beta$和$(\mu_2 \backslash\backslash \pi(e)) \vee S_e^{r_1} \in \beta$,则称$M$是基有序的.

引理4[19] 设$M = (E, \mathscr{I})$是一闭正则模糊拟阵,$0 = r_0 < r_1 < \cdots < r_m \leqslant 1$为$M = (E, \mathscr{I})$的基本列,$x \in E$,$y \notin E$,$S_x^{r_1}$、$S_y^{r_1}$为2个尖. β是$M = (E, \mathscr{I})$的基集. 令

$$\beta' = \{\mu \vee S_y^{r_1} \mid \mu \in \beta\} \cup \{\mu \vee S_x^{r_1} \mid \mu \in \beta, x \notin \operatorname{supp}\mu\},$$

则β'是关于$E' = E \cup y$上的一个闭正则模糊拟阵$(E', \mathscr{I}')$的基集. 称$(E', \mathscr{I}')$为$(E, \mathscr{I})$的I-型单点延拓. 称$(E, \mathscr{I})$为$(E', \mathscr{I}')$的I-型单点收缩.

引理5[19] 设$M = (E, \mathscr{I})$是一闭正则模糊拟阵,β是$M = (E, \mathscr{I})$的基集,$(E', \mathscr{I}')$为$(E, \mathscr{I})$的I-型单点延拓,若$(E, \mathscr{I})$是基有序的,则$(E', \mathscr{I}')$也是基有序的.

定理1 设闭正则模糊拟阵$(E, \mathscr{I})$是闭正则模糊拟阵$(E', \mathscr{I}')$的I-型单点收缩,β和β'分别是$(E, \mathscr{I})$与$(E', \mathscr{I}')$的基集,若$(E', \mathscr{I}')$也是基有序的,则$(E, \mathscr{I})$是基有序的.

证 由于$(E, \mathscr{I})$是闭正则模糊拟阵,由引理4知,$(E', \mathscr{I}')$是闭正则模糊拟阵. 又$(E', \mathscr{I}')$是基有序的,则存在一个交换序$\pi': \mu_1' \to \mu_2'$(其中μ_1'、$\mu_2' \in \beta'$),使得$\forall e \in \operatorname{supp}\mu_1'$,有$(\mu_1' \backslash\backslash e) \vee S_{\pi'(e)}^{r_1} \in \beta'$,$(\mu_2' \backslash\backslash \pi'(e)) \vee S_e^{r_1} \in \beta'$.

考虑$\beta' = \{\mu \vee S_y^{r_1} \mid \mu \in \beta\} \cup \{\mu \vee S_x^{r_1} \mid \mu \in \beta, x \notin \operatorname{supp}\mu\}$,下面分3种情况讨论:

1) 若μ_1'、$\mu_2' \in \{\mu \vee S_y^{r_1} \mid \mu \in \beta\}$,则存在交换序$\pi': \mu_1' \to \mu_2'$使得$(\mu_1' \backslash\backslash e) \vee S_{\pi'(e)}^{r_1} \in \beta'$,$(\mu_2' \backslash\backslash \pi'(e)) \vee$

$S_e^{r_1} \in \beta'$.

(i) 若 $S_e^{r_1} = S_y^{r_1}$,则$(\mu_1'\backslash\backslash e) \vee S_{\pi'(e)}^{r_1} = ((\mu_1 \vee S_y^{r_1})\backslash\backslash e) \vee S_{\pi'(e)}^{r_1} = \mu_1 \vee S_{\pi'(e)}^{r_1} \in \beta'$,由$\beta'$的定义知 $S_{\pi'(e)}^{r_1} = S_y^{r_1}$.

