文章编号:1000-5862(2021)04-0331-04

关于图的符号团控制数

徐保根,兰　婷,张君霞,李　广

(华东交通大学理学院,江西 南昌　330013)

摘要:对于一个非空图 $G=(V,E)$ 和一个函数 $f:E\to\{-1,+1\}$,若 $S\subseteq E$,则记 $f(S)=\sum_{e\in S}f(e)$. 若对于 G 中每个非平凡的团 K 均满足 $f(E(K))\geqslant 1$,则 f 被称为 G 的一个符号团控制函数,G 的符号团控制数表达为

$$\gamma'_{scl}(G)=\min\{f(E)\mid f\text{ 为图 } G \text{ 的符号团控制函数}\}.$$

该文研究了几类联图的符号团控制数,主要确定了 $C_m\vee\overline{K}_n$、$C_m\vee nK_2$ 和 $C_m\vee C_n$ 的符号团控制数,从而推广了已有的部分结果.

关键词:图;联图;控制数;符号团控制数

中图分类号:O 157.5　　文献标志码:A　　DOI:10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2021.04.01

0　引言

本文所有图均为无向图,没有重边和环,其他没有说明的符号与术语参见文献[1-2].

图上的控制问题是图论中的重要课题,其研究内容及其应用也越来越广泛. T. W. Haynes 等[3]表达了近年来关于控制理论方面的一些最新研究成果,但这些成果主要是关于图的点控制[4-5],图的边控制方面的成果较少. 近年来随着计算机技术应用,图的标号方法和技术有了较大的改进和提高,这引出了一些新的控制问题,如 J. E. Dunbar 等[6]提出图的符号控制概念,便很快对符号控制问题产生了多种多样的变化. 除了符号控制[7]与符号全控制[8-9]之外,还有符号边控制[10-11],并由此些引入了图的符号圈控制[12-13]、符号团控制[14]、团符号控制[15]和符号路控制[2]等,这些控制概念产生使得控制理论的研究内容越来越丰富,其应用也越来越广泛.

称图 $G=(V,E)$ 的每一个极大完全子图 K 为 G 的一个团,即 G 中没有其他(除 K 外)的完全子图包含 K. 对于一个团 K,若 $K\neq K_1$,则称团 K 为非平凡的.

对于图 $G=(V,E)$,若 u、$v\in V$,则用 $u\sim v$ 表示 u 点与 v 点在 G 中邻接;若 $v\in V$,则用 $E(v)$ 表示 v 点在 G 中所关联的边集,即 $E(v)=\{uv\in E\mid u\in V\}$;若 $A\subseteq V$,$B\subseteq V$,$A\cap B=\varnothing$,则记 $E(A,B)=\{uv\in E\mid u\in A,v\in B\}$.

定义 1[1]　设 G_1 和 G_2 为任意 2 个不交的图,则 $G_1\vee G_2$ 表示其联图,即在 $G_1\cup G_2$ 中将 G_1 中的每个点与 G_2 中的每个点邻接而成的图,即

$$V(G_1\vee G_2)=V(G_1)\cup V(G_2),$$

$$E(G_1\vee G_2)=E(G_1)\cup E(G_2)\cup\{uv:u\in V(G_1),v\in V(G_2)\}.$$

图的符号控制具有多种形式,文献[2]研究了图的符号团控制问题.

定义 2[2]　设 $G=(V,E)$ 是一个非空图,一个双值函数 $f:E\to\{-1,+1\}$ 被称为图 G 的一个符号团控制函数,若对于 G 中每个非平凡的团 K 均有 $f(E(K))\geqslant 1$ 成立. 图 G 的符号团控制数定义为 $\gamma'_{scl}(G)=\min\{f(E)\mid f$ 为图 G 的符号团控制函数$\}$.

对于空图 $\overline{K}_n$,定义 $\gamma'_{scl}(\overline{K}_n)=0$,并且 $\gamma'_{scl}(G\cup H)=\gamma'_{scl}(G)+\gamma'_{scl}(H)$ 对于任何 2 个不交的图 G 和 H 成立,并称满足 $\gamma'_{scl}(G)=f(E(G))$ 的符号团控制函数 f 为图 G 的一个最小符号团控制函数.

