文章编号: 1000-5862(2021)03-0262-10

关于模糊横贯拟阵的简洁表示

吴德垠

(重庆大学数学与统计学院,重庆　401331)

摘要: 该文利用模糊拟阵和拟阵的关系研究了模糊横贯拟阵的表示问题. 首先,讨论了模糊横贯拟阵的"子集数最小表示",得到这种表示的一个充要条件; 解决了这种表示的存在性并设计了计算这种表示的算法. 其次,在此基础上研究了模糊横贯拟阵的"简洁表示",提出并证明了一个表示是简洁表示的充要条件. 然后,证明了简洁表示的存在性,构造了从模糊拟阵的表示计算简洁表示的算法. 最后,研究了一种特殊的简洁表示即"顺序表示",证明了这种顺序表示可以从普通表示中产生.

关键词: 拟阵; 模糊拟阵; 模糊横贯拟阵; 模糊拟阵的表示; 模糊横贯拟阵的表示

中图分类号: O 157; O 159　　文献标志码: A　　DOI: 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2021.03.07

0　引言

文献[1]推广了文献[2]的模糊横贯拟阵,在同构意义下定义了更为广泛的模糊横贯拟阵. 在普通横贯拟阵理论中,横贯拟阵的表示是其重要组成部分. 对于具有某些性质的表示的研究主要在 3 个方面,即存在性、唯一性和构造性. 这些研究在子集系的代表系和图论的匹配研究与算法构造方面起着重要作用. 模糊横贯拟阵作为横贯拟阵的推广,其表示的这些研究同样具有非常重要的意义. 本文的主要目的就是讨论模糊横贯拟阵的一种"最简单"表示. 文献[3]初步讨论了模糊横贯拟阵的表示,得到一些有价值的结论,如一致模糊横贯拟阵[2]存在子集数最小表示等. 但对于更一般的模糊横贯拟阵是否也存在子集数最小表示呢? 若他们存在,则怎么构造? 模糊横贯拟阵还有更简单的表示吗? 怎么得到这些简单的表示? 这些问题是对模糊横贯拟阵表示的进一步研究,从而丰富模糊横贯拟阵理论. 同时,也有益于一些优化问题的解决.

1　预备知识

设集合 $E=\{x_1,x_2,\cdots,x_N\}$ 是一个非空有限集合,记 $P(E)$ 为集合 E 的全部子集组成的集合. 在 E 上的模糊集 μ 是一个映射 $\mu: E\to[0,1]$. 记 $F(E)$ 为在 E 上所有模糊子集组成的集合. 由于对模糊拟阵研究的习惯,本文延用文献[4]的有关模糊数学的概念和符号.

涉及拟阵的概念和记号参见文献[5].

定义 1[5]　设 E 是非空有限集,I 是 E 的子集族. 若 I 满足下列条件:

(i) $\varnothing\in I$;

(ii) 若 $X\in I$,$\forall Y\subseteq X$,则 $Y\in I$;

(iii) 若 X、$Y\in I$,$|X|<|Y|$,则 $\exists W\in I$,使得

$$X\subset W\subseteq X\cup Y,$$

则称偶对 (E,I) 为 E 上的一个拟阵,记为 $M=(E,I)$. $\forall X\subseteq E$,若 $X\in I$,则称 X 为 M 的独立集,否则称 X 为 M 的相关集. M 的最大独立集被称为 M 的基.

拟阵在本质上是一种具有某些特性的集合系统,在线性相关性、图论和网络等研究中有着广泛应用. 特别是在算法设计和分析领域中有重要作用.

文献[4]的定义 1.2 从普通拟阵概念来定义模糊拟阵概念. 随后许多学者提出了将普通拟阵构建模糊化拟阵的方法. 如文献[6]就提供了一种模糊化拟阵的方法. 本文的讨论只是针对在文献[4]中定义 1.1 的模糊拟阵进行的. 文献[7]将这种模糊拟阵称为 G-V 模糊拟阵. 这种模糊拟阵的最新进展可以参见文献[8-23].

定义 2[4]　设 E 是一个非空有限集,$\mathscr{I}\subseteq F(E)$

收稿日期: 2020-05-07

基金项目: 国家自然科学基金(61374078)资助项目.

作者简介: 吴德垠(1955—),男,重庆璧山人,教授,主要从事模糊拟阵研究. E-mail: wdy@cqu.edu.cn

是满足下列条件的非空模糊集族:

(i) 若$\mu \in \mathscr{I}$,$v \in F(E)$,$v \leqslant \mu$,则$v \in \mathscr{I}$;

(ii) 若μ、$v \in \mathscr{I}$,$|\operatorname{supp}\mu| < |\operatorname{supp} v|$,则$\exists \omega \in \mathscr{I}$使得

(a)$\mu < \omega \leqslant \mu \vee v$,(b)$m(\omega) \geqslant \min(m(\mu), m(v))$,

则称偶对$M = (E, \mathscr{I})$是E上的一个模糊拟阵,称$\mathscr{I}$为M的独立模糊集族. $\forall \mu \in F(E)$,若$\mu \in \mathscr{I}$,则称μ为M的模糊独立集. 若$\mu \notin \mathscr{I}$,则称μ为M的模糊相关集. M的极大独立模糊集被称为M的模糊基.

由文献[4]的observation 2.2知,一个模糊拟阵能够被分解为一组拟阵和一列数. 为了方便应用,结合文献[4]的定理2.1将其改述为如下引理.

引理1[4](模糊拟阵分解定理)　设$M = (E, \mathscr{I})$是一个模糊拟阵,$\forall r \in (0,1]$,令$I_r = \{C_r(\mu) \mid \forall \mu \in \mathscr{I}\}$,则$M_r = (E, I_r)$是$E$上的一个拟阵,且对于有限实数列$r_0 < r_1 < \cdots < r_n$有

(i) $r_0 = 0$,$r_n \leqslant 1$;

(ii) 当$0 < r \leqslant r_n$时,$I_r \neq \{\varnothing\}$;当$r > r_n$时,$I_r = \{\varnothing\}$;

(iii) 若$\forall s, t \in (r_i, r_{i+1})$,则$I_s = I_t (0 \leqslant i \leqslant n-1)$;

(iv) 若$r_i < s < r_{i+1} < t < r_{i+2}$,则$I_s \supset I_t (0 \leqslant i \leqslant n-2)$,

称序列$0 = r_0 < r_1 < \cdots < r_n \leqslant 1$为$M$的基本序列.

对任意正整数$i(1 \leqslant i \leqslant n)$,设$\bar{r}_i = (r_{i-1} + r_i)/2$,称

$\boldsymbol{M}_{\bar{r}_1} = (E, I_{\bar{r}_1}) \supset \boldsymbol{M}_{\bar{r}_2} = (E, I_{\bar{r}_2}) \supset \cdots \supset \boldsymbol{M}_{\bar{r}_n} = (E, I_{\bar{r}_n})$

为M的导出拟阵序列. 若$\boldsymbol{M}_{\bar{r}_i} = \boldsymbol{M}_{r_i} (i = 1, 2, \cdots, n)$,则称$M$是闭模糊拟阵.

在引理1中$C_r(\mu) = \{x \mid \forall x \in E, \mu(x) \geqslant r\}$,被称为模糊集$\mu$的$r$-水平集(或截集).

与引理1相对应地,文献[1]给出的定理2.8部分(只对闭模糊拟阵)解决了引理1的逆问题.

引理2[1](模糊拟阵合成定理)　设$\boldsymbol{M}_i = (E, \boldsymbol{I}_i)(i = 1, 2, \cdots, m)$是$E$上的拟阵序列,使得$\boldsymbol{I}_1 \supseteq \boldsymbol{I}_2 \supseteq \cdots \supseteq \boldsymbol{I}_m$,取$0 = \delta_0 < \delta_1 < \delta_2 < \cdots < \delta_m \leqslant 1$,令$\psi = \{\mu \in F(E) \mid \forall r \in (0,1], C_r(\mu) \in \boldsymbol{I}_r\}$,其中$\forall r \in (0,1]$,当$r \in (\delta_{i-1}, \delta_i]$时,$\boldsymbol{I}_r = \boldsymbol{I}_i (i = 1, 2, \cdots, m)$;当$\delta_m < 1$,$r \in (\delta_m, 1]$时,$\boldsymbol{I}_r = \{\varnothing\}$. 则

(i) 偶对$M = (E, \psi)$是一个闭模糊拟阵;

(ii) 保留在$\boldsymbol{I}_1 \supseteq \boldsymbol{I}_2 \supseteq \cdots \supseteq \boldsymbol{I}_m$中每段等式的最后一项,去掉其他部分会有由

$\boldsymbol{M}_{i_1} = (E, \boldsymbol{I}_{i_1}) \supset \boldsymbol{M}_{i_2} = (E, \boldsymbol{I}_{i_2}) \supset \cdots \supset \boldsymbol{M}_{i_k} = (E, \boldsymbol{I}_{i_k})$

组成M的导出拟阵序列. 通过下标对应,$0 = \delta_0 < \delta_{i_1} < \delta_{i_2} < \cdots < \delta_{i_k} \leqslant 1$为$M$的基本序列.

引理2说明:若闭模糊拟阵$M = (E, \mathscr{I})$的基本序列为$0 = r_0 < r_1 < \cdots < r_n \leqslant 1$,导出拟阵列为$M_{r_1} = (E, \boldsymbol{I}_{r_1}) \supset M_{r_2} = (E, \boldsymbol{I}_{r_2}) \supset \cdots \supset M_{r_n}(E, \boldsymbol{I}_{r_n})$,则

$$\mathscr{I} = \{\mu \in F(E) \mid \forall r \in (0,1], C_r(\mu) \in \boldsymbol{I}_r\},$$

其中当$r \in (r_{i-1}, r_i]$时,$\boldsymbol{I}_r = \boldsymbol{I}_{r_i}(i = 1, 2, \cdots, n)$;当$r_n < 1$,$r \in (r_n, 1]$时,$\boldsymbol{I}_r = \{\varnothing\}$.

引理3　设$\boldsymbol{M}_1 = (E, \mathscr{I}_1)$和$\boldsymbol{M}_2 = (E, \mathscr{I}_2)$是2个闭模糊拟阵,则$\boldsymbol{M}_1 = \boldsymbol{M}_2$当且仅当2个模糊拟阵分别具有相同的基本序列和导出拟阵序列.