(ii) 若$S_e^{r_1} \neq S_y^{r_1}$,假设$S_{\pi'(e)}^{r_1} = S_y^{r_1}$,则$(\mu_2'\backslash\backslash\pi'(e)) \vee S_e^{r_1} = ((\mu_2 \vee S_y^{r_1})\backslash\backslash\pi'(e)) \vee S_e^{r_1} = \mu_2 \vee S_e^{r_1} \notin \beta'$. 矛盾! 故$S_{\pi'(e)}^{r_1} \neq S_y^{r_1}$. 由于$\pi':\mu_1'\to\mu_2'$为交换序,则易知 $\pi':\mu_1'\to\mu_2'$为

$$\pi'(t) = \begin{cases} \pi'(t), t \in \operatorname{supp}\mu_1, \\ S_y^{r_1}, \quad t = y. \end{cases}$$

令$\pi:\mu_1\to\mu_2$为$\pi(x) = \pi'(x)$(其中μ_1、$\mu_2 \in \beta$,$x \in \operatorname{supp}\mu_1$),由$\beta'$的定义知$(\mu_1\backslash\backslash e) \vee S_{\pi(e)}^{r_1} \in \beta$,$(\mu_2\backslash\backslash\pi(e)) \vee S_e^{r_1} \in \beta$. 则 $\pi:\mu_1\to\mu_2$ 为交换序.

2) 若μ_1'、$\mu_2' \in \{\mu \vee S_x^{r_1} \mid \mu \in \beta$ 且 $x \notin \operatorname{supp}\mu\}$,则存在交换序$\pi':\mu_1'\to\mu_2'$使得$(\mu_1'\backslash\backslash e) \vee S_{\pi'(e)}^{r_1} \in \beta'$,$(\mu_2'\backslash\backslash\pi'(e)) \vee S_e^{r_1} \in \beta'$. 由于$\mu \vee S_x^{r_1} \in \beta'$($\mu \in \beta$ 且 $x \notin \operatorname{supp}\mu$),且$(E',\mathscr{S}')$为闭正则模糊拟阵,所以若$\mu_1'$、$\mu_2' \in \{\mu \vee S_y^{r_1} \mid \mu \in \beta\}$,则有交换序 $\pi':\mu_1'\to\mu_2'$使得$(\mu_1'\backslash\backslash e) \vee S_{\pi'(e)}^{r_1} \in \beta'$,$(\mu_2'\backslash\backslash\pi'(e)) \vee S_e^{r_1} \in \beta'$.

(i) 若 $S_e^{r_1} = S_x^{r_1}$,则$(\mu_1'\backslash\backslash e) \vee S_{\pi'(e)}^{r_1} = ((\mu_1 \vee S_x^{r_1})\backslash\backslash e) \vee S_{\pi'(e)}^{r_1} = \mu_1 \vee S_{\pi'(e)}^{r_1} \in \beta'$,由$\beta'$的定义知 $S_{\pi'(e)}^{r_1} = S_x^{r_1}$;

(ii) 若$S_e^{r_1} \neq S_x^{r_1}$,假设$S_{\pi'(e)}^{r_1} = S_x^{r_1}$,则$(\mu_2'\backslash\backslash\pi'(e)) \vee S_e^{r_1} = ((\mu_2 \vee S_x^{r_1})\backslash\backslash\pi'(e)) \vee S_e^{r_1} = \mu_2 \vee S_e^{r_1} \notin \beta'$,其中$\mu_2 \in \beta$. 矛盾! 故$S_{\pi'(e)}^{r_1} \neq S_x^{r_1}$. 由于$\pi':\mu_1'\to\mu_2'$为交换序,则易知 $\pi':\mu_1'\to\mu_2'$为

$$\pi'(t) = \begin{cases} \pi'(t), t \in \operatorname{supp}\mu_1, \\ S_x^{r_1}, \quad t = x. \end{cases}$$

令$\pi:\mu_1\to\mu_2$为$\pi(x) = \pi'(x)$(其中μ_1、$\mu_2 \in \beta$,$x \in \operatorname{supp}\mu_1$),由$\beta'$的定义知$(\mu_1\backslash\backslash e) \vee S_{\pi(e)}^{r_1} \in \beta$,$(\mu_2\backslash\backslash\pi(e)) \vee S_e^{r_1} \in \beta$. 则 $\pi:\mu_1\to\mu_2$ 为交换序.