收稿日期:2021-06-28

基金项目:国家自然科学基金(11961026,11861032)和江西省自然科学基金(20171BAB201009,20181BAB201002)资助项目.

作者简介:徐保根(1963—),男,江西南昌人,教授,主要从事图论及应用研究. E-mail:xbg13879123773@126.com

由上述定义不难得出下面的引理 1.

引理 1[2] 对任何图 $\gamma'_{scl}(G) \equiv |E(G)| \pmod 2$;对任何无三角形图 G 均有 $\gamma'_{scl}(G) = |E(G)|$.

一般地说,确定一个图 G 的符号团控制数 $\gamma'_{scl}(G)$ 是非常困难的,文献[2]给出了一般图的符号团控制数的界限,并提出了一些问题和猜想.对于特殊图,由引理 1 知 $\gamma'_{scl} = |E(G)|$ 对任何 2 部图 G 和圈 $G = C_n(n \geqslant 4)$ 均成立.文献[2]还确定了完全图、完全 3 部图和轮图的符号团控制数.

引理 2[2] 对于任何 $n+1$ 阶轮图 $W_{n+1} = C_n \vee K_1(n \geqslant 4)$ 均有 $\gamma'_{scl}(W_{n+1}) = 0$.

文献[14]研究了完全图 K_n 与圈 C_m 的联图的符号团控制数,确定了其确切值.

引理 3[14] 设 $n \geqslant 3$ 和 $m \geqslant 3$ 均为整数,则

$$\gamma'_{scl}(K_n \vee C_m) = \begin{cases} 2(6-n)\lceil m/2\rceil - (n+1)m + \\ n(n-1)/2, n = 3,4,5, \\ -(n+1)m + 2n + 2 + \\ ((-1)^{\lfloor n/2 \rfloor + 1} + 1)/2, n \geqslant 6. \end{cases}$$

特殊地,当 $n = 3$ 时,则有

引理 4[14] 设 $m \geqslant 3$ 为整数,有 $\gamma'_{scl}(C_m \vee C_3) = 6\lceil m/2\rceil - 4m + 3$.

本文主要考虑 2 个低度正则图的联图符号团控制数(无三角形的图除外),分别确定了圈 C_m 与 $\overline{K}_n$、C_m 与 nK_2(n 个 K_2 的并)、C_m 与 C_n 联图的符号团控制数.

1 主要结果及其证明

定理 1 设 $m \geqslant 3$ 和 $n \geqslant 2$ 均为整数,则

$$\gamma'_{scl}(C_m \vee \overline{K}_n) = \begin{cases} 3 - n, & m = 3, \\ m, & m \geqslant 4 \text{ 且为偶数}, \\ m + n - 2, & m \geqslant 5 \text{ 且为奇数}. \end{cases}$$

证 令 $G = C_m \vee \overline{K}_n$,$V(G) = V(C_m) \cup V(\overline{K}_n)$,其中记 $A = V(C_m) = \{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$,这里 $E(C_m) = \{u_i u_{i+1} \mid 1 \leqslant i \leqslant m-1\} \cup \{u_m u_1\}$,并且 $B = V(\overline{K}_n) = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$.

情况 1 当 $m = 3$ 时,设 f 为图 $G = C_3 \vee \overline{K}_n$ 的一个最小符号团控制函数,即 $\gamma'_{scl}(G) = f(E(G))$.此时图 G 共有 n 个团 $K^{(i)} = K_4(i = 1,2,\cdots,n)$,这有 n 个团具有一个公共三角形 K_3.对于每一个团 $K^{(i)}$,由定义 2 知 $f(E(K^{(i)})) \geqslant 1$,但由于 $|E(K^{(i)})| = |E(K_4)| = 6$ 为偶数,故 $f(E(K^{(i)})) \geqslant 2$,从而 $\sum_{i=1}^{n} f(E(K^{(i)})) \geqslant 2n$,即

$$nf(E(C_3)) + f(E(A,B)) \geqslant 2n. \quad (1)$$

对于每一个点 $v_i \in B$,v_i 点在 G 中所关联的边集 $E(v_i)$ 均有 $f(E(v_i)) \geqslant -1$(否则有 $f(E(v_i)) = -3$,从而对于 v_i 点所在的团 $K^{(i)}$,则有 $f(E(K^{(i)})) \leqslant 0$,矛盾).因此,$f(E(A,B)) = \sum_{i=1}^{n} f(E(v_i)) \geqslant -n$,结合式(1)得到

$$\gamma'_{scl}(G) = f(E(G)) = f(E(C_3)) + f(E(A,B)) \geqslant 2 + (n-1)f(E(A,B))/n \geqslant 3 - n. \quad (2)$$

