文章编号:1000-5862(2021)03-0272-06

双边定数截尾下 Topp-Leone 分布的 Bayes 估计与预测

邓严林
(荆楚理工学院数理学院,湖北 荆门 448000)

摘要:在双边定数截尾样本下得到了 Topp-Leone 分布中参数的极大似然估计.基于无信息先验分布和 Gamma 先验分布,在平方损失和预防损失下分别得到了参数的 Bayes 估计.根据后验密度函数得到了未知参数的 Bayes 可信区间和未来观测值的预测密度,进而可得预测值和预测区间.利用 Monte-Carlo 模拟计算了参数的各种估计的均方误差,研究结果表明:当取 Gamma 先验分布时,在平方损失下参数的 Bayes 估计是最优的.最后通过一个寿命数据的例子计算出未知参数的估计以及未来观测值的预测值和预测区间.

关键词:Topp-Leone 分布;双边定数截尾;Bayes 估计;Bayes 预测
中图分类号:O 213 文献标志码:A DOI:10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2021.03.08

0 引言

C. W. Topp 等[1]提出了 Topp-Leone 分布,并把它用于失效数据的拟合.由于 Topp-Leone 分布具有 U 形危险率,适用于模拟产品在开始时由于制造缺陷而发生更多的故障次数、产品中期的恒定故障率和产品后期的高故障率.这种模式也可以在婴儿时期死亡率高的人群(由于婴儿疾病和出生缺陷)中看到,直到30多岁的死亡率几乎不变,之后又再次出现高死亡率.Topp-Leone 分布是少数具有 U 型危险率的寿命分布之一,与 Gamma 分布和对数正态分布等许多寿命模型不同,Topp-Leone 分布具有封闭形式的分布函数和危险率函数.Topp-Leone 分布的这一特性为截尾数据的分析提供了更大便利,在寿命数据的建模和估计中引起了研究者的极大关注.M. A. El-Sayed 等[2]在逐步增加的 II 型截尾样本下,用频率方法和贝叶斯方法估计了 Topp-Leone 分布的变异系数.B. Al-Zahrani 等[3]得到了在 Topp-Leone 分布下应力强度可靠性统计推断的一些结论.S. Arora 等[4]在定数截尾样本下讨论了 Topp-Leone 分布可靠度函数和失效率函数的 Bayes 估计问题.文献[5-7]也在不同样本下对 Topp-Leone 分布的统计性质进行了讨论.

在寿命分析和可靠性分析等领域中经常会遇到截尾数据,而双边定数截尾试验是一种常见的获取截尾数据的方法,已经有很多统计学者在双边定数截尾样本下研究了多种寿命分布的参数和可靠性指标的估计问题[8-15].然而,目前在双边定数截尾下对服从 Topp-Leone 分布产品的寿命进行预测的文献较少.本文将在双边定数截尾样本下研究 Topp-Leone 分布参数的点估计和区间估计,并推导出未来观测值的后验预测密度,进而得到产品寿命的预测值和预测区间.

1 极大似然估计

设随机变量 X 服从 Topp-Leone 分布,其概率密度函数和分布函数分别为
$f(x,\theta)=2\theta(1-x)(2x-x^2)^{\theta-1}$,$F(x,\theta)=(2x-x^2)^{\theta}$,
其中 $0<x<1$,θ 为形状参数且 $\theta>0$.

现从失效时间服从 Topp-Leone 分布的产品中随机抽取 n 个进行寿命试验,观测到有 r 个产品在失效时停止试验,失效产品的寿命数据依次为 x_1、x_2、…、x_r($r\leqslant n$),假设前 $s-1$ 个数据丢失,所得到的失效数据分别为 $x_s\leqslant x_{s+1}\leqslant\cdots\leqslant x_r$($1\leqslant s\leqslant r\leqslant n$),称

收稿日期:2020-11-09
基金项目:教育部人文社科基金(18YJA880056)和荆楚理工学院科研团队课题(TD202006)资助项目.
作者简介:邓严林(1969—),男,湖北钟祥人,副教授,主要从事概率统计研究.E-mail:372165971@qq.com