3) 若$\mu_1' \in \{\mu \vee S_y^{r_1} \mid \mu \in \beta\}$,$\mu_2' \in \{\mu \vee S_x^{r_1} \mid \mu \in \beta, x \notin \operatorname{supp}\mu\}$,则

(i) 当 $x \in \operatorname{supp}\mu_1$ 时,由假设知,有交换序 $\pi':\mu_1'\to\mu_2'$.

(a) 若 $e = y$,则$((\mu_1\backslash\backslash y) \vee S_y^{r_1}) \vee S_y^{r_1} \in \beta'$,$((\mu_2\backslash\backslash y) \vee S_x^{r_1}) \vee S_x^{r_1} \in \beta'$.

若 $S_e^{r_1} = S_y^{r_1}$,则$(\mu_1'\backslash\backslash e) \vee S_{\pi'(e)}^{r_1} = ((\mu_1 \vee S_x^{r_1})\backslash\backslash e) \vee S_{\pi'(e)}^{r_1} = \mu_1 \vee S_{\pi'(e)}^{r_1} \in \beta'$,其中$\mu_1 \in \beta$. 由$\beta'$的定义知 $S_{\pi'(e)}^{r_1} = S_x^{r_1}$.

若 $S_e^{r_1} \neq S_y^{r_1}$,假设 $S_{\pi'(e)}^{r_1} = S_x^{r_1}$,则$(\mu_2'\backslash\backslash\pi'(e)) \vee S_e^{r_1} = ((\mu_2 \vee S_x^{r_1})\backslash\backslash\pi'(e)) \vee S_e^{r_1} = \mu_2 \vee S_e^{r_1} \notin \beta'$,其中$\mu_2 \in \beta$. 矛盾! 故$S_{\pi'(e)}^{r_1} \neq S_x^{r_1}$. 由于$\pi':\mu_1'\to\mu_2'$为交换序,则易知 $\pi':\mu_1'\to\mu_2'$为

$$\pi'(t) = \begin{cases} \pi'(t), t \in \operatorname{supp}\mu_1, \\ S_x^{r_1}, \quad t = y. \end{cases}$$

令$\pi:\mu_1\to\mu_2$为$\pi(x) = \pi'(x)$(其中μ_1、$\mu_2 \in \beta$,$x \in \operatorname{supp}\mu_1$),由$\beta'$的定义知$(\mu_1'\backslash\backslash e) \vee S_{\pi(e)}^{r_1} \in \beta$,$(\mu_2\backslash\backslash\pi(e)) \vee S_e^{r_1} \in \beta$. 则 $\pi:\mu_1\to\mu_2$ 为交换序.

(b) 若 $e \in \operatorname{supp}\mu_1$,由于$(E',\mathscr{S}')$为闭正则模糊拟阵,则由$\beta'$的定义知,$\pi':\mu_1'\to\mu_2'$为交换序. 有$(\mu_1\backslash\backslash e) \vee S_{\pi'(e)}^{r_1} \vee S_y^{r_1} \in \beta'$,$(\mu_2\backslash\backslash\pi'(e)) \vee S_e^{r_1} \vee S_x^{r_1} \in \beta'$. 令 $\pi:\mu_1\to\mu_2$ 为 $\pi(x) = \pi'(x)$(其中μ_1、$\mu_2 \in \beta$,$x \in \operatorname{supp}\mu_1$),与(a)类似可证 $\pi(t):\mu_1\to\mu_2$(其中 $t \in \operatorname{supp}\mu_1$)为交换序.

(ii) 若 $x \notin \operatorname{supp}\mu_1$,则类似(i)可证结论成立.

综合上述 3 种情况讨论知,$\pi(t):\mu_1\to\mu_2$(其中 $t \in \operatorname{supp}\mu_1$)为交换序.

定理 1 为引理 5 的部分逆定理. 定理 1 说明: 在满足一定条件下引理 5 的逆命题也成立.