另一方面,定义图 $G = C_3 \vee \overline{K}_n$ 的符号团控制函数 f:

$$f(e) = \begin{cases} -1, e = u_1 v_j (j = 1,2,\cdots,n), \\ -1, e = u_2 v_j (j = 1,2,\cdots,n), \\ +1, \text{其他}. \end{cases}$$

容易验证,f 是 G 的一个符号团控制函数,则有 $\gamma'_{scl}(G) \leqslant f(E(G)) = f(E(C_3)) + f(E(A,B)) = 3 - n$.

根据式(2)得到 $\gamma'_{scl}(G) = 3 - n$.

情况 2 当 $m \geqslant 4$ 且 m 为偶数时,设 f 为图 $G = C_m \vee \overline{K}_n$ 的一个最小符号团控制函数,即 $\gamma'_{scl}(G) = f(E(G))$.此时图 G 共有 mn 个团 $K_{j,i} = K_3(j = 1,2,\cdots,n, i = 1,2,\cdots,m)$,即每个团均为一个三角形,$K_{j,i}$ 为 u_i、u_{i+1}、v_j 这 3 个点所在的三角形($u_{m+1} = u_1$).由定义 2 知 $f(E(K_{j,i})) \geqslant 1$,故 $\sum_{i=1}^{m} f(E(K_{j,i})) \geqslant m$,$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} f(E(K_{j,i})) \geqslant mn$,在左边的和式中,$E(C_m)$ 中的每条边 e 的函数值均出现 n 次,$E(A,B)$ 中的每条边 e 的函数值均出现 2 次,即有

$$nf(E(C_m)) + 2f(E(A,B)) \geqslant mn. \quad (3)$$

对于每个点 $v_j \in B$,可见 $f(E(v_j)) \geqslant 0$(否则存在 C_m 中相邻的 2 个点 u_s 和 $u_{s+1}(1 \leqslant s \leqslant m, u_{m+1} = u_1)$,使得 $f(u_s v_j) = f(u_{s+1} v_j) = -1$,从而 $f(E(K_{j,s})) \leqslant -1$,矛盾).因此,$f(E(A,B)) = \sum_{j=1}^{n} f(E(v_j)) \geqslant 0$,注意到 $n \geqslant 2$,结合式(3)得

$$\gamma'_{scl}(G) = f(E(C_m)) + f(E(A,B)) \geqslant m + (n-2)f(E(A,B))/n \geqslant m. \quad (4)$$

另一方面,定义 $G = C_m \vee \overline{K}_n$ 的符号团控制函数 f:

$$f(e) = \begin{cases} (-1)^i, e = u_i v_j (j = 1,2,\cdots,n), \\ +1, \quad e \in E(C_m). \end{cases}$$

由于 m 为偶数,所以 f 是 G 的符号团控制函数,从而有 $\gamma'_{scl} \leqslant f(E(G)) = m$,根据式(4)得 $\gamma'_{scl}(G) = m$.

情况 3　当 $m \geq 5$ 且 m 为奇数时，设 f 为图 $G = C_m \vee \overline{K}_n$ 的一个最小符号团控制函数，即 $\gamma'_{scl}(G) = f(E(G))$. 此时 $|E(v_j)| = m$ 为奇数，故 $f(E(v_j))$ 为奇数. 同情况 2 一样，得到 $f(E(v_j)) \geq 1$，故 $f(E(A, B)) = \sum_{j=1}^{m} f(E(v_j)) \geq n$，结合式(3)得

$$\gamma'_{scl}(G) = f(E(C_m)) + f(E(A,B)) \geq m + (n-2)f(E(A,B))/n \geq m + n - 2. \quad (5)$$

另一方面，同样地定义图 $G = C_m \vee \overline{K}_n$ 的符号团控制函数 f：

$$f(e) = \begin{cases} -1, & e = u_1u_m, \\ +1, & e = u_su_{s+1}(1 \leq s \leq m-1), \\ (-1)^{i+1}, & e = u_iv_j(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n). \end{cases}$$

由于 m 为奇数，所以 f 为 G 的符号团控制函数，故有 $\gamma'_{scl}(G) \leq f(E(G)) = m + n - 2$，根据式(5)得 $\gamma'_{scl}(G) = m + n - 2$. 定理 1 得证.