这类试验为双边定数截尾试验. 记 $x^* = (x_s, x_{s+1}, \cdots, x_{r-1}, x_r)$，则可以得到似然函数为

$$L(x^* \mid \theta) = C\prod_{i=s}^{r} f(x_i)(F(x_s))^{s-1}(1-F(x_r))^{n-r} = C(2x_s - x_s^2)^{(s-1)\theta}\prod_{i=s}^{r}(2\theta(1-x_i)(2x_i - x_i^2)^{\theta-1})(1-(2x_r - x_r^2)^{\theta})^{n-r}, \tag{1}$$

其中 $C = n!/((n-r)!(s-1)!)$. 对数似然函数为

$$\ln L(x^* \mid \theta) = \ln C + (s-1)\theta\ln(2x_s - x_s^2) + \sum_{i=s}^{r}(\ln 2 + \ln\theta + \ln(1-x_i) + (\theta-1)\ln(2x_i - x_i^2)) + (n-r)\ln(1-(2x_r - x_r^2)^{\theta}).$$

从而，对数似然函数关于 θ 的导数为

$$\mathrm{d}\ln L(x^* \mid \theta)/\mathrm{d}\theta = (s-1)\ln(2x_s - x_s^2) + (r-s+1)/\theta + \sum_{i=s}^{r}\ln(2x_i - x_i^2) - (n-r)(2x_r - x_r^2)^{\theta}\cdot\ln(2x_r - x_r^2)/(1-(2x_r - x_r^2)^{\theta}).$$

令 $\mathrm{d}\ln L(x^* \mid \theta)/\mathrm{d}\theta = 0$，得到的似然方程为

$$(s-1)\ln(2x_s - x_s^2) + (r-s+1)/\theta + \sum_{i=s}^{r}\ln(2x_i - x_i^2) - (n-r)(2x_r - x_r^2)^{\theta}\ln(2x_r - x_r^2)/(1-(2x_r - x_r^2)^{\theta}) = 0.$$

由上述方程无法得到解析解，但可以在计算机上利用迭代法或者 2 分法求出数值解，这个数值解就是参数 θ 的极大似然估计，记为 $\hat{\theta}_M$.

2　参数 θ 的 Bayes 估计

由于无信息先验分布和 Gamma 先验分布常被用于 Bayes 统计推断中，因此本部分也在这 2 类先验分布下讨论参数 θ 的 Bayes 估计问题.

2.1　在无信息先验分布下参数 θ 的 Bayes 估计

在 Bayes 统计推断中需要事先确定未知参数 θ 的先验分布，依照文献 [4] 取 θ 的先验分布为无信息先验分布，即

$$\pi_1(\theta) = 1/\theta, \theta > 0. \tag{2}$$

根据似然函数(1) 可得

$$L(x^* \mid \theta) \propto \theta^{r-s+1}\sum_{j=0}^{n-r}(-1)^j\binom{n-r}{j}\mathrm{e}^{-\theta A_j}, \tag{3}$$

其中 $\propto$ 表示两侧相差一个与 θ 无关的因子，这里

$$A_j = -((s-1)\ln(2x_s - x_s^2) + \sum_{i=s}^{r}\ln(2x_i - x_i^2) + j\ln(2x_r - x_r^2)).$$

由式(2) ~ (3) 可以得到 θ 的后验密度函数为

$$\pi_1(\theta \mid x^*) = \pi_1(\theta)L(x^* \mid \theta)/\left(\int_0^{+\infty}\pi_1(\theta)L(x^* \mid \theta)\mathrm{d}\theta\right) = B^{-1}\theta^{r-s}\sum_{j=0}^{n-r}(-1)^j\binom{n-r}{j}\mathrm{e}^{-\theta A_j}, \theta > 0, \tag{4}$$

其中 $B = \sum_{j=0}^{n-r}(-1)^j\binom{n-r}{j}\Gamma(r-s+1)/A_j^{r-s+1}$，$\Gamma(\cdot)$ 表示 Gamma 函数.