注 1　由定理 1 的证明过程可知,其证明思路类似于引理 3 的证明思路. 这是因为在定理 1 中要求模糊拟阵为闭正则模糊拟阵,且闭正则模糊拟阵有许多很好的性质,如基的基数相等、基的交换性质等. 若模糊拟阵不是闭正则模糊拟阵,则该模糊拟阵可能没有基,即使存在基,基的基数也不一定相等.

注 2　在引理4中,称$(E',\mathscr{S}')$为$(E,\mathscr{S})$的I-型单点延拓,然而$(E',\mathscr{S}')$在 $y \notin E$ 处的单点收缩未必为$(E,\mathscr{S})$. 此处仅称$(E,\mathscr{S})$为$(E',\mathscr{S}')$的I-型单点收缩. 故定理 1 仅是在$(E,\mathscr{S})$为$(E',\mathscr{S}')$的I-型单点收缩的情况下的结论,其他情况并未包含.

接下来给出例 1,其中$(E,\mathscr{S})$参见文献[20].

例 1　设 $E = \{a,b,c\}$,$I_{1/2} = \{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{b,c\}\}$,$I_1 = \{\varnothing,\{a\},\{c\}\}$. 易知 $I_1 \subseteq I_{1/2}$. 令

$$I_r = \begin{cases} I_{1/2}, r \in (0,1/2], \\ I_1, \ r \in (1/2,1], \end{cases}$$

以及 $\mathscr{S} = \{\mu \in F(E) \mid C_r(\mu) \in I_r, r \in (0,1]\}$,则$(E,\mathscr{S})$是一个模糊拟阵,由文献[14-15]知$\{\mu,v\}$为$(E,\mathscr{S})$的基集族,且$\mu$,$v$ 分别为

$$\mu(x) = \begin{cases} 1, & x = a, \\ 1/2, & x = b, \\ 0, & x = c. \end{cases} \qquad v(x) = \begin{cases} 0, & x = a, \\ 1/2, & x = b, \\ 1, & x = c. \end{cases}$$

显然$(E,\mathscr{S})$的基本列为$0<1/2<1$. 因为所有基的基数相等,所以$(E,\mathscr{S})$是闭正则模糊拟阵.

设$E'=E\cup\{d\}=\{a,b,c,d\}$,令$\beta'=\{\mu\vee S_d^{1/2}\mid\mu\in\beta\}\cup\{\mu\vee S_x^{1/2}\mid\mu\in\beta,x\notin\operatorname{supp}\mu\}$,则$(E,\mathscr{S}')$的基集为$\beta'$,即

$$(\mu\vee S_d^{1/2})(x)=\begin{cases}1, & x=a,\\ 1/2, & x=b,\\ 0, & x=c,\\ 1/2, & x=d,\end{cases}$$

$$(v\vee S_d^{1/2})(x)=\begin{cases}0, & x=a,\\ 1/2, & x=b,\\ 1, & x=c,\\ 1/2, & x=d,\end{cases}$$

$$(\mu\vee S_c^{1/2})(x)=\begin{cases}1, & x=a,\\ 1/2, & x=b,\\ 1/2, & x=c,\\ 0, & x=d,\end{cases}$$

$$(v\vee S_a^{1/2})(x)=\begin{cases}1/2, & x=a,\\ 1/2, & x=b,\\ 1, & x=c,\\ 0, & x=d.\end{cases}$$

因为β'中所有元素的基数都相等,所以$(E,\mathscr{S}')$是闭正则模糊拟阵,显然$(E,\mathscr{S})$是$(E,\mathscr{S}')$关于d的单点收缩. 取$(E,\mathscr{S}')$的2个基$\mu\vee S_d^{1/2}$与$v\vee S_d^{1/2}$,构造双射函数$\pi':\mu_1'\to\mu_2'$为$\pi'(a)=S_c^1$,$\pi'(b)=S_b^{1/2}$,$\pi'(c)=0$,$\pi'(d)=S_d^{1/2}$. 易证π'为交换序. 这样$(E,\mathscr{S}')$为基有序的闭正则模糊拟阵.