定理 2　设 $m \geq 3$ 和 $n \geq 2$ 均为整数，则

$$\gamma'_{scl}(C_m \vee nK_2) = \begin{cases} 3 - n, & m = 3, \\ m + n, & m \geq 4. \end{cases}$$

证　记 $G = C_m \vee nK_2$，$A = V(C_m) = \{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$，并且 $u_i \sim u_{i+1}(1 \leq i \leq m, u_{m+1} = u_1)$，$B = V(nK_2) = \{v_1, v_2, \cdots, v_{2n-1}, v_{2n}\}$，并且 $v_{2j-1} \sim v_{2j}(1 \leq j \leq n)$，令 $E_1 = E(A,B) \cup E(nK_2)$.

情况 1　当 $m = 3$ 时，设 f 为图 G 的一个最小符号团控制函数，即 $\gamma'_{scl}(G) = f(E(G))$. 此时 G 共有 n 个团，v_{2j-1} 与 v_{2j} 在同一个团中，记之为 $K^{(j)} = K_5(j = 1, 2, \cdots, n)$，由定义 2 知 $f(E(K^{(j)})) \geq 1$，因 $|E(K_5)| = 10$ 为偶数，故 $f(E(K^{(j)})) \geq 2$，从而 $\sum_{j=1}^{n} f(E(K^{(j)})) \geq 2n$，左边和式 $E(C_3)$ 中的每条边 e 的函数值 $f(e)$ 均出现 n 次，其他边的函数值出现 1 次，即有

$$nf(E(C_3)) + f(E_1) \geq 2n. \quad (6)$$

对每个 $j = 1, 2, \cdots, n$，$e_j = v_{2j-1}v_{2j}$ 所在的团 $K^{(j)} = K_5$ 共有 10 条边，在 f 下至多有 4 条边的值为 -1，故在与 v_{2j-1} 或 v_{2j} 相关联的边(共 7 条边)中至少有 3 条边的值为 $+1$，即 $f(E(K^{(j)}) \backslash E(C_3)) \geq -1$，故 $f(E_1) = \sum_{j=1}^{n} f(E(K^{(j)}) \backslash E(C_3)) \geq -n$，结合式(6)得

$$\gamma'_{scl}(G) = f(E(C_3)) + f(E_1) \geq 2 + (n-1)f(E_1)/n \geq 3 - n. \quad (7)$$

另一方面，定义图 $G = C_m \vee nK_2$ 的符号团控制函数 f：

$$f(e) = \begin{cases} -1, e = u_iv_j(i = 1, 2, 1 \leq j \leq 2n), \\ +1, \text{其他}. \end{cases}$$

容易验证，f 为图 G 的符号团控制函数，故有 $\gamma'_{scl}(G) \leq f(E(G)) = 3 - n$. 根据式(7)得 $\gamma'_{scl}(G) = 3 - n$.

情况 2　当 $m \geq 4$ 时，设 f 为图 G 的一个最小符号团控制函数，即 $\gamma'_{scl}(G) = f(E(G))$. 此时 G 共有 mn 个团，2 条边 $u_iu_{i+1}(u_{m+1} = u_1)$ 和 $v_{2j-1}v_{2j}$ 所在的同一个团为 $K_{j,i} = K_4(1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq m)$，由定义 2 知 $f(E(K_{j,i})) \geq 1$，注意到 $|E(K_4)| = 6$ 为偶数，故 $f(E(K_{j,i})) \geq 2$，$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(E(K_{j,i})) \geq 2mn$，在左边和式中，$C_m$ 中每条边 e 的值 $f(e)$ 均重复出现 n 次，nK_2 中每条边 e 的值 $f(e)$ 均重复出现 m 次，$E(A, B)$ 中每条边 e 的值 $f(e)$ 均重复出现 2 次，故

$$nf(E(C_m)) + mf(E(nK_2)) + 2f(E(A,B)) \geq 2mn. \quad (8)$$

由于 $f(E(C_m)) \leq m$，$f(E(nK_2)) \leq n$，由式(8)得 $f(E(A,B)) \geq 0$.