证　从引理1得到引理3的必要性,再从引理2得到引理3的充分性.

有关横贯和横贯拟阵的概念和记号主要参照文献[5].

定义3[5]　设$A = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$是$E$的一个子集族,令

$I[A] = \{X \mid \forall X \subseteq E, X$是$A$的横贯或部分横贯$\}$,

则$M[A] = (E, I[A])$是一个拟阵,被称为关于子集族A的横贯拟阵. 称A为拟阵$M[A]$的一个表示.

文献[24]的定理2.1在后面的讨论中起着重要作用.

引理4[24]　设$M = (E, I)$是秩[5]为ρ的横贯拟阵,$A = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$是$M$的一个表示,$B$是$M$的一个基. $A' = \{A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_\rho}\}$是$A$的一个子族,使得$B$是$A'$的一个横贯,则$M[A] = M[A']$.

文献[25]定义了横贯拟阵的最小表示.

定义4[25]　设$M = (E, I)$是横贯拟阵,$A = \{A_1, A_2, \cdots, A_\rho\}(\rho = \rho(M))$为其一个表示. 若$\forall i (i = 1, 2, \cdots, \rho)$,$\forall x \in A_i$,使得

$I[A] \neq I[\{A_1, \cdots, A_{i-1}, A_i \backslash \{x\}, A_{i+1}, \cdots, A_\rho\}]$,

则称A是M的一个最小表示.

由文献[25]的定理1知,横贯拟阵M的最小表示总是存在,但是一般并不唯一.

模糊横贯和模糊横贯拟阵的有关概念和记号主要参照文献[1]. 关于模糊横贯拟阵的最新进展可以参见文献[1-3]. 为了后面讨论方便,将文献[1]的一些记号重述如下定义.

定义5[1]　设$E = \{x_1, x_2, \cdots, x_N\}$是一个非空有限集合.

(i) 取E上的子集族$\boldsymbol{A}_i = \{A_{i1}, A_{i2}, \cdots, A_{in}\}$,$i = 1, 2, \cdots, m$. 当$i = 2, 3, \cdots, m$时,若$A_{i1} \subseteq A_{(i-1)1}$,$A_{i2} \subseteq A_{(i-1)2}$,$\cdots$,$A_{in} \subseteq A_{(i-1)n}$,则记为$\boldsymbol{A}_i \subseteq \boldsymbol{A}_{i-1}$. 若还有当$j = 1, 2, \cdots, n$时,$A_{ij} \subset A_{(i-1)j}$,则记为$\boldsymbol{A}_i \subset \boldsymbol{A}_{i-1}$.

称 $A = \{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$ 为 E 的一个子集族串.

(ii) 若任取 $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_m \leqslant 1$,令

$\mu_1 = \bigvee_{i=1}^{m} \omega(A_{i1}, r_i), \mu_2 = \bigvee_{i=1}^{m} \omega(A_{i2}, r_i), \cdots, \mu_n = \bigvee_{i=1}^{m} \omega(A_{in}, r_i)$,

则 $u = \{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n\}$ 是 E 上的一个模糊子集族,称之为由子集族串 A 产生的模糊子集族.

(iii) 设 $u = \{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n\} \subseteq F(E)$ 是 E 上的一个模糊子集族. u 的全部模糊部分横贯组成 E 上的模糊子集族为

$$\varphi(u) = \{v \in F(E) \mid v \text{ 是 } u \text{ 的模糊部分横贯}\}.$$

(iv) 设 u 如(iii) 所定义,$R^* = R^*(u) = \bigcup_{i=1}^{n} R^+(\mu_i) = \{\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_p\}(0 < \delta_1 < \cdots < \delta_p \leqslant 1)$,称之为 u 的隶属度列. $\forall r \in (0,1]$,定义 u 的 r-截短模糊子集族(简称 r-截短) 为 $u^r = \{\mu_1^r, \mu_2^r, \cdots, \mu_n^r\}$,其中

$$\forall x \in E, \mu_i^r(x) = \begin{cases} 0, & \mu_i(x) < r, \\ \mu_i(x), & \mu_i(x) \geqslant r \end{cases}$$

被称为模糊集 μ_i 的一个 r-截短模糊集,记为 μ_i^r.

(v) 设 u 如(iii) 所定义,$\forall i \in \{1,2,\cdots,p\}$,记

$$A_i = \operatorname{supp} u^{\delta_i} = \{\operatorname{supp} \mu_1^{\delta_i}, \cdots, \operatorname{supp} \mu_n^{\delta_i}\},$$

则称 $A(u) = \{A_1, A_2, \cdots, A_p\}$ 为由 u 产生的 E 的一个子集族串.

(vi) 设 u 如(iii) 所定义,$\forall i \in \{1,2,\cdots,p\}$,记 $M_i = (E, I[A_i])$,令 $I[A_i] = I_i$,构造 E 上的模糊子集族

$$\varphi^*(u) = \{\mu \in F(E) \mid \forall r \in (0,1], C_r(\mu) \in I_r\},$$

其中当 $r \in (\delta_{i-1}, \delta_i]$ 时,$I_r = I_i(i = 1,2,\cdots,l, \delta_0 = 0)$;当 $\delta_p < 1, r \in (\delta_p, 1]$ 时,$I_r = \{\varnothing\}$,则由引理2知$(E, \varphi^*(u))$ 是闭模糊拟阵,称之为由模糊集族 u 产生的模糊拟阵.

文献[3] 定义了精简表示和最小表示(为了更准确描述,改为子集数最小表示).

定义6[3] 设 $M = (E, \mathscr{I})$ 是模糊横贯拟阵,$u = \{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n\}$ 为 M 的一个表示. 设 M 的基本序列为 $0 = r_0 < r_1 < \cdots < r_m \leqslant 1$,导出拟阵列为 $M_{r_1} = (E, I_{r_1}) \supset M_{r_2} = (E, I_{r_2}) \supset \cdots \supset M_{r_m} = (E, I_{r_m})$. 若 $R^* = \{r_1, r_2, \cdots, r_m\}$,则称模糊集族 u 是模糊横贯拟阵 M 的一个精简表示.

若对任何模糊子集族 $v = \{v_1, v_2, \cdots, v_p\}$,只要 $p < n$,总有 $\varphi(u) \neq \varphi(v)$,则称 $u = \{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n\}$ 为 M 的一个子集数最小表示.

文献[1] 指出$(E, \varphi(u))$ 和$(E, \varphi^*(u))$ 都不一定是模糊横贯拟阵,但有如下结论.

引理5[1] 设 u 是集合 E 的一个模糊子集族,$\varphi(u)$ 和 $\varphi^*(u)$ 如定义5所确定,则 $M(u) = (E, \varphi(u))$ 是模糊横贯拟阵的充要条件是 $\varphi^*(u) = \varphi(u)$.

文献[1] 的定理2.3在后面的讨论中经常使用,转述如下引理.

引理6[1] 设 $M = (E, \mathscr{I})$ 是模糊横贯拟阵,M 的一个表示为 $u = \{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n\}$,$M$ 的基本序列和导出拟阵序列分别为 $0 = r_0 < r_1 < \cdots < r_m \leqslant 1$,$M_{r_1} = (E, I_{r_1}) \supset M_{r_2} = (E, I_{r_2}) \supset \cdots \supset M_{r_m} = (E, I_{r_m})$,$u^{r_i}(i = 1,2,\cdots,m)$ 是模糊集族 u 的 r_i-截短模糊集族,则 $I_{r_i} = I[\operatorname{supp} u^{r_i}](i = 1,2,\cdots,m)$.

定理1 设 $M = (E, \mathscr{I})$ 是模糊横贯拟阵,$u = \{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n\}$ 为 M 的一个表示,$0 = r_0 < r_1 < \cdots < r_q \leqslant 1$ 和 $M_{r_1} = (E, I_{r_1}) \supset M_{r_2} = (E, I_{r_2}) \supset \cdots \supset M_{r_q} = (E, I_{r_q})$ 分别为 M 的基本序列和导出拟阵序列. 再设 $\tilde{u} = \{\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2, \cdots, \tilde{\mu}_p\}$ 是 E 上的一个模糊子集族,使得 $R^*(\tilde{u}) \supseteq \{r_1, r_2, \cdots, r_q\}$,且 $\forall r \in (0,1]$,当 $r \in (r_{i-1}, r_i]$ 时,$I_{r_i} = I[\operatorname{supp} \tilde{u}^r](i = 1,2,\cdots,q)$;当 $r_q < 1$ 时,$\forall r \in (r_q, 1]$,$I[\operatorname{supp} \tilde{u}^r] = \{\varnothing, \varnothing, \cdots, \varnothing\}$,则$\varphi(u) = \varphi(\tilde{u})$(即 $\tilde{u}$ 也是 M 的一个表示).