在平方损失函数下 θ 的 Bayes 估计为其后验分布的均值，因此有

$$\hat{\theta}_B = \int_0^{+\infty}\theta\pi_1(\theta \mid x^*)\mathrm{d}\theta = B^{-1}\sum_{j=0}^{n-r}(-1)^j\cdot\binom{n-r}{j}\int_0^{+\infty}\theta^{r-s+1}\mathrm{e}^{-\theta A_j}\mathrm{d}\theta = (r-s+1)\sum_{j=0}^{n-r}(-1)^j\cdot\binom{n-r}{j}A_j^{-(r-s+2)}/\left(\sum_{j=0}^{n-r}(-1)^j\binom{n-r}{j}A_j^{-(r-s+1)}\right).$$

平方损失函数是一种对称损失函数，对于过高估计和过低估计带来的损失认为是相同的. 实际上在很多情形中过高估计和过低估计带来的损失是不一样的. 下面引入一种非对称损失函数，即预防损失函数，其定义为 $L(\delta,\theta) = (\delta-\theta)^2/\delta$，这里 δ 为 θ 的一个估计.

预防损失函数在原点附近趋于 ∞，以防止被低估，从而给出保守的估计，尤其是在估计低故障率时. 当低估的后果严重时，保守估计可以减小这些损失，因此预防损失函数用来防止由低估所带来过大的损失. 其后验期望损失为

$$R(\delta) = E(L(\delta,\theta)) = E(\theta^2 \mid x^*)/\delta - 2E(\theta \mid x^*) + \delta,$$

使后验期望损失达到最小的 δ 即为 θ 的 Bayes 估计. 经过计算可以得到在预防损失函数下 θ 的 Bayes 估计为 $\hat{\theta}_P = (E(\theta^2 \mid x^*))^{1/2}$.

根据后验密度函数(4) 可得

$$E(\theta^2 \mid x^*) = B^{-1}\sum_{j=0}^{n-r}(-1)^j\binom{n-r}{j}\cdot\int_0^{+\infty}\theta^{r-s+2}\mathrm{e}^{-\theta A_j}\mathrm{d}\theta = (r-s+2)(r-s+1)\sum_{j=0}^{n-r}(-1)^j\cdot\binom{n-r}{j}A_j^{-(r-s+3)}/\left(\sum_{j=0}^{n-r}(-1)^j\binom{n-r}{j}A_j^{-(r-s+1)}\right),$$

因此在预防损失函数下 θ 的 Bayes 估计为

$$\hat{\theta}_P = \left((r-s+2)(r-s+1)\sum_{j=0}^{n-r}(-1)^j\cdot\binom{n-r}{j}A_j^{-(r-s+3)}/\left(\sum_{j=0}^{n-r}(-1)^j\binom{n-r}{j}A_j^{-(r-s+1)}\right)\right)^{1/2}.$$

2.2 在 Gamma 先验分布下参数 θ 的 Bayes 估计

根据在文献[4]中的讨论,再取 θ 的先验分布为 Gamma 分布,其概率密度函数为

$$\pi_2(\theta)=b^a\theta^{a-1}\mathrm{e}^{-b\theta}/\Gamma(a),\theta>0, \tag{5}$$

这里超参数 $a>0$、$b>0$,$\Gamma(\cdot)$ 表示 Gamma 函数.

由式(3)和式(5)可得 θ 的后验密度函数为

$$\pi_2(\theta\mid x^*)=\pi_2(\theta)L(x^*\mid\theta)/\left(\int_0^{+\infty}\pi_2(\theta)L(x^*\mid\theta)\mathrm{d}\theta\right)=D^{-1}\theta^{r-s+a}\sum_{j=0}^{n-r}(-1)^j\binom{n-r}{j}\mathrm{e}^{-\theta(A_j+b)}, \tag{6}$$

