

文章编号: 1000-5862(2021)03-0335-04

关于若干图类的复形余 1 维图实现问题研究

王小雯 郭 锦*

(海南大学理学院 海南 海口 570228)

摘要: 该文对若干类图的复形余 1 维图实现的问题展开研究,证明了仙人掌图是可实现的,并给出了星三角形图(仙人掌图中小类)的一种实现方式.

关键词: 仙人掌图; 星三角形; 复形; 余 1 维图

中图分类号: O 157.5 文献标志码: A DOI: 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2021.04.02

0 引言

在 Stanley-Reisner 对应之下,关于单项式理想的 Cohen-Macaulay (简称为 CM) 等代数性质的研究,可以很自然地转化到单纯复形(简称为复形)、简单图上展开,这也逐渐发展成为组合交换代数的一个重要研究课题^[1-5].

单纯复形 Δ 是 $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ 的一个满足遗传性的子集族,其中遗传性是指若 $H \subseteq F$ 且 $F \in \Delta$ 则有 $H \in \Delta$. 单纯复形简称为复形,其元素被称为面(face). 按照集合的包含关系,面中的极大者被称为极大面(facet). 极大面的全体记作 $F(\Delta)$. 若每一个极大面的元素个数都相同,则称该复形为纯复形. 本文所讨论的复形都是指纯复形.

复形上的 shellable 性质是通往 CM 的一条重要路径,而文献[6]定义并研究了一类比 shellable 更强的性质,被称为强 shellable 性质. 在极大面上可定义一个距离的概念,即 2 个极大面 F 和 G 的距离为 $d_\Delta(F, G) = |F - F \cap G|$. 给定一个复形 Δ , 与 Δ 相对应的余 1 维图 $\Gamma(\Delta)$ 是一个以 $F(\Delta)$ 为顶点集的有限简单图,其中 2 个极大面 F 和 G 在 $\Gamma(\Delta)$ 上是邻接的当且仅当 $d_\Delta(F, G) = 1$. 借助余 1 维图,郭锦等^[6]给出了纯强 shellable 复形的一个纯图论等价刻画,即一个复形是强 shellable 的当且仅当其余 1 维图同时满足和谐性和保距序性. 文献[7]研究了上述问题的逆问题,即对于某个给定的图,其是否可

作为一个复形的余 1 维图?若是,则称该图是可复形余 1 维图实现的,简称为可实现的.

本文着重研究了仙人掌图的实现问题. 仙人掌图在组合学中的应用广泛. 如 F. Mohammadi 等^[8]对所有的 shellable 和 Sequentially Cohen-Macaulay 的仙人掌图进行了刻画. 除此之外,仙人掌图在其他领域也有应用,一般图上的许多难题在仙人掌图中都存在有效的算法^[9]. 同时,仙人掌图也被广泛应用于现代电子电路和网络等领域^[10-12]. 而星三角形图不仅是一种仙人掌图,也是一种特殊的 Cameron-Walker 图^[13]. Cameron-Walker 图在交换代数中也扮演着重要的角色^[14]. T. Hibi 等^[15]证明了所有的 Cameron-Walker 图都是 Sequentially Cohen-Macaulay 的,并刻画了在何种条件下 Cohen-Macaulay. 本文证明了仙人掌图是可实现的,并给出了星三角形图的一种具体的实现方式.

1 图的实现与可实现的图的扩张

1.1 图的实现

定义 1 对于给定的图 G , 若一个复形的余 1 维图为 G , 则称该复形为 G 的复形余 1 维图实现,简称为 G 的一个实现. 此时,也称 G 是可实现的.

由图的实现的定义易见下述引理成立.

引理 1 设 G 为一个简单图,且定义在基础集 $[n]$ 上的 G 的一个实现为

$$\Delta = \{a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k}, \{a_{j_1} a_{j_2} \dots a_{j_k}\}, \dots,$$

收稿日期: 2020-10-28

基金项目: 国家自然科学基金(11961017),海南省自然科学基金(119MS002),海南省科协青年科技英才学术创新计划(QCXM201806)和海南省研究生创新科研课题(Hys2020-406)资助项目.