接下来验证$(E,\mathscr{S})$为基有序的. 由于$(E,\mathscr{S})$的基集仅有2个元素,且只能为

$$\mu(x)=\begin{cases}1, & x=a,\\ 1/2, & x=b,\\ 0, & x=c,\end{cases}\quad v(x)=\begin{cases}0, & x=a,\\ 1/2, & x=b,\\ 1, & x=c.\end{cases}$$

在$\pi':\mu_1'\to\mu_2'$(其中$\pi'(a)=S_c^1$,$\pi'(b)=S_b^{1/2}$,$\pi'(c)=0$,$\pi'(d)=S_d^{1/2}$)中,去除$\pi'(d)=S_d^{1/2}$. 则易证$\pi(t):\mu_1\to\mu_2$(其中$t\in\operatorname{supp}\mu_1$)是基有序的.

4 闭正则模糊拟阵 II-型单点收缩的基有序性质

本部分研究闭正则模糊拟阵的另一种单点收缩的基有序性质.

引理6[3] 设$M=(E,I)$是一个拟阵,若$x\in E$,$y\notin E$,β为M的基集,令

$$\beta'=\{(B\backslash x)\cup y\mid B\in\beta,x\in B\}\cup\beta,$$

则β'是关于$E\cup y$上一个拟阵的基集. 称这个拟阵是拟阵M在x用y的一个平行延拓,记为$P_M(x,y)$. 容易证明,拟阵的平行延拓是基有序的.

引理7[20] 设$M=(E,\mathscr{S})$是一闭正则模糊拟阵,$0=r_0<r_1<\cdots<r_m\leqslant1$为$M$的基本列,$x\in E$,$y\notin E$,$S_x^{r_1}$、$S_y^{r_1}$为2个尖. β是$M=(E,\mathscr{S})$的基集. 令

$$\beta'=\{(\mu\backslash\backslash x)\vee S_y^{r_1}\mid\mu\in\beta,x\in\operatorname{supp}\mu\}\cup\beta,$$

则β'是关于$E'=E\cup y$上的一个闭正则模糊拟阵的基集. 称(E',β')为$(E,\mathscr{S})$的II-型单点延拓. 称$(E,\mathscr{S})$为(E',β')的II-型单点收缩.

引理8[19] 设$M=(E,\mathscr{S})$是一闭正则模糊拟阵,β是$M=(E,\mathscr{S})$的基集,$(E,\mathscr{S}')$为$(E,\mathscr{S})$的II-型单点延拓,若$(E,\mathscr{S})$是基有序的,则$(E,\mathscr{S}')$也是基有序的.

定理2 设$(E,\mathscr{S})$是一闭正则模糊拟阵,$(E,\mathscr{S})$为$(E,\mathscr{S}')$的II-型单点收缩,β与β'分别是$(E,\mathscr{S})$与$(E,\mathscr{S}')$的基集. 若$(E,\mathscr{S}')$是基有序的,则$(E,\mathscr{S})$也是基有序的.

证 由于$(E,\mathscr{S})$是一闭正则模糊拟阵,由引理7知,$(E,\mathscr{S}')$是闭正则模糊拟阵. 又因为$(E,\mathscr{S}')$是基有序的,则存在一个交换序$\pi':\mu_1'\to\mu_2'$(其中μ_1'、$\mu_2'\in\beta'$),使得$\forall e\in\operatorname{supp}\mu_1'$,有$(\mu_1'\backslash\backslash e)\vee S_{\pi'(e)}^{r_1}\in\beta'$和$(\mu_2'\backslash\backslash\pi'(e))\vee S_e^{r_1}\in\beta'$.