其中 $\theta>0$,

$$D=\sum_{j=0}^{n-r}(-1)^j\binom{n-r}{j}\Gamma(r-s+a+1)/(A_j+b)^{r-s+a+1}.$$

在平方损失函数下 θ 的 Bayes 估计为

$$\tilde{\theta}_B=\int_0^{+\infty}\theta\pi_2(\theta\mid x^*)\mathrm{d}\theta=D^{-1}\sum_{j=0}^{n-r}(-1)^j\cdot\binom{n-r}{j}\int_0^{+\infty}\theta^{r-s+a+1}\mathrm{e}^{-\theta(A_j+b)}\mathrm{d}\theta=(r-s+a+1)\cdot\sum_{j=0}^{n-r}(-1)^j\binom{n-r}{j}(A_j+b)^{-(r-s+a+2)}/\left(\sum_{j=0}^{n-r}(-1)^j\cdot\binom{n-r}{j}(A_j+b)^{-(r-s+a+1)}\right).$$

根据后验密度函数(6)可得

$$E(\theta^2\mid x^*)=D^{-1}\sum_{j=0}^{n-r}(-1)^j\binom{n-r}{j}\cdot\int_0^{+\infty}\theta^{r-s+a+2}\mathrm{e}^{-\theta(A_j+b)}\mathrm{d}\theta=(r-s+a+2)(r-s+a+1)\sum_{j=0}^{n-r}(-1)^j\binom{n-r}{j}(A_j+b)^{-(r-s+a+3)}/\left(\sum_{j=0}^{n-r}(-1)^j\cdot\binom{n-r}{j}(A_j+b)^{-(r-s+a+1)}\right).$$

因此,当 θ 的先验分布为 Gamma 分布时,在预防损失函数下 θ 的 Bayes 估计为

$$\tilde{\theta}_P=\left((r-s+a+2)(r-s+a+1)\sum_{j=0}^{n-r}(-1)^j\cdot\binom{n-r}{j}(A_j+b)^{-(r-s+a+3)}/\left(\sum_{j=0}^{n-r}(-1)^j\binom{n-r}{j}(A_j+b)^{-(r-s+a+1)}\right)\right)^{1/2}.$$

3 参数 θ 的 Bayes 可信区间

在满足给定水平的条件下,要求可信区间的长度最短,这需要把具有最大后验密度的点都包括在区间内,而在区间外的点的后验密度函数值不超过在区间内的点的后验密度函数值,这样的区间就是最大后验密度可信区间(HPD).

对于后验密度函数(4),θ 的可信水平为 $1-\alpha$ 的最大后验密度可信区间 (θ_L,θ_U) 由方程组

$$\int_{\theta_L}^{\theta_U}\pi_1(\theta\mid x^*)\mathrm{d}\theta=1-\alpha,\pi_1(\theta_L\mid x^*)=\pi_1(\theta_U\mid x^*)$$

确定.

当后验密度函数不对称时,寻求 HPD 并不容易,在实际中经常采用等尾可信区间. 根据后验密度函数(4),θ 的可信水平为 $1-\alpha$ 的等尾可信区间 (c_1,c_2) 由方程 $\int_0^{c_1}\pi_1(\theta\mid x^*)\mathrm{d}\theta=\int_{c_2}^{+\infty}\pi_1(\theta\mid x^*)\mathrm{d}\theta=\alpha/2$ 确定. 同理,根据后验密度函数(6),θ 的可信水平为 $1-\alpha$ 的等尾可信区间 (d_1,d_2) 由方程

$$\int_0^{d_1}\pi_2(\theta\mid x^*)\mathrm{d}\theta=\int_{d_2}^{+\infty}\pi_1(\theta\mid x^*)\mathrm{d}\theta=\alpha/2$$

确定.