证 不妨设 $R^*(\tilde{u}) = \{\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_p\}$,$0 < \delta_1 < \cdots < \delta_p \leqslant 1$,$I[\operatorname{supp} \tilde{u}^{\delta_1}] \supseteq I[\operatorname{supp} \tilde{u}^{\delta_2}] \supseteq \cdots \supseteq I[\operatorname{supp} \tilde{u}^{\delta_p}]$. 根据已知得在这个串中的严格包含部分是 $I_{r_1} = I[\operatorname{supp} \tilde{u}^{r_1}] \supset I_{r_2} = I[\operatorname{supp} \tilde{u}^{r_2}] \supset \cdots \supset I_{r_q} = I[\operatorname{supp} \tilde{u}^{r_q}]$. 由定义5的(vi) 可得闭模糊拟阵$(E, \varphi^*(\tilde{u}))$. 由引理2知,其基本序列和导出拟阵序列分别为

$$0 = r_0 < r_1 < \cdots < r_q \leqslant 1,$$
$$M_{r_1} = (E, I_{r_1}) \supset M_{r_2} = (E, I_{r_2}) \supset \cdots \supset M_{r_q} = (E, I_{r_q}).$$

再由文献[1] 的定理2.1知,$M = (E, \varphi(u))$ 是闭模糊拟阵. 而且 M 与$(E, \varphi^*(\tilde{u}))$ 有相同的基本序列和导出拟阵列,所以,由引理3知 $M = (E, \varphi^*(\tilde{u}))$,即 $\varphi(u) = \varphi^*(\tilde{u})$. 因此,$(E, \varphi^*(\tilde{u}))$ 也是模糊横贯拟阵. 由引理5知

$$\varphi^*(\tilde{u}) = \varphi(\tilde{u}) = \varphi(u).$$

2 模糊横贯拟阵的子集数最小表示

模糊横贯拟阵 M 的表示 u 包含的模糊子集数最少必须是多少?从文献[2] 知,一致模糊横贯拟阵的模糊子集数最少的表示(即子集数最小表示) 的模

糊子集数最少不能少于其导出拟阵序列的第 1 个拟阵的秩. 本部分将此结论推广到一般的模糊横贯拟阵. 同时,还构造了求子集数最小表示的算法. 这里假设 $M = (E, \mathscr{I})$ 是模糊横贯拟阵,且

$$0 = r_0 < r_1 < \cdots < r_q \leqslant 1,$$

$$\boldsymbol{M}_{r_1} = (E, I_{r_1}) \supset \boldsymbol{M}_{r_2} = (E, I_{r_2}) \supset \cdots \supset \boldsymbol{M}_{r_q} = (E, I_{r_q})$$

分别为其基本序列和导出拟阵序列,设 $\boldsymbol{u} = \{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n\}$ 为 M 的一个表示. 再设 $\rho = \rho(\boldsymbol{M}_{r_1})$,这里 $\rho(\boldsymbol{M}_{r_1})$ 表示 $\boldsymbol{M}_{r_1}$ 的秩[5].

首先证明子集数最小表示的存在性.

定理2　设 $M = (E, \mathscr{I})$ 是模糊横贯拟阵,则对任何表示 $\boldsymbol{u}$ 都可找到 $\boldsymbol{u}$ 的一个具有 ρ 个模糊集的子集族 $\underline{\boldsymbol{u}}$,使得 $\underline{\boldsymbol{u}}$ 是 M 的子集数最小表示.

证　根据引理 6 有

$$\boldsymbol{I}_{r_i} = I[\operatorname{supp} \boldsymbol{u}^{r_i}]\ (i = 1, 2, \cdots, q).$$

设 $\rho_i = \rho(\boldsymbol{M}_{r_i})\ (i = 1, 2, \cdots, q)$ (当然 $\rho = \rho_1$).

(i) 构造 M 的一个模糊基.

取 M_{r_q} 的一个基 $B_q = \{x_{q1}, x_{q2}, \cdots, x_{q\rho_q}\}$,利用文献[6]的增广定理,将其扩充为 $M_{r_{q-1}}$ 的一个基

$$B_{q-1} = \{x_{(q-1)1}, x_{(q-1)2}, \cdots, x_{(q-1)\rho_{q-1}}\},$$

再将 B_{q-1} 扩充为 $M_{r_{q-2}}$ 的一个基 B_{q-2},$\cdots$,将 M_{r_2} 的基 $B_2 = \{x_{21}, x_{22}, \cdots, x_{2\rho_2}\}$ 扩充为 M_{r_1} 的一个基 $B_1 = \{x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1\rho_1}\}$. 得到在文献[12]中的一个基子集套 $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \cdots \supseteq B_q$,由文献[12]的定理 3.1 知

$$\mu = \omega(B_1, r_1) \vee \omega(B_2, r_2) \vee \cdots \vee \omega(B_q, r_q)$$

是 M 的一个模糊基.

(ii) 针对前面的模糊基,构造 $\boldsymbol{u} = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ 的一个模糊子族 $\underline{\boldsymbol{u}}$.

由于 μ 是 $\boldsymbol{u}$ 的一个最大模糊部分横贯,由文献[1]的定理 2.5 知,$\forall r_i \in \{r_1, r_2, \cdots, r_q\}$,$C_{r_i}(\mu) \in \boldsymbol{I}_{r_i} = I[\operatorname{supp} \boldsymbol{u}^{r_i}]$. 而且有一个单射

$$\pi: B_1 = \{x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1\rho_1}\} \to \{1, 2, \cdots, n\},$$

使得 $C_{r_i}(\mu) = B_i$ 是 $\operatorname{supp} \boldsymbol{u}^{r_i}$ 的最大部分横贯对应的单射为 $\pi_{r_i} = \pi | B_i\ (i = 1, 2, \cdots, q)$.

令 $i_1 = \pi(x_{11}), i_2 = \pi(x_{12}), \cdots, i_{\rho_1} = \pi(x_{1\rho_1})$. 由于 π 单射,所以这些正整数 $i_1, i_2, \cdots, i_{\rho_1}$ 各不相同. 为叙述方便可调换标号使得 $1 < i_1 < i_2 < \cdots < i_{\rho_1} \leqslant n$. 根据这些标号,取 $\boldsymbol{u}$ 的一个模糊子族 $\underline{\boldsymbol{u}} = \{u_{i_1}, u_{i_2}, \cdots, u_{i_{\rho_1}}\} \subseteq \boldsymbol{u}$.

(iii) 下面证明 $\varphi(\boldsymbol{u}) = \varphi(\underline{\boldsymbol{u}})$.

$B_q = \{x_{q1}, x_{q2}, \cdots, x_{q\rho_q}\}$ 是 $\operatorname{supp} \boldsymbol{u}^{r_q}$ 的一个最大横贯,且 $x_{qj} \in \operatorname{supp} u^{r_q}_{\pi(x_{qj})}\ (i = 1, 2, \cdots, \rho_q)$. 根据引理 4 和引理 6 知,

$$I[\operatorname{supp} \boldsymbol{u}^{r_q}] = I[\{\operatorname{supp} u^{r_q}_{\pi(x_{q1})}, \operatorname{supp} u^{r_q}_{\pi(x_{q2})}, \cdots, \operatorname{supp} u^{r_q}_{\pi(x_{q\rho_q})}\}] = I[\operatorname{supp} \underline{\boldsymbol{u}}^{r_q}].$$

当 $i = 1, 2, \cdots, q-1$ 时,由于 B_i 是 M_{r_i} 的基,从而同理可知

$$I[\operatorname{supp} \boldsymbol{u}^{r_i}] = I[\{\operatorname{supp} u^{r_i}_{\pi(x_{i1})}, \operatorname{supp} u^{r_i}_{\pi(x_{i2})}, \cdots, \operatorname{supp} u^{r_i}_{\pi(x_{i\rho_q})}\}] = I[\operatorname{supp} \underline{\boldsymbol{u}}^{r_i}].$$

故 $I[\operatorname{supp} \boldsymbol{u}^{r_i}] = I[\operatorname{supp} \underline{\boldsymbol{u}}^{r_i}]\ (i = 1, 2, \cdots, q)$.

由 $\boldsymbol{I}_{r_1} = I[\operatorname{supp} \boldsymbol{u}^{r_1}] \supset \boldsymbol{I}_{r_2} = I[\operatorname{supp} \boldsymbol{u}^{r_2}] \supset \cdots \supset \boldsymbol{I}_{r_q} = I[\operatorname{supp} \boldsymbol{u}^{r_q}]$ 知,必定 $\operatorname{supp} \underline{\boldsymbol{u}}^{r_1} \supset \operatorname{supp} \underline{\boldsymbol{u}}^{r_2} \supset \cdots \supset \operatorname{supp} \underline{\boldsymbol{u}}^{r_q}$,因此 $R^*(\underline{\boldsymbol{u}}) \supseteq \{r_q, r_2, \cdots, r_q\}$.

$\forall r \in (0, 1]$,当 $r \in (r_{i-1}, r_i]$ 时,$\boldsymbol{I}_{r_i} = I[\operatorname{supp} \boldsymbol{u}^{r_i}] = I[\operatorname{supp} \underline{\boldsymbol{u}}^{r_i}] = I[\operatorname{supp} \underline{\boldsymbol{u}}^{r}]\ (i = 1, 2, \cdots, q)$;当 $r_q < 1, r \in (r_q, 1]$ 时,$I[\operatorname{supp} \underline{\boldsymbol{u}}^{r}] = \{\varnothing, \varnothing, \cdots, \varnothing\}$. 因此,根据定理 1 有 $\varphi(\boldsymbol{u}) = \varphi(\underline{\boldsymbol{u}})$.

所以 $\underline{\boldsymbol{u}}$ 也是模糊横贯拟阵 $M = (E, \varphi(\boldsymbol{u}))$ 的一个表示.

(iv) 最后证明 $\underline{\boldsymbol{u}}$ 是 M 的一个子集数最小表示.

任取模糊子集族 $\boldsymbol{v} = \{v_1, v_2, \cdots, v_p\}$ 且 $p < \rho_1$. 由于 $\rho_1 = \rho(\boldsymbol{M}_{r_1})$,因此,任取 M 的一个模糊基 μ(即 $\underline{\boldsymbol{u}}$ 的一个最大模糊部分横贯),根据文献[1]的推论 2.2 知,$\operatorname{supp} \mu$ 必为 $\boldsymbol{M}_{r_1}$ 的基,进而 $|\operatorname{supp} \mu| = \rho(\boldsymbol{M}_{r_1}) = \rho_1$. 又由 $\boldsymbol{I}_{r_1} = I[\operatorname{supp} \boldsymbol{u}^{r_1}]$ 知,$\operatorname{supp} \boldsymbol{u}^{r_1}$ 是 $\boldsymbol{M}_{r_1}$ 的一个表示. 所以,$\operatorname{supp} \mu$ 是 $\operatorname{supp} \boldsymbol{u}^{r_1}$ 的一个最大横贯.

由于 $p < \rho_1$,因此,$\operatorname{supp} \mu$ 不可能是 $\operatorname{supp} \boldsymbol{v}^{r_1}$ 的一个横贯. 因此,必定 $\operatorname{supp} \mu \notin I[\operatorname{supp} \boldsymbol{v}^{r_1}]$. 即

$$\varphi(\boldsymbol{u}) = \varphi(\underline{\boldsymbol{u}}) \neq \varphi(\boldsymbol{v}).$$

故 $\underline{\boldsymbol{u}}$ 是 M 的一个子集数最小表示.