通信作者: 郭 锦(1983—),男,湖南湘潭人,副教授,博士,主要从事组合交换代数研究. E-mail: guojinecho@163.com

$\{a_{n1} \mu_{n2} \cdots \mu_{nk}\} \rangle$,

则 $\forall b_1, b_2, \cdots, b_m \notin [n]$,

$\Delta' = \langle \{a_{11} \mu_{12} \cdots \mu_{1k} b_1 b_2 \cdots b_m\}, \{a_{21} \mu_{22} \cdots \mu_{2k} b_1 b_2 \cdots b_m\}, \cdots, \{a_{n1} \mu_{n2} \cdots \mu_{nk} b_1 b_2 \cdots b_m\} \rangle$

也是图 G 的一个实现.

1.2 可实现的图的扩张

D. Bolognini 等^[16] 定义了一种图的扩张方式: 令 G_1 为一个含有一度点 u 的图, G_2 为一个含有一度点 v 的图, 将 u 与 v 重合起来, 形成一个新的图 G , 记作 $G = (G_1 \mu) * (G_2 \nu)$. 去除对 u 与 v 为一度点的要求, 可类似地给出如下定义.

定义 2 对于给定的 2 个简单图 G_1 与 G_2 , 将图 G_1 中的任一点 u 与图 G_2 中的任一点 v 重合在一起, 扩张成新的图 G , 记作 $G = (G_1 \mu) * (G_2 \nu)$, 这种扩张图的方式被称为图的黏合(见图 1). 在不强调黏合点 u, v 时, 直接将图 G_1 与 G_2 的黏合记为 $G_1 * G_2$.

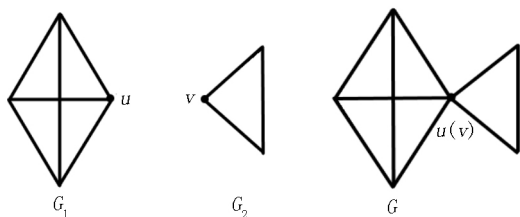


图 1 图的黏合

引理 2 在任一可实现的图黏合上树的一度点后, 所形成的图仍可实现.

证 设 G 为一个可实现的图, 图 G 的一个点 u_1 粘合上树 T 的一度点 v_1 , 得到 $(G \mu_1) * (T \nu_1)$. 设 $V(G) = \{u_1, \mu_2, \cdots, \mu_s\}$ 为 G 的顶点集, $V(T) = \{v_1, v_2, \cdots, v_t\}$ 为 T 的顶点集. 对 T 的顶点数 t 作归纳: 当 $t = 1$ 时 $(G \mu_1) * (T \nu_1) = G$ 已可实现. 假设当 $t = k$ 时 $(G \mu_1) * (T \nu_1)$ 可实现. 当 $t = k + 1$ 时, 任取树 T 中异于 v_1 的一度点, 设为 v_{k+1} , 此时由 $V(T) \setminus \{v_{k+1}\}$ 诱导的 T 的子图为含有 k 个顶点的树 $T \setminus v_{k+1}$. 根据归纳假设知 $(G \mu_1) * (T \setminus v_{k+1} \nu_1)$ 可实现. 设该实现为基础集在 $[n]$ 上的 $l-1$ 维复形, 且对应于 u_1, u_2, \cdots, u_s 的极大面分别为 A_1, A_2, \cdots, A_s , 其中 $A_i = \{a_{i1} \mu_{i2} \cdots \mu_{il}\} (1 \leq i \leq s)$, 对应于 v_1, v_2, \cdots, v_k 的极大面分别为 B_1, B_2, \cdots, B_k , 这里 $B_r = \{b_{r1} b_{r2} \cdots b_{rl}\} (2 \leq r \leq k)$; 设 $A'_i = A_i \cup \{n+1\} (1 \leq i \leq s)$, $B'_r = B_r \cup \{n+1\} (2 \leq r \leq k)$. 由引理 1 知, 复形 $\Delta = \langle A'_1 A'_2 \cdots A'_s B'_2 \cdots B'_k \rangle$ 仍是 $(G, u_1) * (T \setminus v_{k+1} \nu_1)$ 的一个实现, 此时 $A'_i = \{a_{i1}$