(a) 当 $m \geq n$ 时，注意到 $n \geq 2$，由式(8)得

$$f(E(C_m)) + f(E(nK_2)) + f(E(A,B)) \geq 2m + (n-m)f(E(nK_2))/n + (n-2)f(E(A,B))/n \geq 2m + n - m = m + n.$$

(b) 当 $m \leq n$ 时，注意到 $n \geq 2$，$m \geq 4$，由式(8)得

$$f(E(C_m)) + f(E(nK_2)) + f(E(A,B)) \geq (m-n)f(E(C_m))/m + 2n + (m-2)f(E(A,B))/m \geq m - n + 2n = m + n.$$

因此，

$$\gamma'_{scl}(G) = f(E(G)) \geq m + n. \quad (9)$$

另一方面，定义 $G = C_m \vee nK_2$ 的符号团控制函数 f：

$$f(e) = \begin{cases} +1, & e \in E(C_m) \cup E(nK_2), \\ (-1)^s, & e = u_iv_s(1 \leq i \leq m, 1 \leq s \leq 2n). \end{cases}$$

可见 f 为图 G 的符号团控制函数，从而有 $\gamma'_{scl}(G) \leq f(E(G)) = m + n$. 根据式(9)得 $\gamma'_{scl}(G) = m + n$. 定理 2 得证.

考虑联图 $C_m \vee C_n$，当 $m = 3$ 或者 $n = 3$ 时，由引理 4 知其符号团控制数，下面考虑 $m \geq 4$ 且 $n \geq 4$ 的一般情况.

定理 3　设 $m \geq 4$ 和 $n \geq 4$ 均为整数，则有

$$\gamma'_{scl}(C_m \vee C_n) = \begin{cases} m + n + 1, & m \text{ 和 } n \text{ 均为奇数}, \\ m + n, & \text{其他}. \end{cases}$$

证　记 $G = C_m \vee C_n$，$A = V(C_m) = \{u_1,$

$u_2,\cdots,u_m\}$,$B=V(C_n)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$,其中 $u_i\sim u_{i+1}(1\leqslant i\leqslant m,u_{m+1}=u_1)$,并且 $v_j\sim v_{j+1}(1\leqslant j\leqslant n,v_{n+1}=v_1)$.

设 f 为图 G 的一个最小符号团控制函数,即 $\gamma'_{scl}(G)=f(E(G))$.

对于每条边 $e_i=u_iu_{i+1}\in E(C_m)$ 和 $e_j'=v_jv_{j+1}\in E(C_n)$,包含 e_i 和 e_j 的唯一的团记为 $K_{j,i}$,显然 $K_{j,i}=K_4(j=1,2,\cdots,n,i=1,2,\cdots,m)$,由定义 2 知 $f(E(K_{j,i}))\geqslant 1$,由 $|E(K_4)|=6$ 为偶数,故 $f(E(K_{j,i}))$ 为偶数,即 $f(E(K_{j,i}))\geqslant 2$,从而有 $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}f(E(K_{j,i}))\geqslant 2mn$,在左边和式中,$C_m$ 中每条边 e 的值 $f(e)$ 均重复出现 n 次,C_n 中每条边 e' 的值 $f(e')$ 均重复出现 m 次,$E(A,B)$ 中每条边 e 的值 $f(e)$ 均重复出现 4 次,故

$$nf(E(C_m))+mf(E(C_n))+4f(E(A,B))\geqslant 2mn. \quad (10)$$

不失一般性设 $m\geqslant n$,注意到 $m\geqslant 4,n\geqslant 4$,显然有 $f(E(C_m))\leqslant m$,$f(E(C_n))\leqslant n$,由式(10)可知 $f(E(A,B))\geqslant 0$,并根据式(10)得

$$f(E(G))=f(E(C_m))+f(E(C_n))+f(E(A,B))\geqslant 2m+(n-m)f(E(C_n))/n+(n-4)f(E(A,B))/n\geqslant 2m+n-m+0=m+n.$$