4 Bayes 预测

根据已有观测值 $x^*=(x_s,x_{s+1},\cdots,x_{r-1},x_r)$ 及后验密度函数(4)可以得到,第 $n+1$ 个观测值 $y=x_{n+1}$ 的后验预测密度函数为

$$g(y\mid x^*)=\int_0^{+\infty}\pi_1(\theta\mid x^*)f(y,\theta)\mathrm{d}\theta=2B^{-1}\cdot\Gamma(r-s+2)\sum_{j=0}^{n-r}(-1)^j\binom{n-r}{j}(1-y)/((2y-y^2)(A_j-\ln(2y-y^2))^{r-s+2}),0<y<1.$$

在平方损失函数下,x_{n+1} 的 Bayes 预测估计值为

$$\hat{y}_1=E(y\mid x^*)=\int_0^1 yg(y\mid x^*)\mathrm{d}y=2B^{-1}\cdot\Gamma(r-s+2)\sum_{j=0}^{n-r}(-1)^j\binom{n-r}{j}\int_0^1(1-y)/((2-y)(A_j-\ln(2y-y^2))^{r-s+2})\mathrm{d}y. \tag{7}$$

在预防损失函数下,x_{n+1} 的 Bayes 预测估计值为

$$\hat{y}_2=(E(y^2\mid x^*))^{1/2}=\left(2B^{-1}\Gamma(r-s+2)\sum_{j=0}^{n-r}(-1)^j\binom{n-r}{j}\int_0^1 y(1-y)/((2-y)(A_j-\ln(2y-y^2))^{r-s+2})\mathrm{d}y\right)^{1/2}. \tag{8}$$

根据已有观测值 $x^*=(x_s,x_{s+1},\cdots,x_{r-1},x_r)$ 及后验密度函数(6)可以得到,未来的第 $n+1$ 个观测值 $y=x_{n+1}$ 的后验预测密度函数为

$$h(y\mid x^*)=\int_0^{+\infty}\pi_2(\theta\mid x^*)f(y,\theta)\mathrm{d}\theta=2D^{-1}\Gamma(r-s+a+2)\sum_{j=0}^{n-r}(-1)^j\binom{n-r}{j}(1-y)/((2y-y^2)(A_j+$$

$b-\ln(2y-y^2))^{r-s+a+2})$，$0<y<1$.

在平方损失函数下，x_{n+1} 的 Bayes 预测估计值为

$$\tilde{y}_1=E(y\mid x^*)=\int_0^1 yh(y\mid x^*)\,\mathrm{d}y=2D^{-1}\Gamma(r-s+a+2)\sum_{j=0}^{n-r}(-1)^j\binom{n-r}{j}\int_0^1(1-y)/((2-y)\cdot(A_j+b-\ln(2y-y^2))^{r-s+a+2})\,\mathrm{d}y. \tag{9}$$

在预防损失函数下，x_{n+1} 的 Bayes 预测估计值为

$$\tilde{y}_2=(E(y^2\mid x^*))^{1/2}=(2D^{-1}\Gamma(r-s+a+2)\sum_{j=0}^{n-r}(-1)^j\binom{n-r}{j}\int_0^1 y(1-y)/((2-y)(A_j+b-\ln(2y-y^2))^{r-s+a+2})\,\mathrm{d}y)^{1/2}. \tag{10}$$

基于后验预测密度函数 $g(y\mid x^*)$ 可以得到，x_{n+1} 的可信水平为 $1-\alpha$ 的等尾预测区间(s_1,s_2) 由方程

$$\int_0^{s_1} g(y\mid x^*)\,\mathrm{d}y=\int_{s_2}^1 g(y\mid x^*)\,\mathrm{d}y=\alpha/2 \tag{11}$$

确定.

类似地，基于后验预测密度函数 $h(y\mid x^*)$ 也可以得到 x_{n+1} 的等尾预测区间.

式(7) ~ (11) 都可以用 R 软件求出数值解，从而得到了 x_{n+1} 的预测值和预测区间.