$a_{i2} \cdots a_{il} n+1\}$ 是对应于 u_i 的极大面 $(1 \leq i \leq s)$, $B'_r = \{b_{r1} b_{r2} \cdots b_{rl} n+1\}$ 是对应于 v_r 的极大面 $(2 \leq r \leq k)$; 设与 v_{k+1} 相邻的唯一的点 v_k , 对应于 v_k 的极大面 $B'_k = \{b_{k1} b_{k2} \cdots b_{kl} n+1\}$, 则可令 $B'_{k+1} = B_k \cup \{n+2\} = \{b_{k1} b_{k2} \cdots b_{kl} n+2\}$. 直接检验可得

$$d_{\Delta}(B'_{k+1}, B'_k) = 1,$$

$$d_{\Delta}(B'_{k+1}, B'_r) = d_{\Delta}(B_k, B'_r) + 1 > 1 (2 \leq r < k),$$

$$d_{\Delta}(A'_i, B'_{k+1}) = d_{\Delta}(A_i, B_k) + 1 > 1 (1 \leq i \leq s).$$

因此, 将 B'_{k+1} 作为顶点 v_{k+1} 所对应的极大面而形成的复形

$$\Delta' = \langle A'_1 A'_2 \cdots A'_s B'_2 \cdots B'_k B'_{k+1} \rangle$$

是 $(G \mu_1) * (T \nu_1)$ 的一个实现.

定理 1 任一可实现的图与树黏合所形成的图仍可实现.

证 设 G 为一个可实现的图, 图 G 中点 u 黏合上一棵树 T 的某个点 v , 得到 $(G \mu) * (T \nu)$. 设 v 在树 T 中的度为 n , 且设 $T \setminus \{v\}$ 的连通分支分别为 T_1, T_2, \cdots, T_n , 显然 T_1, T_2, \cdots, T_n 都是树. 设 $V(T_i)$ 为 T_i 的顶点集, 记 T'_i 为 $V(T_i) \cup \{v\}$ 诱导的 T 的子图. 易见 v 在 T'_i 中均为一度点 $(i = 1, 2, \cdots, n)$. 则 $(G, u) * (T \nu) = (G \mu) * (T'_1 \nu) * (T'_2 \nu) * \cdots * (T'_n \nu)$, 对 n 作归纳: 当 $n = 1$ 时, 由引理 2 知, $(G, u) * (T \nu)$ 可实现; 当 $n = k$ 时, 假设 $(G \mu) * (T'_1 \nu) * (T'_2 \nu) * \cdots * (T'_k \nu)$ 可实现; 当 $n = k + 1$ 时, 由于 $(G \mu) * (T'_1 \nu) * (T'_2 \nu) * \cdots * (T'_k \nu)$ 已可实现, 由引理 2 知 $(G \mu) * (T'_1 \nu) * (T'_2 \nu) * \cdots * (T'_k \nu) * (T'_{k+1} \nu)$ 可实现, 故 $(G \mu) * (T \nu)$ 可实现.

推论 1 任意一棵树都可实现.

证 设 G 为只含一个孤立点 v 的简单图, T 为一棵树. 由定理 1 知, $T = G * T$ 可实现.

2 仙人掌图

2.1 仙人掌图

定义 3^[8] 若在一个连通图 G 中的任意 2 个圈都最多只有一个交点, 或者说每条边最多只能在一个圈内, 则把这样的图 G 称为仙人掌图(cactus graph).

定理 2 任意一个仙人掌图都可实现.

证 设仙人掌图 G 中有 k 个圈, 分别为 C_1, C_2, \cdots, C_k . $V(G) = \{u_1, \mu_2, \cdots, \mu_s\}$ 为 G 的顶点集. 现对 k 作归纳:

当 $k = 0$ 时, 该图是树, 由推论 1 知 G 可实现.

当 $k = 1$ 时, 图 G 顶点为 $u_1, u_2, \cdots, u_t, \cdots, u_s$, 其

中 u_1, u_2, \dots, u_t 为 C_1 的顶点. 易见, 复形 $\langle \{1, 2, \dots, t\}, \dots, \{t-1, t\}, \{t, 1\} \rangle$ 即为 C_1 的一个实现. 结合引理 2, 在 C_1 上黏合多棵树, 对 $s-t$ 作归纳即可得证.