因此,$\gamma'_{scl}(G)=f(E(G))\geqslant m+n$. 由于当 m 和 n 均为奇数时,$|E(G)|=mn+m+n$ 为奇数,但 $m+n$ 为偶数,由引理 1 知,当 m 和 n 均为奇数时,$\gamma'_{scl}(G)\geqslant m+n+1$,即

$$\gamma'_{scl}(G)\geqslant\begin{cases}m+n+1, & m\text{ 和 }n\text{ 均为奇数},\\ m+n, & \text{其他}.\end{cases} \quad (11)$$

另一方面,定义 $G=C_m\vee C_n$ 的符号团控制函数 f:

$$f(e)=\begin{cases}+1, & e\in E(C_m)\cup E(C_n),\\ (-1)^{i+j}, & e=u_iv_j(1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant s\leqslant n).\end{cases}$$

容易验证:f 为 G 的符号团控制函数,并且当 m 或者 n 为偶数时,$f(E(A,B))=0$,当 m 和 n 均为奇数时 $f(E(A,B))=1$. 因此,

$$\gamma'_{scl}(G)\leqslant f(E(G))=\begin{cases}m+n+1, & m\text{ 和 }n\text{ 均为奇数},\\ m+n, & \text{其他}.\end{cases}$$

根据式(11)得知结论成立. 定理 3 得证.

2 结论

符号控制是在图的控制理论中的重要研究内容,也是最为活跃的研究内容,应用越来越广泛,这主要适用于离散型结构上的“局部占优”问题的数学模型. 本文研究的符号团控制是控制理论的重点内容,一般地说,确定一些特定图的符号团控制数是非常困难的. 联图作为一类重要的复合图类,有着极其重要的理论研究价值和应用价值. 本文研究了联图的符号团控制数,主要结果是确定了与圈有关的 3 类联图的符号团控制数,即获得了 $C_m\vee\overline{K}_n$、$C_m\vee nK_2$、$C_m\vee C_n$ 的符号团控制数,这推广了已有的相关结果.

3 参考文献

[1] Bondy J A,Murty U S R. Graph theory with application [M]. London,New York: Macmillan Press,1976.

[2] 徐保根. 图的控制与染色理论 [M]. 武汉: 华中科技大学出版社,2013.

[3] Haynes T W,Hedetniemi S T,Slater P J. Domination in graph [M]. New York: Marcel Dekker,1998.

[4] Cockayne E J,Hedetniemi S T. Towards a theory of domination in graphs [J]. Networks,1977,7(3): 247-261.

[5] Xu Baogen,Cockayne E J,Haynes T W,et al. Extremal graphs for inequalities involing domination parameters [J]. Discrete Math,2000,216(1/2/3): 1-10.

[6] Dunbar E J,Hedetniemi S T,Henning M A,et al. Signed domination in graphs [M] // Alavi Y,Chartrand G,Ollermann O R,et al. Graph Theory,Combinatorics and Applications. New York: John Wiley and Sons,1995: 311-322.

[7] Favaron O. Signed domination in regular graphs [J]. Discrete Mathematics,1996,158(1/2/3): 287-293.

[8] 徐保根,陈悦,孔祥阳. 图的符号边全 K 控制数 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版,2011,35(3): 316-318.

[9] Cockayne E J,Dawes R M,Hedetniemi S T. Total domination in graphs [J]. Networks,2006,10(3): 211-219.

[10] Xu Baogen. On signed edge domination numbers of graphs [J]. Discrete Mathematics,2001,239(1/2/3): 179-189.

[11] 赵金凤,徐保根. 关于图的符号边控制数的下界 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版,2010,34(1): 27-29.

[12] Xu Baogen. On signed cycle domination in graphs [J]. Discrete Mathematics,2009,309(4): 1007-1012.

[13] 徐保根,周尚超. 图与补图的符号圈控制数 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版,2006,30(3): 249-251.