由于$\beta'=\{(\mu\backslash\backslash x)\vee S_y^{r_1}\mid\mu\in\beta,x\in\operatorname{supp}\mu\}\cup\beta$. 根据$\beta'$的构造,分3种情况进行如下讨论:

1) 若$\mu_1',\mu_2'\in\beta$,此时令$\mu_1=\mu_1'$,$\mu_2=\mu_2'$,由于$(E,\mathscr{S}')$是闭正则模糊拟阵且是基有序的,则存在一个交换序$\pi':\mu_1'\to\mu_2'$,使得$(E,\mathscr{S}')$是基有序的. 由于$\mu_1,\mu_2\in\beta$,取$\pi:\mu_1\to\mu_2$为$\pi(x)=\pi'(x)$(其中$x\in\operatorname{supp}\mu_1$),显然$\pi:\mu_1\to\mu_2$为交换序,使得$\forall e\in\operatorname{supp}\mu_1$,有$(\mu_1\backslash\backslash e)\vee S_{\pi(e)}^{r_1}\in\beta$,$(\mu_2\backslash\backslash\pi(e))\vee S_e^{r_1}\in\beta$,即$(E,\mathscr{S})$是基有序的.

2) $\forall\mu_1$、$\mu_2\in\beta$,若μ_1'、$\mu_2'\in\{(\mu\backslash\backslash x)\vee S_y^{r_1}\mid\mu\in\beta,x\in\operatorname{supp}\mu\}$,则有$\mu_1'=(\mu_1\backslash\backslash x)\vee S_y^{r_1}$,$\mu_2'=(\mu_2\backslash\backslash x)\vee S_y^{r_1}$,$\mu_1'$、$\mu_2'\in\beta$. 由于$(E,\mathscr{S}')$是闭正则模糊拟阵且是基有序的,存在交换序$\pi':\mu_1'\to\mu_2'$为

$$\pi'(t)=\begin{cases}\pi'(t), & t\in\operatorname{supp}\mu_1,\\ S_y^{r_1}, & t=y.\end{cases}$$

令$\pi:\mu_1\to\mu_2$为$\pi(x)=\pi'(x)$(其中$x\in\operatorname{supp}\mu_1$),由于$\beta'$为$(E,\mathscr{S}')$的基集,由$\beta'$的定义知$(\mu_1\backslash\backslash e)\vee S_{\pi(e)}^{r_1}\in\beta$和$(\mu_2\backslash\backslash\pi(e))\vee S_e^{r_1}\in\beta$,即$(E,\mathscr{S})$是基

有序的.

3) 若$\mu_1' \in \{(\mu\backslash\backslash x) \vee S_y^{r_1} \mid \mu \in \beta, x \in \mathrm{supp}\,\mu\}$, $\mu_2' \in \beta$, 取$\mu_1' = (\mu_1\backslash\backslash x) \vee S_y^{r_1}$(其中$\mu_1 \in \beta, x \in \mathrm{supp}\,\mu_1$), $\mu_2' = \mu_2$, 由于$(E, \mathscr{S}')$是闭正则模糊拟阵且是基有序的, 存在交换序$\pi': \mu_1' \to \mu_2'$为

$$\pi'(t) = \begin{cases}\pi'(t), t \in \mathrm{supp}\,\mu, \\ \pi'(x), t = y.\end{cases}$$

令$\pi: \mu_1 \to \mu_2$为$\pi(x) = \pi'(x)$(其中$x \in \mathrm{supp}\,\mu_1$), 由于$\beta'$为$(E, \mathscr{S}')$的基集, 由$\beta'$的定义知$(\mu_1\backslash\backslash e) \vee S_{\pi(e)}^{r_1} \in \beta$和$(\mu_2\backslash\backslash\pi(e)) \vee S_e^{r_1} \in \beta$. 故$\pi: \mu_1 \to \mu_2$为交换序, 即$(E, \mathscr{S})$是基有序的.

定理 2 为引理 8 的部分逆定理. 定理 2 说明: 在满足一定条件下引理 8 的逆命题也成立.