5　随机模拟

假设产品的寿命 X 服从 Topp-Leone 分布，在式(5) 中参数真值 $\theta=0.8$，超参数 $a=1$、$b=1$. 模拟过程如下:

Step 1　产生 n 个服从均匀分布 $U(0,1)$ 的相互独立随机数 t_1、t_2、…、t_n，则 $x_i=1-\sqrt{1-t_i^{1/\theta}}$ $(i=1,2,\cdots,n)$，即 x_i 为来自 Topp-Leone 分布的容量为 n 的随机数，取定 s，r 的值，则可以得到双边定数截尾样本 $x^*=(x_s,x_{s+1},\cdots,x_{r-1},x_r)$；

Step 2　取 $\alpha=0.05$，利用所得到的双边定数截尾样本计算出参数 θ 的极大似然估计、Bayes 估计、可信区间以及未来观测值的预测值和预测区间;

Step 3　以上过程重复 10 000 次，可以得到参数 θ 的点估计的均值、均方误差(MSE) 以及未来观测值的平均预测值(Mean) 和平均预测区间;

Step 4　对于不同的 n、s、r 分别重复 Step 1 ~ 3，相关模拟结果如表 1 和表 2 所示.

从表 1 可以看到: 随着样本量 n 的增加，参数估计的均方误差变小，在预防损失函数下参数 θ 的 Bayes 估计比极大似然估计的均方误差更大; 在平方损失函数下参数 θ 的 Bayes 估计比极大似然估计的均方误差更小. 当取 Gamma 先验分布时，在平方损失函数下 θ 的 Bayes 估计的均方误差是最小的.

从表 2 可以看到: 随着样本量 n 的增加，未来观测值的平均预测区间逐渐变小; 对于固定的 n，当 s 变大且 r 变小时平均预测区间的长度变大. 基于 θ 的同一个先验分布，在平方损失函数和预防损失函数下的未来观测值的平均预测值比较接近.

表 1　参数 θ 的点估计的均方误差

n	s	r	$(\hat{\theta}_M)_{\mathrm{MSE}}$	$(\hat{\theta}_B)_{\mathrm{MSE}}$	$(\hat{\theta}_P)_{\mathrm{MSE}}$	$(\tilde{\theta}_B)_{\mathrm{MSE}}$	$(\tilde{\theta}_P)_{\mathrm{MSE}}$
20	3	18	0.046 7	0.045 8	0.051 1	0.042 5	0.063 3
	4	17	0.053 5	0.052 7	0.058 6	0.048 3	0.072 9
	5	16	0.057 4	0.056 3	0.063 4	0.051 7	0.079 9
30	3	28	0.024 7	0.023 9	0.026 8	0.023 8	0.032 1
	5	26	0.028 0	0.027 5	0.030 2	0.026 7	0.036 4
	7	24	0.034 6	0.034 2	0.037 5	0.032 7	0.045 4
40	4	38	0.017 6	0.016 8	0.018 6	0.017 1	0.021 4
	6	36	0.018 8	0.018 1	0.019 7	0.018 1	0.022 5
	8	34	0.024 1	0.023 6	0.025 2	0.023 1	0.028 6

表 2　θ 的可信区间、未来观测值的平均预测值和平均预测区间

n	s	r	(c_1,c_2)	(d_1,d_2)	$(\hat{y}_1)_{\mathrm{Mean}}$	$(\hat{y}_2)_{\mathrm{Mean}}$	$(\tilde{y}_1)_{\mathrm{Mean}}$	$(\tilde{y}_2)_{\mathrm{Mean}}$
20	3	18	(0.507 2,1.294 1)	(0.519 4,1.291 5)	0.287 6	0.372 1	0.289 6	0.373 7
	4	17	(0.491 5,1.289 1)	(0.504 5,1.287 6)	0.286 8	0.371 6	0.289 1	0.373 3
	5	16	(0.472 4,1.277 8)	(0.486 7,1.276 2)	0.279 5	0.365 7	0.282 2	0.367 8
30	3	28	(0.567 3,1.197 6)	(0.574 7,1.197 1)	0.301 7	0.383 4	0.302 7	0.384 1
	5	26	(0.566 5,1.230 8)	(0.574 3,1.229 7)	0.304 4	0.385 6	0.305 4	0.386 4
	7	24	(0.571 0,1.280 6)	(0.579 1,1.278 2)	0.308 9	0.389 4	0.309 9	0.390 1