[14] 敖国艳,吉日木图,赵凌琪. 图的符号团边控制数 [J]. 数学杂志,2015,35(5): 1109-1114.

[15] 徐保根. 关于图的团符号控制数 [J]. 系统科学与数学,2008,28(3): 282-287.

(下转第 338 页)

sets [J]. Transactions of the American Mathematical Society,1980,260(1):159-183.
[3] Herzog J,Hibi T,Zheng Xinxian. Cohen-Macaulay chordal graphs [J]. Journal of Combinatorial Theory: Series A, 2006,113(5):911-916.
[4] Stanley R P. Combinatorics and commutative algebra [M]. 2nd ed. Boston,Basel,Berlin: Birkhäuser,1996.
[5] Villarreal R H. Cohen-Macaulay graphs [J]. Manuscripta Mathematica,1990,66(1):277-293.
[6] Guo Jin,Shen Yihuang,Wu Tongsuo. Strong shellability of simplicial complexes [J]. Journal of the Korean Mathematical Society,2019,56(6):1613-1639.
[7] **郭锦,李海燕. 关于余一维图的实现的研究 [J]. 海南大学学报: 自然科学版**,2017,35(1):7-10.
[8] Mohammadi F,Kiani D,Yassemi S. Shellable cactus graphs [J]. Mathematica Scandinavica,2010,106(2):161-168.
[9] Baste J,Gözüpek D,Paul C,et al. Parameterized complexity of finding a spanning tree with minimum reload cost diameter [J]. Network. 2020,75(3):259-277.
[10] Nishi T,Chua L O. Topological criteria for nonlinear resistive circuits containing controlled sources to have a unique solution [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems, 1984,31(8):722-741.
[11] Arcak M. Diagonal stability on cactus graphs and application to network stability analysis [J]. IEEE Transactions on Automatic Control,2011,56(12):2766-2777.
[12] Paten B,Diekhans M,Earl D,et al. Cactus graphs for genome comparisons [J]. Journal of Computational Biology, 2011,18(3):469-481.
[13] Cameron K,Walker T. The graphs with maximum induced matching and maximum matching the same size [J]. Discrete Mathematics,2015,299(1/2/3):49-55.
[14] Trung T N. Regularity,matchings and Cameron-Walker graphs [J]. Collectanea Mathematica,2020,71(1):83-91.
[15] Hibi T,Higashitani A,Kimura K,et al. Algebraic study on Cameron-Walker graphs [J]. Journal of Algebra,2015, 422:257-269.
[16] Bolognini D,Macchia A,Strazzanti F. Binomial edge ideals of bipartite graphs [J]. European Journal of Combinatorics,2018,70:1-25.

The Study on the Realization of Codimension One Graph of Some Graphs by Simplicial Complexes

WANG Xiaowen,GUO Jin*
(School of Science,Hainan University,Haikou Hainan 570228,China)

Abstract: The problem about the realizations of codimension one graph of simple graphs is studied. It is proved that all cactus graphs are realizable. A detailed realization is shown for the star triangle graph,which is a kind of cactus graph.

Key words: cactus graph; star triangle; simplicial complex; codimension one graph **(责任编辑: 曾剑锋)**

(上接第 334 页)

On Signed Clique Domination Numbers of Graphs

XU Baogen,LAN Ting,ZHANG Junxia,LI Guang
(Department of Mathematics,East China Jiaotong University,Nanchang Jiangxi 330013,China)

Abstract: For a nonempty graph $G=(V,E)$ and a function $f: E\to\{-1,+1\}$, if $S\subseteq E$ then write $f(S)=\sum_{e\in S}f(e)$, a function f is said to be a signed clique dominating function (SCDF) of the graph G if $f(E(K))\geqslant 1$ holds for every nontrivial clique K in G, and the signed clique domination number of G is defined as $\gamma_{scl}'(G)=\min\{f(E)\mid f$ is SCDF of $G\}$. In this paper, the signed clique domination numbers of some join graph are studied, and the signed clique domination numbers of graphs $C_m\vee\overline{K}_n$, $C_m\vee nK_2$ and $C_m\vee C_n$ are mainly determined, which generalize partially some known results.

Key words: Graph; join graph; domination number; signed clique domination number **(责任编辑: 曾剑锋)**