例 2　设$E = \{a, b, c\}$, $(E, \mathscr{S})$如例 1 所示. 令$E' = \{a, b, c, d\}$, $\beta' = \{(\mu\backslash\backslash x) \vee S_d^{1/2} \mid \mu \in \beta, x \in \mathrm{supp}\,\mu\} \cup \beta$, 则$\beta'$的元素为

$$((\mu\backslash c) \vee S_d^{1/2})(x) = \begin{cases}1, & x = a, \\ 0, & x = b, \\ 0, & x = c, \\ 1/2, & x = d,\end{cases}$$

$$((v\backslash b) \vee S_d^{1/2})(x) = \begin{cases}0, & x = a, \\ 0, & x = b, \\ 1, & x = c, \\ 1/2, & x = d,\end{cases}$$

$$\tau(x) = \begin{cases}1, & x = a, \\ 1/2, & x = b, \\ 0, & x = c, \\ 0, & x = d,\end{cases} \quad v(x) = \begin{cases}0, & x = a, \\ 1/2, & x = b, \\ 1, & x = c, \\ 0, & x = d.\end{cases}$$

则$(E, \mathscr{S}')$的基本列为$0 < 1/2 < 1$. 因为所有基的基数相等, 所以$(E, \mathscr{S}')$是闭正则模糊拟阵. 与例 1 类似, $(E, \mathscr{S}')$是基有序的. 对于闭正则模糊拟阵$(E, \mathscr{S})$来说, 由于$(E, \mathscr{S})$的基集仅有 2 个元素, 其基集只能为

$$\mu(x) = \begin{cases}1, & x = a, \\ 1/2, & x = b, \\ 0, & x = c,\end{cases} \quad v(x) = \begin{cases}0, & x = a, \\ 1/2, & x = b, \\ 1, & x = c.\end{cases}$$

容易证明$(E, \mathscr{S})$是基有序的.

5　结论

本文在拟阵收缩的基有序基础上, 研究了闭正则模糊拟阵的单点收缩子拟阵的基有序性质, 此结果为在文献[19]中的闭正则模糊拟阵单点延拓基有序性质在一定条件下的部分逆定理, 并举例说明这种闭正则模糊拟阵的单点收缩子拟阵的基有序性质, 这些结果有助于闭正则模糊拟阵的结构的进一步研究, 并且丰富了模糊拟阵理论的研究内容.

6　参考文献

[1] Oxley J G. Matroid theory [M]. Oxford, New York, Tokyo: Oxford University Press, 1992.

[2] 赖虹建. 拟阵论 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2002.

[3] 刘桂真, 陈庆华. 拟阵 [M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 1994.

[4] Bruhn H, Diestel R, Kriesell M, et al. Axioms for infinite matroids [J]. Advances in Mathematics, 2013, 239: 18-46.

[5] Ferrari L. Greedy algorithms and poset matroids [J]. Journal of Discrete Algorithms, 2014, 29: 21-26.

[6] Mao Hua. Characterization and reduction of concept lattices through matroid theory [J]. Information Sciences, 2014, 281: 338-354.

[7] Li Xiaonan, Yi Huangjian, Wang Zhaohao. Approximation via a double-matroid structure [J]. Soft Computing, 2019, 23(17): 7557-7568.

[8] 毛华. 概念格与简单拟阵 [J]. 应用数学学报, 2018, 41(3): 347-355.

[9] 王刚, 毛华, 武振宇. 伽罗瓦连接在构造拟阵中的应用 [J]. 计算机工程与科学, 2020, 42(7): 1276-1286.

[10] Mao Hua. A greedy algorithm for interval greedoids [J]. Open Mathematics, 2018, 16(1): 260-267.

[11] Li Xiaonan, Sun Bingzhen, She Yanhong. Generalized matroids based on three-way decision models [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2017, 90: 192-207.

[12] Gourvès L. Agreeable sets with matroidal constraints [J]. Journal of Combinatorial Optimization, 2019, 37(3): 866-888.

[13] 王刚, 毛华, 武秀. 反拟阵、凸几何与伽罗瓦连接的关系及其应用 [J]. 郑州大学学报: 理学版, 2021, 53(1): 95-101.

[14] Goetschel R, Voxman W. Fuzzy matroids [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1988, 27(3): 291-302.

[15] Goetschel R, Voxman W. Bases of fuzzy matroids [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1989, 31(2): 253-261.

[16] Goetschel R, Voxman W. Fuzzy circuits [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1989, 32(1): 35-43.