定理 2 说明: 从模糊横贯拟阵的任何表示出发都可以求出一个子集数最小表示(即子集数最小表示总是存在). 由于模糊横贯拟阵的表示一般不唯一,模糊横贯拟阵的模糊基一般不唯一,单射 $\pi: B_1 \to \{1, 2, \cdots, n\}$ 也一般不唯一,因此,这些因素决定了模糊横贯拟阵的子集数最小表示一般也就不唯一.

由定理 2 的证明过程得到一个从任何表示求子集数最小表示的算法.

算法1　模糊横贯拟阵的子集数最小表示算法.

已知 M 是模糊横贯拟阵,$0 = r_0 < r_1 < \cdots < r_q \leqslant 1$ 和 $\boldsymbol{M}_{r_1} = (E, \boldsymbol{I}_{r_1}) \supset \boldsymbol{M}_{r_2} = (E, \boldsymbol{I}_{r_2}) \supset \cdots \supset \boldsymbol{M}_{r_q} = (E, \boldsymbol{I}_{r_q})$ 分别为其基本序列和导出拟阵序列,令 $\rho_i = \rho(\boldsymbol{M}_{r_i})\ (i = 1, 2, \cdots, q)$. 设 $\boldsymbol{u} = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ 是 M 的一个表示.

Step 1 求M的一个基子集串$B_1 \supseteq B_2 \supseteq \cdots \supseteq B_q$.

任取M_{r_q}的基$B_q = \{x_{q1}, x_{q2}, \cdots, x_{q\rho_q}\}$,将$B_q$扩充成$M_{r_{q-1}}$的基$B_{q-1} = \{x_{(q-1)1}, x_{(q-1)2}, \cdots, x_{(q-1)\rho_{q-1}}\}$,…,最后,将$B_2$扩充成$M_{r_1}$的基$B_1 = \{x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1\rho_1}\}$.

Step 2 求单射$\pi: B_1 \to \{1, 2, \cdots, n\}$.

由$\mu = \omega(B_1, r_1) \vee \omega(B_2, r_2) \vee \cdots \vee \omega(B_q, r_q)$是$M$的一个模糊基(即$\boldsymbol{u}$的最大模糊部分横贯)知,有单射$\pi: B_1 \to \{1, 2, \cdots, n\}$使得$\forall x_{1i} \in B_1$,都有$0 < x_{1i}^{\mu(x_{1i})} < \mu_{\pi(x_{1i})}$ $(i = 1, 2, \cdots, \rho_1)$.

Step 3 取$\boldsymbol{u} = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$的模糊子集族$\underline{\boldsymbol{u}} = \{u_{i_1}, u_{i_2}, \cdots, u_{i_{\rho_1}}\}$,其中$i_1 = \pi(x_{11})$,$i_2 = \pi(x_{12})$,…,$i_{\rho_1} = \pi(x_{1\rho_1})$,从而$\underline{\boldsymbol{u}}$就是$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{u})$的一个子集数最小表示. 算法结束.

算法1的有效性可从定理2的证明中得出.

下面讨论一个子集数最小表示的一个充要条件.

定理3 设$M = (E, \mathscr{I})$是模糊横贯拟阵,$\boldsymbol{u} = \{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n\}$为$M$的一个表示,则$\boldsymbol{u}$是$M$的子集数最小表示的充要条件是$n = \rho$.

证 先证必要性. 若$\boldsymbol{u}$是M的一个表示,则由文献[3]的定理3.2知,必定$n \geqslant \rho(M_{r_1})$.

使用算法1可以找到$\boldsymbol{u}$的一个子族$\underline{\boldsymbol{u}}$,$\underline{\boldsymbol{u}}$也是$M$的一个表示,而且$|\underline{\boldsymbol{u}}| = \rho$. 由$\boldsymbol{u}$是$M$的子集数最小表示知,必有$n \leqslant \rho = \rho(\boldsymbol{M}_{r_1})$. 所以,$n = \rho(\boldsymbol{M}_{r_1})$.

再证充分性. 任取M的一个模糊基μ,由文献[1]的定理2.6知,$\mathrm{supp}\,\mu$是$\boldsymbol{M}_{r_1}$的基. 再由引理6知,$\boldsymbol{I}_{r_1} = I[\mathrm{supp}\,\boldsymbol{u}^{r_1}]$. 因此,$\mathrm{supp}\,\mu$是$\mathrm{supp}\,\boldsymbol{u}^{r_1}$的横贯.

若$p < n$,则对任何模糊子集族$\boldsymbol{v} = \{v_1, v_2, \cdots, v_p\}$,都使得$\mathrm{supp}\,\mu$不可能是$\mathrm{supp}\,\boldsymbol{v}^{r_1}$的横贯,因此,$\varphi(\boldsymbol{u}) \neq \varphi(\boldsymbol{v})$. 故$\boldsymbol{u}$是$M$的子集数最小表示.

最后讨论一个利用算法1的例子.

例1 设$E = \{x_1, x_2, x_3\}$. 取

$\boldsymbol{A}_1 = \{\{x_1, x_3\}, \{x_2, x_3\}, \{x_1, x_1\}, \{x_1, x_1\}\}$,

$\boldsymbol{A}_2 = \{\{x_1\}, \varnothing, \{x_1\}, \{x_1\}\}$,

$\boldsymbol{A}_3 = \{\varnothing, \varnothing, \{x_1\}, \varnothing\}$,

得子集串$A = \{\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3\}$. 显然有

$I[\boldsymbol{A}_1] = \{\varnothing, \{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_2, x_3\}, \{x_1, x_2, x_3\}\} = \boldsymbol{I}_1$,

$I[\boldsymbol{A}_2] = I[\boldsymbol{A}_3] = \{\varnothing, \{x_1\}\} = \boldsymbol{I}_2$.

取$\delta_1 = 0.10 < \delta_2 = 0.15 < \delta_3 = 0.20$,构造模糊集族$\boldsymbol{u} = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4\}$,其中

$\mu_1 = \omega(\{x_1, x_3\}, 0.10) \vee \omega(\{x_1\}, 0.15) \vee \omega(\varnothing, 0.20)$,

$\mu_2 = \omega(\{x_2, x_3\}, 0.10) \vee \omega(\varnothing, 0.15) \vee \omega(\varnothing, 0.20)$,

$\mu_3 = \omega(\{x_1, x_1\}, 0.10) \vee \omega(\{x_1\}, 0.15) \vee \omega(\{x_1\}, 0.20)$,

$\mu_4 = \omega(\{x_1, x_1\}, 0.10) \vee \omega(\{x_1\}, 0.15) \vee \omega(\varnothing, 0.20)$.

则模糊子集族$\boldsymbol{u}$的全体模糊横贯组成集合

$\varphi(\boldsymbol{u}) = \{x_1^{\lambda_1} \vee x_2^{\lambda_2} \vee x_3^{\lambda_3} \mid \forall \lambda_2, \lambda_3 \in [0, 0.1], \forall \lambda_1 \in [0, 0.2]\}$.

再令$r_1 = 0.1$,$r_2 = 0.2$,$\varphi^*(\boldsymbol{u}) = \{\mu \in F(E) \mid \forall r \in (0, 1], C_r(\mu) \in \boldsymbol{I}_r\}$,其中当$r \in (r_{i-1}, r_i]$时,$\boldsymbol{I}_r = \boldsymbol{I}_{r_i}(i = 1, 2)$;当$r \in (0.2, 1]$时,$\boldsymbol{I}_r = \varnothing$. 经计算有

$\varphi^*(\boldsymbol{u}) = \{x_1^{\lambda_1} \vee x_2^{\lambda_2} \vee x_3^{\lambda_3} \mid \forall \lambda_2, \lambda_3 \in [0, 0.1], \forall \lambda_1 \in [0, 0.2]\}$.

因此,$\varphi^*(\boldsymbol{u}) = \varphi(\boldsymbol{u})$.

由$\varphi^*(\boldsymbol{u}) = \varphi(\boldsymbol{u})$和引理5知,$\boldsymbol{M} = (E, \varphi(\boldsymbol{u}))$是模糊横贯拟阵,$r_1 = 0.1 < r_2 = 0.2$为其基本序列,$\boldsymbol{M}_{r_1} = (E, I[\boldsymbol{A}_1]) \supset \boldsymbol{M}_{r_2} = (E, I[\boldsymbol{A}_2])$为其导出拟阵序列. 由$\rho(E, I[\boldsymbol{A}_1]) = 2$和定理3知,$\boldsymbol{u}$不是$M$的子集数最小表示.

按照算法1,首先,找基子集串

$$B_2 = \{x_1\} \subset B_1 = \{x_1, x_2, x_3\},$$

得到M的一个模糊基

$\mu = \omega(\{x_1, x_2, x_3\}, 0.10) \vee \omega(\{x_1\}, 0.20)$.

其次,通过μ是$\boldsymbol{u}$的最大模糊部分横贯,找到映射$\pi: B_1 \to \{1, 2, 3\}$. $\pi(x_1) = 3$,$\pi(x_2) = 2$,$\pi(x_3) = 1$,得$i_1 = \pi(x_1) = 3$,$i_2 = \pi(x_2) = 2$,$i_3 = \pi(x_3) = 1$.

最后,按照标号得到$\boldsymbol{u}$的子集族$\underline{\boldsymbol{u}} = \{\mu_3, \mu_2, \mu_1\} = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}$. 易检验,$\underline{\boldsymbol{u}}$确实是$M$的子集数最小表示.

3 模糊横贯拟阵的简洁表示

第2节讨论了模糊横贯拟阵的子集数最小表示. 但是,在模糊横贯拟阵M的表示$\boldsymbol{u}$中,其模糊隶属度集合$R^*(\boldsymbol{u})$可以非常复杂. 那么,$R^*(\boldsymbol{u})$必须包含哪些值?这些表示有什么特点?怎么计算模糊横贯拟阵的子集数最小,且$R^*(\boldsymbol{u})$包含的值最简单?这些都是本节要讨论的内容.

定义7 设$\boldsymbol{M} = (E, \mathscr{I})$是模糊横贯拟阵,$0 = r_0 < r_1 < \cdots < r_q \leqslant 1$和$\boldsymbol{M}_{r_1} = (E, \boldsymbol{I}_{r_1}) \supset \boldsymbol{M}_{r_2} = (E, \boldsymbol{I}_{r_2}) \supset \cdots \supset \boldsymbol{M}_{r_q} = (E, \boldsymbol{I}_{r_q})$分别为其基本序列和导出拟阵序列,$\boldsymbol{u} = \{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n\}$是$M$的一个表示,若使得$R^*(\boldsymbol{u}) = \{r_1, r_2, \cdots, r_q\}$且$\rho(\boldsymbol{M}_{r_1}) = n$,则称

$\boldsymbol{u}$ 为模糊横贯拟阵 M 的简洁表示，这里 $\rho(M_{r_1})$ 表示 M_{r_1} 的秩.