表 2(续)

n	s	r	(c_1,c_2)	(d_1,d_2)	$(\hat{y}_1)_{\text{Mean}}$	$(\hat{y}_2)_{\text{Mean}}$	$(\tilde{y}_1)_{\text{Mean}}$	$(\tilde{y}_2)_{\text{Mean}}$
	4	38	(0.653 8,1.251 1)	(0.658 4,1.248 5)	0.317 6	0.396 1	0.318 0	0.396 4
40	6	36	(0.634 8,1.237 5)	(0.640 4,1.235 5)	0.314 1	0.393 3	0.314 6	0.393 7
	8	34	(0.652 2,1.296 8)	(0.657 2,1.293 2)	0.321 0	0.399 0	0.321 4	0.399 3

例1 根据文献[4]可以认为下面的23个观测数据来自 Topp-Leone 分布，具体如下:0.853,0.759,0.866,0.809,0.717,0.544,0.492,0.403,0.344,0.213,0.116,0.116,0.092,0.070,0.059,0.048,0.036,0.029,0.021,0.014,0.011,0.008,0.006.

利用全样本计算得到形状参数 θ 的极大似然估计值为 0.594 3. 若取不同的 s 和 r 则可以得到多个双边定数截尾样本，利用这些样本可以得出形状参数 θ 的极大似然估计和 Bayes 估计($a=1,b=0.8$)，计算结果如表 3 所示;另外 θ 的可信区间以及未来观测值的预测值和预测区间的计算结果如表 4 所示($\alpha=0.05$).

表 3 形状参数 θ 的点估计

s	r	$\hat{\theta}_M$	$\hat{\theta}_B$	$\hat{\theta}_P$	$\tilde{\theta}_B$	$\tilde{\theta}_P$
2	22	0.572 7	0.572 5	0.585 6	0.586 5	0.599 0
3	21	0.555 8	0.552 4	0.568 7	0.570 4	0.583 4
4	20	0.539 8	0.539 4	0.552 8	0.554 7	0.567 6
5	19	0.535 9	0.536 2	0.550 2	0.551 7	0.565 4
6	18	0.531 6	0.531 9	0.545 9	0.547 6	0.562 1

表 4 θ 的可信区间、未来观测值的预测值和预测区间

s	r	(c_1,c_2)	(d_1,d_2)	$\hat{y}_1$	$\hat{y}_2$	$\tilde{y}_1$	$\tilde{y}_2$	(s_1,s_2)
2	22	(0.358 9,0.836 0)	(0.372 1,0.847 4)	0.233 5	0.326 7	0.237 4	0.330 1	(0.000 5,0.789 5)
3	21	(0.344 5,0.817 6)	(0.358 1,0.832 4)	0.228 7	0.322 6	0.232 8	0.326 1	(0.000 4,0.789 1)
4	20	(0.330 2,0.801 2)	(0.343 4,0.816 1)	0.224 1	0.318 7	0.228 4	0.322 3	(0.000 3,0.785 2)
5	19	(0.322 8,0.803 1)	(0.337 1,0.818 1)	0.222 8	0.317 7	0.227 4	0.321 6	(0.000 3,0.785 0)
6	18	(0.315 2,0.803 5)	(0.330 4,0.821 0)	0.221 5	0.316 5	0.226 4	0.320 7	(0.000 2,0.785 1)

6 结论

经典极大似然方法和 Bayes 方法是 2 种常见的统计分析方法，本文分别用这 2 种方法对 Topp-Leone 分布的未知参数以及未来观测值进行估计和预测，得到了一些重要的结论. 本文虽然只研究了在 2 种先验分布和 2 种损失函数下的 Bayes 估计问题，但是在双边定数截尾样本下可以继续讨论当取其他先验分布和损失函数时 Topp-Leone 分布的 Bayes 统计推断问题. 另外还可以在其他截尾数据下讨论 Topp-Leone 分布的统计性质.

7 参考文献

[1] Topp C W, Leone F C. A family of J-shaped frequency functions [J]. Journal of the American Statistical Association, 1955, 50(269): 209-219.