[17] Goetschel R, Voxman W. Fuzzy matroid structures [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1991, 41(3): 343-357.

[18] Li Yaolong, Zhang Guojun, Lu Lingxia. Axioms for bases of closed regular fuzzy matroids [J]. Fuzzy Sets and Sys-

tems,2010,161(12):1711-1725.

[19] 李尧龙. 闭正则模糊拟阵单点延拓的基有序性质[J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2018,42(6):600-603.

[20] 李尧龙. 闭正则模糊拟阵的单点延拓[J]. 西南大学学报:自然科学版,2015,37(10):9-14.

[21] Sarwar M,Akram M. Bipolar fuzzy circuits with applications[J]. Journal of Intelligent and Fuzzy Systems,2018,34(1):547-558.

[22] Tedford S J. Rank functions of fuzzy greedoids[J]. Open Journal of Discrete Mathematics,2015,5(4):65-73.

[23] Al-Hawary T. Fuzzy closure matroids[J]. Matematika,2016,32(1):69-74.

[24] Mahalakshmi J,Sudha M. On fuzzy $^*G_\delta\beta$ continuity in fuzzy * matroids[J]. Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics,2016,11(5):737-753.

[25] Sarwar M,Akram M. Novel concepts of bipolar fuzzy competition graphs[J]. Journal of Applied Mathematics and Computing,2017,54(1/2):511-547.

[26] 杨兰珍,毛华. 一种新的模糊广义拟阵[J]. 南京大学学报:自然科学版,2016,52(6):1075-1083.

The Base Orderability on Single Element Contractions of Closed Regular Fuzzy Matroids

LI Yaolong

(College of Mathematics and Physics,Weinan Teachers University,Weinan Shanxi 714000,China)

Abstract: The definitions of the base orderbility on single element contractions of matroids and closed regular fuzzy matroids are given. Some properties of the base orderbility on single element contraction of matriods and closed regular fuzzy matroids are studied. Examples of the base orderbility on single element contraction of closed regular fuzzy matroids are given.

Key words: fuzzy matroid; closed regular fuzzy matroid; submatroid; single element contraction; base orderbility

(责任编辑:曾剑锋)

(上接第 161 页)

The Synthesis of Dimethyl-1,10-Bis(Hydrogenated Nobuteryl Dimethyl Ammonium Bromide) and Its Antibacterial Activity Against 9 Kinds of Pathogens

PENG Yun[1,2],CHANG Jiayu[1,2],XIAO Zhuanquan[3], WANG Zongde[1,2*]

(1. College of Forestry,Jiangxi Agriculture University,Nanchang Jiangxi 330045,China;2. East China Woody Fragrance and Flavvor Engineering Technology Research Center,National Forestry and Grassland Administration,Nanchang Jiangxi 330045,China;
3. College of Chemistry and Chemical Engineering,Jiangxi Normal University,Nanchang Jiangxi 330027,China)

Abstract: The gemini quaternary ammonium salt named as decylidene-1,10-bis(hydronopol dimethyl ammonium bromide) is prepared by the reaction of *N*,*N*-dimethyl hydronopol amine with 1,10-dibromodecane. The structures of the products are characterized by GC-MS and NMR (^{1}H NMR and ^{13}C NMR),and the antifungal activities of 9 plant pathogens are tested by mycelial growth rate method at 5 concentrations. The results show that the compound have good inhibitory activity against 9 kinds of plant pathogenic bacteria,which is much higher than chlorothalonil. Among them,the highest inhibition rate of *Diplodia pinea* and *phytophthora parasitica* var. nicotianae is 100% at the concentrations of 200.0、100.0、50.0、25.0、12.5 mg·L^{-1}. And above 50.0 mg·L^{-1},the inhibition rate of *Fusicoccum aeculi*,*Rhizoctonia solani* and *Fusarium oxyporum* f. sp. niveum are also 100%.

Key words: hydronopol; quaternary ammonium salt; synthesis; structural characterization; antibacterial activity

(责任编辑:刘显亮)