由文献[1]的定理 2.2 知，必定有 $R^*(\boldsymbol{u}) \supseteq \{r_1, r_2, \cdots, r_q\}$. 因此，模糊横贯拟阵 M 的精简表示 $\boldsymbol{u}$ 包含的模糊隶属度应该是所有表示中最简单的. 文献[3]的定理 3.1 证明了模糊横贯拟阵的精简表示总是存在. 本文的定理 2 又指出模糊横贯拟阵的子集数最小表示也存在. 综合 2 者来看，模糊横贯拟阵的子集数最小的精简表示(即简洁表示)应该是在所有表示中最简单的表示.

定理 4　模糊横贯拟阵都有简洁表示，然而这种简洁表示不一定唯一.

证　设 $M = (E, \mathscr{I})$ 是模糊横贯拟阵. 根据文献[3]的定理 3.1 知，M 有精简表示 $\boldsymbol{u} = \{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n\}$(即 $M = (E, \varphi(\boldsymbol{u}))$ 且 $R^*(\boldsymbol{u}) = \{r_1, r_2, \cdots, r_q\}$). 再由定理 2 知，存在 $\boldsymbol{u}$ 的一个模糊子族 $\underline{\boldsymbol{u}}$，使得 $\underline{\boldsymbol{u}}$ 是 M 的一个子集数最小表示.

下面证明 $\underline{\boldsymbol{u}}$ 就是 M 的一个简洁表示. 由于 $\underline{\boldsymbol{u}}$ 是 M 的子集数最小表示，因此，只须证明 $\underline{\boldsymbol{u}}$ 也是 M 的一个精简表示即可.

设 M 的基本序列为 $0 = r_0 < r_1 < \cdots < r_q \leqslant 1$，则由 $\boldsymbol{u}$ 是精简表示知，$\boldsymbol{u}$ 的隶属度列为 $R^*(\boldsymbol{u}) = \{r_1, r_2, \cdots, r_q\}$. 再由 $\underline{\boldsymbol{u}} \subseteq \boldsymbol{u}$ 知，$R^*(\underline{\boldsymbol{u}}) \subseteq R^*(\boldsymbol{u})$.

从 $\varphi(\boldsymbol{u}) = \varphi(\underline{\boldsymbol{u}})$ 和文献[1]的定理 2.2 知，$\{r_1, r_2, \cdots, r_q\} \subseteq R^*(\underline{\boldsymbol{u}})$. 因此，结合 $R^*(\underline{\boldsymbol{u}}) \subseteq R^*(\boldsymbol{u})$ 得出

$$R^*(\underline{\boldsymbol{u}}) = R^*(\boldsymbol{u}) = \{r_1, r_2, \cdots, r_q\}.$$

即 $\underline{\boldsymbol{u}}$ 也是 M 的一个精简表示.

故 $\underline{\boldsymbol{u}}$ 是 M 的一个简洁表示.

由定理 2 的讨论知子集数最小表示一般不唯一，因此简洁表示一般也不唯一.

接下来讨论一个表示是简洁表示的充要条件.

定理 5　设 $M = (E, \mathscr{I})$ 是模糊横贯拟阵，$0 = r_0 < r_1 < \cdots < r_q \leqslant 1$ 和 $M_{r_1} = (E, \boldsymbol{I}_{r_1}) \supset M_{r_2} = (E, \boldsymbol{I}_{r_2}) \supset \cdots \supset M_{r_q} = (E, \boldsymbol{I}_{r_q})$ 分别为其基本序列和导出拟阵序列，$\boldsymbol{u} = \{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n\}$ 为 M 的一个表示，则 $\boldsymbol{u}$ 是 M 的一个简洁表示的充要条件是 $n = \rho_1$(令 $\rho_1 = \rho(M_{r_1})$)，而且 $\forall k(k = 1, 2, \cdots, \rho_1)$，$\mu_k = \bigvee_{j=1}^{q} \omega(\operatorname{supp} \mu_k^{r_j}, r_j)$，其中 $\mu_k^{r_j}$ 表示 μ_k 的一个 r_j-截短模糊集(定义 5 的(iv)).

证　先证必要性. 若 $\boldsymbol{u}$ 是 M 的一个简洁表示，则由定义 7 知，必有 $n = \rho_1$ 和 $R^*(\boldsymbol{u}) = \{r_1, r_2, \cdots, r_q\}$. 所以，$\forall k(k = 1, 2, \cdots, \rho_1)$，$R^+(\mu_k) \subseteq \{r_1, r_2, \cdots, r_q\}$. 因此，根据模糊集合的表示性质知

$$\mu_k = \bigvee_{j=1}^{q} \omega(\operatorname{supp} \mu_k^{r_j}, r_j).$$

再证充分性. 由 $\boldsymbol{u}$ 是 M 的一个表示和文献[1]的定理 2.2 知，$R^*(\boldsymbol{u}) \supseteq \{r_1, r_2, \cdots, r_q\}$. 由 $\forall k(k = 1, 2, \cdots, \rho_1)$，$\mu_k = \bigvee_{j=1}^{q} \omega(\operatorname{supp} \mu_k^{r_j}, r_j)$ 知，总有 $R^+(\mu_k) \subseteq \{r_1, r_2, \cdots, r_q\}$. 因此，$R^*(\boldsymbol{u}) \subseteq \{r_1, r_2, \cdots, r_q\}$. 故 $R^*(\boldsymbol{u}) = \{r_1, r_2, \cdots, r_q\}$.

再由 $n = \rho_1$ 和定义 7 知 $\boldsymbol{u}$ 是 M 的一个简洁表示.

接下来，准备讨论构造模糊横贯拟阵简洁表示的一个算法.

已知 $M = (E, \mathscr{I})$ 是模糊横贯拟阵，$\boldsymbol{u} = \{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n\}$ 是 M 的一个表示. M 的基本序列为 $0 = r_0 < r_1 < \cdots < r_q \leqslant 1$，$M$ 的导出拟阵序列为 $M_{r_1} = (E, \boldsymbol{I}_{r_1}) \supset M_{r_2} = (E, \boldsymbol{I}_{r_2}) \supset \cdots \supset M_{r_q} = (E, \boldsymbol{I}_{r_q})$. 令 $\rho = \rho(M_{r_1})$.

算法 2　从模糊横贯拟阵的一个表示求出一个简洁表示的算法.

Step 1　求出模糊子集族 $\boldsymbol{u}$ 的子集族串 $A(\boldsymbol{u})$.

$\forall i \in \{1, 2, \cdots, q\}$，计算

$\boldsymbol{A}_i = \operatorname{supp} \boldsymbol{u}^{r_i} = \{\operatorname{supp} \mu_1^{r_i}, \cdots, \operatorname{supp} \mu_n^{r_i}\}$，

得到 E 的一个子集族串 $A(\boldsymbol{u}) = \{\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_q\}$.

Step 2　求 M 的一个基子集套 $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \cdots \supseteq B_q$.

任取 M_{r_q} 的一个基 B_q，将 B_q 扩充为 $M_{r_{q-1}}$ 的一个基 B_{q-1}，…，将 B_2 扩充为 M_{r_1} 的一个基 B_1，得到基子集套 $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \cdots \supseteq B_q$. 不妨设 $B_1 = \{x_1, x_2, \cdots, x_\rho\}$. 由文献[12]的定理 3.2 知，$\mu = \bigvee_{i=1}^{q} \omega(B_i, r_i)$ 是 M 的一个模糊基.

Step 3　求 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的子集 $\{i_1, i_2, \cdots, i_\rho\}$.

由于 μ 是 $\boldsymbol{u}$ 的一个最大模糊部分横贯(即 M 的模糊基)，B_i 是 $\operatorname{supp} \boldsymbol{u}^{r_i} = \boldsymbol{A}_i$ 的最大部分横贯($i \in \{1, 2, \cdots, q\}$)，而且 M 是模糊横贯拟阵. 因此，由文献[1]的定理 2.5 知，可找到一个单射 $\pi: B_1 \to \{1, 2, \cdots, n\}$. $\forall x \in B_1$，都有 $x \in \operatorname{supp} \mu_{\pi(x)}^{r_1}$. 而且使得 B_i 是 $\operatorname{supp} \boldsymbol{u}^{r_i}$ 的最大横贯的单射 π_i 可由 π 在 B_i 上的限制(即 $\pi_i = \pi|B_i$)来得到. 由于 π 是单射，因此会有 $\{i_1, i_2, \cdots, i_\rho\} \subseteq \{1, 2, \cdots, n\}$，使得 $\pi(x_1) = i_1$，$\pi(x_2) = i_2$，…，$\pi(x_\rho) = i_\rho$.

Step 4　构造模糊子集族 $\boldsymbol{u}^* = \{\mu_1^*, \mu_2^*, \cdots, \mu_\rho^*\}$，其中 $\forall j \in \{1, 2, \cdots, \rho\}$，

$\mu_j^* = \omega(\operatorname{supp} \mu_{i_j}^{r_1}, r_1) \vee \omega(\operatorname{supp} \mu_{i_j}^{r_2}, r_2) \vee \cdots \vee \omega(\operatorname{supp} \mu_{i_j}^{r_q}, r_q)$(或 $\mu_j^* = \omega(\operatorname{supp} \mu_{\pi(x_j)}^{r_1}, r_1) \vee$

$\omega(\operatorname{supp}\mu_{\pi(x_j)}^{r_2}, r_2) \vee \cdots \vee \omega(\operatorname{supp}\mu_{\pi(x_j)}^{r_q}, r_q))$，从而 $\boldsymbol{u}^*$ 就是 M 的一个简洁表示. 算法结束.

由算法 2 可以看出：求$\{1,2,\cdots,n\}$的子集$\{i_1, i_2,\cdots,i_\rho\}$在本质上就是选取最大模糊部分横贯$\mu$映射到的指标及其对应的模糊子集. 算法 2 的有效性由定理 6 所保证.