[2] El-Sayed M A, Abd-Elmougod G A, Abdel-Rahman E O. Estimation for coefficient of variation of Topp-Leone distribution under adaptive Type-II progressive censoring scheme: Bayesian and non-Bayesian approaches [J]. Journal of Computational and Theoretical Nanoscience, 2015, 12(11): 4028-4035.

[3] Al-Zahrani B, Alshomrani A A. Inference on stress-strength reliability from Topp-Leone distributions [J]. Journal of King Abdulaziz University-Science, 2012, 24(1): 73-88.

[4] Arora S, Mahajan K K, Kumari R. Bayes estimators for the reliability and hazard rate functions of Topp-Leone distribution using Type-II censored data [J]. Communications in Statistics: Simulation and Computation, doi: 10.1080/03610918.2019.1602646.

[5] MirMostafaee S M T K. On the moments of order statistics coming from the Topp-Leone distribution [J]. Statistics and Probability Letters, 2014, 95(6): 85-91.

[6] Feroze N, Aslam M. On Bayesian analysis of failure rate under Topp Leone distribution using complete and censored samples [J]. International Journal of Mathematical, Computational, Physical, Electrical and Computer Engineering, 2013, 7(3): 426-432.

[7] MirMostafaee S M T K, Mahdizadeh M, Aminzadeh M, et

al. Bayesian inference for the Topp-Leone distribution based on lower k-record values [J]. Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics,2016,33(3):637-669.

[8] 田霆. 双边定数截尾下 Weibull 分布联合置信区间探讨 [J]. 电子产品可靠性与环境试验,2020,38(1):40-42.

[9] 郭红莹,吴黎军. 双边定数截尾下 Burr 分布参数的 Bayes 估计 [J]. 黑龙江大学自然科学学报,2015,32(6):735-739.

[10] 李艳玲. 双边定数截尾场合双参数指数分布的贝叶斯预测 [J]. 统计与决策,2014(11):68-70.

[11] 杨君慧,师义民,鄢伟安. 双边定数截尾试验下广义指数分布的可靠性分析 [J]. 火力与指挥控制,2014,39(3):133-136,147.

[12] 田霆,刘次华,陈家清. 双边定数截尾情形下一个两参数有浴盆形状失效率的寿命分布参数的 Bayes 估计 [J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版,2012,36(5):1088-1090,1094.

[13] 侯华蕾,师义民,李豪亮. 双边定数截尾下 Pareto 分布的可靠性分析 [J]. 数理统计与管理,2009,28(5):826-830.

[14] 王伟志,袭著有,石月岩,等. 双边定数截尾下 $k(m)/n$ 系统的可靠性分析 [J]. 火力与指挥控制,2013,38(12):130-133.

[15] 周洁,贺兴时,刘俊利. 双边定数截尾场合下 Burr Ⅻ分布的 Bayes 估计 [J]. 统计与决策,2014(20):25-27.

The Bayesian Estimation and Prediction for the Topp-Leone Distribution under Type-II Doubly Censored Sample

DENG Yanlin

(School of Mathematics and Science,Jingchu University of Technology,Jingmen Hubei 448000,China)

Abstract: In this paper,the maximum likelihood estimation of the parameter in the Topp-Leone distribution is obtained under type-II doubly censored sample. Based on the non-information prior distribution and Gamma prior distribution,the Bayesian estimation of the parameter is obtained under the squared loss and precautionary loss respectively. According to the posterior density function,the Bayesian credible interval of the unknown parameter and the predictive density of future observation are obtained,and then the predictive values and predictive intervals can be obtained. The mean square errors of various estimators are calculated by means of Monte-Carlo simulation,the conclusion is that the Bayesian estimation of the parameter is optimal under the Gamma prior distribution and the squared loss function. Finally,an example of life data is used to calculate the estimation of the unknown parameter,the predictive values and predictive intervals of future observation.

Key words: Topp-Leone distribution; Type-II doubly censored sample; Bayesian estimation; Bayesian prediction

(责任编辑: 曾剑锋)