定理 6 从算法 2 得到的模糊子集族 $\boldsymbol{u}^*$ 是 M 的一个简洁表示.

证 显然$|\boldsymbol{u}^*|=\rho, R^*(\boldsymbol{u}^*)\subseteq\{r_1,r_2,\cdots,r_q\}$. 因此，还需证明 $\boldsymbol{u}^*$ 是 M 的一个表示以及 $R^*(\boldsymbol{u}^*)\supseteq\{r_1,r_2,\cdots,r_q\}$. 但是根据文献[1]的定理 2.2 知，若 $\boldsymbol{u}^*$ 是 M 的一个表示，则必有 $R^*(\boldsymbol{u}^*)\supseteq\{r_1, r_2,\cdots,r_q\}$. 所以，只须证明 $\boldsymbol{u}^*$ 是 M 的一个表示. 注意到$B_1\supset B_2\supset\cdots\supset B_q$.

首先设 $B_i=\{x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{i\rho_i}\}(i\in\{1,2,\cdots, q\}),\rho_i=\rho(\boldsymbol{M}_{r_i})$(此时$\rho=\rho_1$). $B_q=\{x_{q1},x_{q2},\cdots, x_{q\rho_q}\}$ 是 $\operatorname{supp}\boldsymbol{u}^{r_q}$ 的一个最大部分横贯，且 $x_{qj}\in \operatorname{supp}u_{\pi(x_{qj})}^{r_q}(i=1,2,\cdots,\rho_q)$. 根据引理 4 和引理 6 知，

$I[\operatorname{supp}\boldsymbol{u}^{r_q}]=I[\{\operatorname{supp}u_{\pi(x_{q1})}^{r_q},\operatorname{supp}u_{\pi(x_{q2})}^{r_q},\cdots, \operatorname{supp}u_{\pi(x_{q\rho_q})}^{r_q}\}]=I[\operatorname{supp}\boldsymbol{u}^{*r_q}]$.

对于$i=1,2,\cdots,q-1$，由$B_i=\{x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{i\rho_i}\}$是$\operatorname{supp}\boldsymbol{u}^{r_i}$的一个最大部分横贯，且$x_{ij}\in\operatorname{supp}u_{\pi(x_{ij})}^{r_q}$ $(j=1,2,\cdots,\rho_i)$. 用同样的方法有

$I[\operatorname{supp}\boldsymbol{u}^{r_i}]=I[\{\operatorname{supp}u_{\pi(x_{i1})}^{r_i},\operatorname{supp}u_{\pi(x_{i2})}^{r_i},\cdots, \operatorname{supp}u_{\pi(x_{i\rho_i})}^{r_i}\}]=I[\operatorname{supp}\boldsymbol{u}^{*r_i}]$.

因此，$\boldsymbol{I}_{r_i}=I[\operatorname{supp}\boldsymbol{u}^{r_i}]=I[\operatorname{supp}\boldsymbol{u}^{*r_i}](i=1,2,\cdots,q)$.

由 $\boldsymbol{I}_{r_1}\supset\boldsymbol{I}_{r_2}\supset\cdots\supset\boldsymbol{I}_{r_q}$ 知，$\operatorname{supp}\boldsymbol{u}^{*r_1}\supset \operatorname{supp}\boldsymbol{u}^{*r_2}\supset\cdots\supset\operatorname{supp}\boldsymbol{u}^{*r_q}$，因此，$R^*(\boldsymbol{u}^*)=\{r_1, r_2,\cdots,r_q\}$.

$\forall r\in(0,1]$，当 $r\in(r_{i-1},r_i]$ 时，根据算法 $\boldsymbol{u}^*$ 的构造知，$I[\operatorname{supp}\boldsymbol{u}^{*r}]=I[\operatorname{supp}\boldsymbol{u}^{*r_i}](i=1,2,\cdots, q)$. 再结合 $I[\operatorname{supp}\boldsymbol{u}^{*r_i}]=I[\operatorname{supp}\boldsymbol{u}^{r_i}]=\boldsymbol{I}_{r_i}$ 有 $I[\operatorname{supp}\boldsymbol{u}^{*r}]=\boldsymbol{I}_{r_i}$；当 $r_q<1$ 时，取 $r\in(r_q,1]$，由 $R^*(\boldsymbol{u}^*)=\{r_1,r_2,\cdots,r_q\}$ 知，$I[\operatorname{supp}\boldsymbol{u}^{*r}]=\{\varnothing, \varnothing,\cdots,\varnothing\}$.

根据定理 1 有$\varphi(\boldsymbol{u})=\varphi(\boldsymbol{u}^*)$，即$\boldsymbol{u}^*$ 也是M的一个表示.

由$|\boldsymbol{u}^*|=\rho$和$R^*(\boldsymbol{u}^*)=\{r_1,r_2,\cdots,r_q\}$知，$\boldsymbol{u}^*$ 是 M 的一个简洁表示.

例 2 设 $E=\{x_1,x_2,x_3\}$. 取

$\boldsymbol{A}_1=\{\{x_1,x_3\},\{x_2,x_3\},\{x_1,x_2\}\}$，

$\boldsymbol{A}_2=\{\{x_1\},\varnothing,\{x_1\}\}, \boldsymbol{A}_3=\{\varnothing,\varnothing,\{x_1\}\}$，

得子集串 $A=\{\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3\}$. 显然有

$I[\boldsymbol{A}_1]=\{\varnothing,\{x_1\},\{x_2\},\{x_3\},\{x_1,x_2\},\{x_1, x_3\},\{x_2,x_3\},\{x_1,x_2,x_3\}\}=\boldsymbol{I}_1$，

$I[\boldsymbol{A}_2]=I[\boldsymbol{A}_3]=\{\varnothing,\{x_3\}\}=\boldsymbol{I}_2$.

取 $\delta_1=0.10<\delta_2=0.15<\delta_3=0.20$，构造模糊集族 $\boldsymbol{u}=\{\mu_1,\mu_2,\mu_3\}$，其中

$\mu_1=\omega(\{x_1,x_3\},0.10)\vee\omega(\{x_1\},0.15)\vee \omega(\varnothing,0.20)$，

$\mu_2=\omega(\{x_2,x_3\},0.10)\vee\omega(\varnothing,0.15)\vee \omega(\varnothing,0.20)$，

$\mu_3=\omega(\{x_1,x_1\},0.10)\vee\omega(\{x_1\},0.15)\vee \omega(\{x_1\},0.20)$，

则

$$\varphi(\boldsymbol{u})=\{x_1^{\lambda_1}\vee x_2^{\lambda_2}\vee x_3^{\lambda_3}\mid\forall\lambda_2,\lambda_3\in[0,0.1], \forall\lambda_1\in[0,0.2]\}.$$

再令 $r_1=0.1, r_2=0.2, \varphi^*(\boldsymbol{u})=\{\mu\in F(E)\mid \forall r\in(0,1], C_r(\mu)\in\boldsymbol{I}_r\}$，其中当 $r\in(r_{i-1},r_i]$ 时，$\boldsymbol{I}_r=\boldsymbol{I}_{r_i}(i=1,2)$；当 $r\in(0.2,1]$ 时，$\boldsymbol{I}_r=\{\varnothing\}$. 经计算有

$$\varphi^*(\boldsymbol{u})=\{x_1^{\lambda_1}\vee x_2^{\lambda_2}\vee x_3^{\lambda_3}\mid\forall\lambda_2,\lambda_3\in[0, 0.1],\forall\lambda_1\in[0,0.2]\}.$$

由$\varphi^*(\boldsymbol{u})=\varphi(\boldsymbol{u})$和引理 5 知，$\boldsymbol{M}=(E,\varphi(u))$ 是模糊横贯拟阵，$r_1=0.1<r_2=0.2$ 为其基本序列，$\boldsymbol{M}_{r_1}=(E,I[\boldsymbol{A}_1])\supset\boldsymbol{M}_{r_2}=(E,I[\boldsymbol{A}_2])$. 而且 u 是 M 的一个子集数最小表示.

已知$A(u)=\{\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3\}$. 再找$M$的一个基子集套$B_2=\{x_1\}\subset B_1=\{x_1,x_2,x_3\}$，得到$M$的一个模糊基$\mu=\omega(\{x_1,x_2,x_3\},0.1)\vee\omega(\{x_1\},0.2)$.

然后通过μ是 $\boldsymbol{u}$ 的最大模糊部分横贯，找到映射π: $B_1\to\{1,2,3\}$. $\pi(x_1)=3, \pi(x_2)=2, \pi(x_3)=1$，得 $i_1=\pi(x_1)=3, i_2=\pi(x_2)=2, i_3=\pi(x_3)=1$.

最后构造模糊子集族$\boldsymbol{u}^*=\{\mu_1^*,\mu_2^*,\mu_3^*\}$，其中

$\mu_1^*=\omega(\operatorname{supp}\mu_3^{r_1},r_1)\vee\omega(\operatorname{supp}\mu_3^{r_2},r_2)= \omega(\{x_1,x_2\},r_1)\vee\omega(\{x_1\},r_2)=x_1^{0.2}$，

$\mu_2^*=\omega(\operatorname{supp}\mu_2^{r_1},r_1)\vee\omega(\operatorname{supp}\mu_2^{r_2},r_2)= \omega(\{x_2,x_3\},r_1)=x_2^{0.1}\vee x_3^{0.1}$，

$\mu_3^*=\omega(\operatorname{supp}\mu_1^{r_1},r_1)\vee\omega(\operatorname{supp}\mu_1^{r_2},r_2)= \omega(\{x_1,x_3\},r_1)\vee\omega(\varnothing,r_2)=x_1^{0.1}\vee x_3^{0.1}$.

根据定理 6 知，$\boldsymbol{u}^*$ 是 M 的一个简洁表示.

最后讨论一个比较特殊的简洁表示.

定理 7 设$\boldsymbol{M}=(E,\mathscr{I})$是一个模糊横贯拟阵，$\rho_i=\rho(\boldsymbol{M}_{r_i})(i=1,2,\cdots,q)$，则存在 M 的一个简洁

表示 $\tilde{u}=\{\tilde{\mu}_1,\tilde{\mu}_2,\cdots,\tilde{\mu}_{\rho_1}\}$，使得 $\forall i(i=1,2,\cdots,q)$，只要 $\rho_i<\rho_1$ 都有

$$\mathrm{supp}\,\tilde{\mu}^{r_i}_{\rho_1-\rho_i+1}=\mathrm{supp}\,\tilde{\mu}^{r_i}_{\rho_1-\rho_i+2}=\cdots=\mathrm{supp}\,\tilde{\mu}^{r_i}_{\rho_1}=\varnothing.$$

称这种表示为 M 的顺序表示.

证　根据定理 4 知，取 M 的任何一个简洁表示 $u=\{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_{\rho_1}\}$.

(i) 按照定理 2 的证明(i) 的方法，构造 M 的一个基子集套[12] $B_1\supseteq B_2\supseteq\cdots\supseteq B_q$，其中 $B_i=\{x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{i\rho_i}\}(i=1,2,\cdots,q)$ 都是 M_{r_i} 的基. 由此得到 M 的一个模糊基

$$\mu=\omega(B_1,r_1)\vee\omega(B_2,r_2)\vee\cdots\vee\omega(B_q,r_q).$$

注意到 $B_1\supseteq B_2\supseteq\cdots\supseteq B_q$，因此，重新排序后可以假设

$$\begin{cases} x_{q1}=x_{(q-1)1}=\cdots=x_{11}, \\ x_{q2}=x_{(q-1)2}=\cdots=x_{12}, \\ \cdots, \\ x_{q\rho_q}=x_{(q-1)\rho_q}=\cdots=x_{1\rho_q}, \\ x_{(q-1)\rho_q+1}=x_{(q-2)\rho_q+1}=\cdots=x_{1\rho_q+1}, \\ \cdots, \\ x_{2\rho_3+1}=x_{1\rho_3+1}, \\ \cdots, \\ x_{2\rho_2}=x_{1\rho_2}. \end{cases} \tag{1}$$

(ii) μ 是 M 的模糊基，也是 u 的一个最大模糊部分横贯. 由文献[1]的定理 2.5 知，$\forall r_i\in\{r_1,r_2,\cdots,r_q\}$，$C_{r_i}(\mu)\in I[\mathrm{supp}\,u^{r_i}]$. 而且有一个单射 π: $B_1=\{x_{11},x_{12},\cdots,x_{1\rho_1}\}\to\{1,2,\cdots,\rho_1\}$，使得 $C_{r_i}(\mu)=B_i$ 是 $\mathrm{supp}\,u^{r_i}$ 的最大部分横贯对应的单射为

$$\pi_{r_i}=\pi|B_i(i=1,2,\cdots,q).$$

(iii) 根据式(1) 知，令由映射 π 所得到的值为

$$\begin{cases} i_1=\pi(x_{q1})=\pi(x_{(q-1)1})=\cdots=\pi(x_{11}), \\ i_2=\pi(x_{q2})=\pi(x_{(q-1)2})=\cdots=\pi(x_{12}), \\ \cdots, \\ i_{\rho_q}=\pi(x_{q\rho_q})=\pi(x_{(q-1)\rho_q})=\cdots=\pi(x_{1\rho_q}), \\ i_{\rho_q+1}=\pi(x_{(q-1)\rho_q+1})=\cdots=\pi(x_{1\rho_q+1}), \\ \cdots, \\ i_{\rho_{q-1}}=\pi(x_{(q-1)\rho_{q-1}})=\cdots=\pi(x_{1\rho_{q-1}}), \\ \cdots, \\ i_{\rho_2}=\pi(x_{2\rho_2})=\pi(x_{1\rho_2}), \\ i_{\rho_2+1}=\pi(x_{1\rho_2+1}), \\ \cdots, \\ i_{\rho_1}=\pi(x_{1\rho_1}). \end{cases}$$

根据 π 是单射知，这些正整数 $i_1,i_2,\cdots,i_{\rho_1}\in\{1,2,\cdots,\rho_1\}$，而且各不相同. 所以，$\{i_1,i_2,\cdots,i_{\rho_1}\}=\{1,2,\cdots,\rho_1\}$(即为 $\{1,2,\cdots,\rho_1\}$ 的一个全排列).

(iv) 取 $u'=\{\mu_1',\mu_2',\cdots,\mu_{\rho_1}'\}$，使得 $\mu_1'=\mu_{i_1}$，$\mu_2'=\mu_{i_2}$，$\cdots$，$\mu_{\rho_1}'=\mu_{i_{\rho_1}}$(只是将 $\{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_{\rho_1}\}$ 重新排序). 显然，$\{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_{\rho_1}\}=\{\mu_1',\mu_2',\cdots,\mu_{\rho_1}'\}$. 当然有 $\varphi(u)=\varphi(u')$. 所以，u' 也是 M 的一个简洁表示.

(v) 取子集族 $A_i=\{A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{i\rho_i},A_{i\rho_i+1},\cdots,A_{i\rho_1}\}(i=1,2,\cdots,q)$，其中 $A_{ij}=\mathrm{supp}\,\mu_j'^{r_i}(j=1,2,\cdots,\rho_i)$，$A_{i\rho_i+1}=A_{i\rho_i+2}=\cdots=A_{i\rho_1}=\varnothing$(空集个数为 $\rho_1-\rho_i$)(即 A_i 的前 ρ_i 个子集就是 $\mathrm{supp}\,\mu'^{r_i}$ 的前 ρ_i 个子集，而后面的 $\rho_1-\rho_i$ 个子集是 $\varnothing$). 注意到 B_i 是 $M_{r_i}=(E,I[\mathrm{supp}\,u^{r_i}])=(E,I[\mathrm{supp}\,u'^{r_i}])$ 的基，结合引理 4 和引理 6 知，

$$I[A_i]=I[\{A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{i\rho_i}\}]=I[\mathrm{supp}\,u'^{r_i}]=I[\mathrm{supp}\,u^{r_i}].$$

构造模糊子集族

$$\tilde{u}=\{\tilde{\mu}_1,\tilde{\mu}_2,\cdots,\tilde{\mu}_{\rho_1}\},\tilde{\mu}_j=\bigvee_{i=1}^{q}\omega(A_{ij},r_i)(j=1,2,\cdots,\rho_1).$$

(vi) 只要 $\rho_i<\rho_1$ 都有

$$\mathrm{supp}\,\tilde{\mu}^{r_i}_{\rho_1-\rho_i+1}=\mathrm{supp}\,\tilde{\mu}^{r_i}_{\rho_1-\rho_i+2}=\cdots=\mathrm{supp}\,\tilde{\mu}^{r_i}_{\rho_1}=\varnothing.$$

因此，下面重点证明 $\tilde{u}$ 是 M 的一个简洁表示.

注意到定理 2 的证明(i)，$\forall i(=1,2,\cdots,q)$，有

$$I_{r_i}=I[\mathrm{supp}\,u^{r_i}]=I[\mathrm{supp}\,u'^{r_i}]=I[A_i]=I[\mathrm{supp}\,\tilde{u}^{r_i}].$$

(a) 由 $I_{r_1}\supset I_{r_2}\supset\cdots\supset I_{r_q}$ 知，

$$\mathrm{supp}\,\tilde{u}^{r_1}\supset\mathrm{supp}\,\tilde{u}^{r_2}\supset\cdots\supset\mathrm{supp}\,\tilde{u}^{r_q}.$$

所以，$R^*(\tilde{u})=\{r_1,r_2,\cdots,r_q\}$.

(b) $\forall r\in(0,1]$，若 $r\in(r_{i-1},r_i](i=1,2,\cdots,q)$，则根据 $\tilde{u}$ 的构造，有

$$I[\mathrm{supp}\,\tilde{u}^r]=I[\mathrm{supp}\,\tilde{u}^{r_i}]=I[A_i]=I[\mathrm{supp}\,u^{r_i}]=I_{r_i}.$$

若 $r\in(r_q,1]$，则

$$\mathrm{supp}\,\tilde{u}^r=\{\varnothing,\varnothing,\cdots,\varnothing\},$$
$$I[\mathrm{supp}\,\tilde{u}^r]=\{\varnothing,\varnothing,\cdots,\varnothing\}.$$

由定理 1 知，$\tilde{u}$ 是 M 的一个表示. 再由 $\rho_1=\rho(M_{r_1})$ 和(a) 知，$\tilde{u}$ 是 M 的一个简洁表示.

这种顺序表示 $\tilde{u}$ 的特点在于它既是简洁表示，又是在 $\mathrm{supp}\,\tilde{u}^{r_i}$ 中只有前 ρ_i 个子集非空而后面的子集都是 $\varnothing$.

定理 7 说明了任何模糊横贯拟阵都有顺序表示，其实还给出了通过简洁表示求顺序表示的方法. 但是，这种表示也可能不唯一. 下面举例说明从简洁表示求顺序表示的过程和顺序表示可能不唯一.

例 3　设 $E=\{x_1,x_2,x_3\}$. 取

$A_1=\{\{x_1,x_3\},\{x_2,x_3\},\{x_1,x_3\}\}$,

$A_2=\{\{x_1,x_3\},\{x_3\},\{x_1\}\}$,

得到子集族串 $A=\{A_1,A_2\}$. 显然,

$I[A_1]=\{\varnothing,\{x_1\},\{x_2\},\{x_3\},\{x_1,x_2\},\{x_1,x_3\},\{x_2,x_3\},\{x_1,x_2,x_3\}\}=I_1$,

$I[A_2]=\{\varnothing,\{x_1\},\{x_3\},\{x_1,x_3\}\}=I_2$.

(i) 构造模糊横贯拟阵 $M=(E,\varphi(u))$.

构造模糊集族 $u=\{\mu_1,\mu_2,\mu_3\}$,其中

$\mu_1=\omega(\{x_1,x_3\},0.1)\vee\omega(\{x_1,x_3\},0.2)$,

$\mu_2=\omega(\{x_2,x_3\},0.1)\vee\omega(\{x_3\},0.2)$,

$\mu_3=\omega(\{x_1,x_3\},0.1)\vee\omega(\{x_1\},0.2)$,

则

$\varphi(u)=\{x_1^{\lambda_1}\vee x_2^{\lambda_2}\vee x_3^{\lambda_3}\mid\forall\lambda_2\in[0,0.1],\forall\lambda_1,\lambda_3\in[0,0.2]\}$.

再令 $r_1=0.1,r_2=0.2,\varphi^*(u)=\{\mu\in F(E)\mid\forall r\in(0,1],C_r(\mu)\in I_r\}$,其中当 $r\in(r_{i-1},r_i]$ 时,$I_r=I_{r_i}(i=1,2)$;当 $r\in(0.2,1]$ 时,$I_r=\{\varnothing\}$. 经计算有

$\varphi^*(u)=\{x_1^{\lambda_1}\vee x_2^{\lambda_2}\vee x_3^{\lambda_3}\mid\forall\lambda_2\in[0,0.1],\forall\lambda_1,\lambda_3\in[0,0.2]\}$.

由引理5知,$M=(E,\varphi(u))$ 是模糊横贯拟阵.

(ii) 说明 u 是 M 的一个简洁表示,但不是顺序表示.

求 M 的一个基子集套

$$B_1=\{x_1,x_2,x_3\}\supset B_2=\{x_1,x_3\},$$

构造 M 的一个模糊基

$\mu=\omega(\{x_1,x_2,x_3\},0.1)\vee\omega(\{x_1,x_3\},0.2)=x_1^{0.2}\vee x_2^{0.1}\vee x_3^{0.2}$.

针对 μ 是 u 的最大模糊部分横贯,它的指标集单射为 $\pi:B_1\to\{1,2,3\}$,其中 $\pi(x_1)=3,\pi(x_2)=2,\pi(x_3)=1$. 则显然 $0<x_1^{0.2}<\mu_3,0<x_2^{0.1}<\mu_2,0<x_3^{0.2}<\mu_1$. 根据模糊横贯定义知,$\mu$ 是 u 的最大模糊横贯.

显然,u 已经是 M 的一个简洁表示,但不是顺序表示.

(iii) 使用定理7的方法求 M 的一个顺序表示 $\tilde{u}$.

由定理7的证明(iii) 得 $i_1=3,i_2=2,i_3=1$. 再由定理7的证明(iii) 知在 u 中模糊子集顺序,从而 $u'=\{\mu_1',\mu_2',\cdots,\mu_3'\}$,其中 $\mu_1'=\mu_3,\mu_2'=\mu_2,\mu_3'=\mu_1$.

接下来,由定理7的证明(iv) 知,取子集族串 $A'=\{A_1',A_2'\}$,其中 $A_1'=\{\{x_1,x_3\},\{x_2,x_3\},\{x_1,x_3\}\},A_2'=\{\{x_1\},\{x_3\},\varnothing\}$.

最后,采用定理7的证明(v) 构造模糊子集族 $\tilde{u}=\{\tilde{\mu}_1,\tilde{\mu}_2,\tilde{\mu}_3\}$,这里 $\tilde{\mu}_j=\bigvee_{i=1}^{2}\omega(A_{i_j},r_i)(j=1,2,3)$,即

$\tilde{\mu}_1=\omega(\{x_1,x_3\},0.1)\vee\omega(\{x_1\},0.2)$,

$\tilde{\mu}_2=\omega(\{x_2,x_3\},0.1)\vee\omega(\{x_3\},0.2)$,

$\tilde{\mu}_3=\omega(\{x_1,x_3\},0.1)\vee\omega(\varnothing,0.2)$.

经检验得 $\tilde{u}=\{\tilde{\mu}_1,\tilde{\mu}_2,\tilde{\mu}_3\}$ 是 M 的一个顺序表示.

(iv) 求 M 的另一个顺序表示 u^*,使 $u^*\neq\tilde{u}$.

另一方面,取 $u^*=\{\mu_1^*,\mu_2^*,\mu_3^*\}$,

$\mu_1^*=\omega(\{x_1,x_3\},0.1)\vee\omega(\{x_1,x_3\},0.2)$,

$\mu_2^*=\omega(\{x_2,x_3\},0.1)\vee\omega(\{x_3\},0.2)$,

$\mu_3^*=\omega(\{x_1,x_3\},0.1)\vee\omega(\varnothing,0.2)$.

易检验得 $\varphi(u^*)$ 满足定义2,因此,$(E,\varphi(u^*))$ 是模糊横贯拟阵.

由于 $I_1=I[u^{*r_1}],I_2=I[u^{*r_2}],R^+(u^*)=\{r_1,r_2\}$,因此,$M=(E,\varphi(u^*))$,即 u^* 也是 M 的一个表示,而且是顺序表示. 但 $u^*\neq\tilde{u}$.

4 结束语

本文采用的方法主要是将模糊拟阵的研究转化为普通拟阵的研究,然后将研究结果再返回到模糊拟阵的方法. 本文研究的主要内容是进一步解决模糊横贯拟阵的表示问题. 首先得到了模糊横贯拟阵的"子集数最小表示"的一个充要条件,证明了模糊横贯拟阵总是存在子集数最小表示,但是一般不唯一;然后还给出了从普通表示来计算子集数最小表示的算法,这些结果大大推广了文献[2]的有关结论;在此基础上,再研究了模糊横贯拟阵更为简单的"简洁表示",得到简洁表示的一个充要条件,证明了模糊横贯拟阵的简洁表示总是存在但一般不唯一,找到了一个从一般表示计算简洁表示的算法;最后研究了一种特殊的简洁表示即"顺序表示",证明了这种顺序表示可以从普通表示中产生. 这些研究丰富了模糊横贯拟阵理论,也为涉及模糊横贯拟阵的表示的优化问题提供了某些途径.

5 参考文献

[1] 吴德垠. 模糊横贯拟阵的再研究[J]. 模糊系统与数学,2019,33(3):1-17.

[2] 张晓婷,吴德垠. 关于一致模糊横贯拟阵的研究[J]. 模糊系统与数学,2019,33(2):2-12.

[3] 吴德垠. 关于模糊横贯拟阵表示的初步研究[J]. 模糊

系统与数学,2019,33(4):1-10.
[4] Goetschel R,Voxman W. Fuzzy matroids [J]. Fuzzy Sets and Systems,1988,27(3):291-302.
[5] 刘桂真,陈庆华. 拟阵[M]. 长沙: 国防科技大学出版社,1994:2-3,11-16,127-131.
[6] 史福贵. 格值模糊拟阵的研究进展[J]. 模糊系统与数学,2012,26(6):1-13.
[7] Li Xiaonan,Liu Sanyang,Li Shenggang. Connectedness of refined Goetschel-Voxman fuzzy matroids [J]. Fuzzy Sets and Systems,2010,161(20):2709-2723.
[8] 吴德垠. 关于模糊拟阵的模糊秩研究[J]. 模糊系统与数学,2019,33(5):1-10.
[9] 吴德垠. 模糊拟阵的导出集合函数[J]. 模糊系统与数学,2019,33(1):1-11.
[10] 李尧龙. 闭正则模糊拟阵单点延拓的基有序性质[J]. 江西师范大学学报: 自然科学版,2018,42(6):600-603.
[11] 吴德垠. 关于模糊拟阵的独立模糊集生成问题的一些结果[J]. 模糊系统与数学,2018,32(5):1-8.
[12] 吴德垠,张忠. 研究模糊拟阵的一种新方法[J]. 模糊系统与数学,2018,32(4):1-9.
[13] 吴德垠. 模糊拟阵的独立模糊壳[J]. 西南师范大学学报: 自然科学版,2018,40(8):89-94.
[14] 吴德垠. 一个准模糊图拟阵的新特征[J]. 西南师范大学学报: 自然科学版,2018,40(2):35-39.
[15] 吴德垠. 关于模糊收缩列拟阵的研究[J]. 西南大学学报: 自然科学版,2020,42(4):70-76.
[16] 吴德垠,杨高进. 闭G-V模糊拟阵的模糊圈公理[J]. 吉林大学学报: 理学版,2020,58(2):239-250.
[17] 吴德垠. 闭模糊拟阵模糊圈的极值问题[J]. 模糊系统与数学,2020,34(2):1-14.
[18] 吴德垠. 关于模糊收缩列拟阵的研究[J]. 西南大学学报: 自然科学版,2020,42(4):70-76.
[19] 吴德垠,张忠,杨高进. 关于G-V模糊拟阵的对偶模糊拟阵概念的推广[J]. 模糊系统与数学,2020,34(3):1-12.
[20] 吴德垠. G-V模糊拟阵模糊圈的极值问题[J]. 东北师大学报: 自然科学版,2020,52(2):9-18.
[21] 吴德垠. 关于模糊横贯拟阵的最大表示[J]. 模糊系统与数学,2020,34(4):1-15.
[22] 李尧龙. 闭正则模糊拟阵单点收缩子拟阵的基有序性质[J]. 江西师范大学学报: 自然科学版,2021,45(2):204-210.
[23] Wu Deyin,Li Yonghong. The induced basis axioms for a closed G-V fuzzy matroid [J]. Journal of Intelligent and Fuzzy Systems,2021,40(1):1037-1049.
[24] Brualdi R A,Mason J H. Transversal Matroids and Hall′s theorem [J]. Pacific Journal of Mathematics, 1972, 41(3):601-613.
[25] Bondy J A,Welsh D J A. Some results on transversal Matroids and constructions for identically self-dual Matroids [J]. The Quarterly Journal of Mathematics,1971,22(3):435-451.

The Concise Presentations of Fuzzy Transversal Matroids

WU Deyin
(College of Mathematics and Statistics,Chongqing University,Chongqing 401331,China)

Abstract: The problems about presentations of fuzzy transversal matroids using relations between matroids and fuzzy matroids are studied. Firstly,the representation of minimum subset number about fuzzy transversal matroids is discussed. Many conclusions such as the existence about the representation of minimum subset number,the necessary and sufficient condition of this representation,and an algorithm getting this representation from an ordinary presentation are got. Secondly,more simple presentations of fuzzy transversal matroids are researched,which is concise presentations. Then,some results that are the existence and uniqueness about concise presentations,the necessary and sufficient condition of concise representations,and an algorithm getting this representation from an ordinary presentation also are obtained. Lastly,the sequential representation is studied. This representation is a special type of concise presentations. Because of their special properties,the sequential representation will have an important function in researching representations of fuzzy transversal matroids.

Key words: matroids; fuzzy matroids; fuzzy transversal matroids; representations of fuzzy matroids; representations of fuzzy transversal matroids

(责任编辑: 曾剑锋)