当 $k=r$ 时, 假设该图可以实现. 当 $k=r+1$ 时, 易见, 能在 G 中找到一个圈, 令它为 C_{r+1} , 使得 $V(G) \setminus V(C_{r+1})$ 诱导的 G 的子图 $G - C_{r+1}$ 的连通分支分别是一些树 $T_1, T_2, \dots, T_\varepsilon$ 和一棵仙人掌图 $T_{\varepsilon+1}$. 其中 $V(C_{r+1}) = \{w_1, w_2, \dots, w_j\}$ 为 C_{r+1} 的顶点集. 由定义 3 可知, $\forall i=1, 2, \dots, \varepsilon+1$, 在 C_{r+1} 中只有唯一 1 个点与 T_i 相邻, 设为 u_i . 记 T'_i 为 $V(T_i) \cup \{u_i\}$ 诱导的 G 的子图, 其中 $V(T_i)$ 为 T_i 的顶点集 ($i=1, 2, \dots, \varepsilon+1$). 易见 $T'_1, T'_2, \dots, T'_\varepsilon$ 还是树, 而 $T'_{\varepsilon+1}$ 是一棵含有 r 个圈的仙人掌图. 设 $V(T'_{\varepsilon+1}) = \{v_1, v_2, \dots, v_q, u_{\varepsilon+1}\}$. 由归纳假设可知, $T'_{\varepsilon+1}$ 可实现, 设该实现为基础集在 $[n]$ 上的 $l-1$ 维复形, 对应于 $v_1, v_2, \dots, v_q, u_{\varepsilon+1}$ 的极大面分别为 $A_1, A_2, \dots, A_q, B_{\varepsilon+1}$. 其中 $A_1 = \{a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1l}\}, A_2 = \{a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2l}\}, \dots, A_q = \{a_{q1}, a_{q2}, \dots, a_{ql}\}, B_{\varepsilon+1} = \{a_1, a_2, \dots, a_l\}$. 设 $A'_1 = A_1 \cup \{n+1, n+2\}, A'_2 = A_2 \cup \{n+1, n+2\}, \dots, A'_q = A_q \cup \{n+1, n+2\}, B'_{\varepsilon+1} = B_{\varepsilon+1} \cup \{n+1, n+2\}$. 由引理 1 知, 复形 $\Delta = \langle A'_1, A'_2, \dots, A'_q, B'_{\varepsilon+1} \rangle$ 还是 $T'_{\varepsilon+1}$ 的一个实现. 由于 $u_{\varepsilon+1} \in V(C_{r+1})$, 所以不妨设 $u_{\varepsilon+1}$ 是 w_1 , 且设 w_1, w_2, \dots, w_j 对应的极大面分别为 $B'_{\varepsilon+1}, B'_2, B'_3, \dots, B'_j$. 其中 $B'_2 = \{a_1, a_2, \dots, a_l, n+2, n+3\}, B'_3 = \{a_1, a_2, \dots, a_l, n+3, n+4\}, \dots, B'_{j-1} = \{a_1, a_2, \dots, a_l, n+j-1, n+j\}, B'_j = \{a_1, a_2, \dots, a_l, n+j, n+1\}$. 则 $\langle B'_{\varepsilon+1}, B'_2, B'_3, \dots, B'_j \rangle$ 为 C_{r+1} 的一个实现. 直接检验可得

$$d_\Delta(A'_\alpha, B'_\beta) > 1, 1 \leq \alpha \leq q, 2 \leq \beta \leq j.$$

因此, 复形 $\Delta' = \langle A'_1, A'_2, \dots, A'_q, B'_{\varepsilon+1}, B'_2, B'_3, \dots, B'_j \rangle$ 是 $T'_{\varepsilon+1} * C_{r+1}$ 的一个实现. 再由定理 1 可知, $T'_{\varepsilon+1} * C_{r+1} * T'_1 * T'_2 * \dots * T'_\varepsilon$ 可实现. 即 G 可实现.

2.2 星三角形图

定义 4^[15] 星三角形图 (star triangle) 是由共用同一个公共顶点的若干个三角形形成的简单图.

星三角形图也是一种特殊的仙人掌图, 由定理 2 可知星三角形图可实现. 现给出星三角形图的一种具体实现方式.

设星三角形图 G 一共有 k 个三角形, 且每个三角形都交于点 v . 在第 i 个三角形中, 设异于点 v 的 2 点分别为 $v_{i1}, v_{i2}, i=1, 2, \dots, k$.

设 $\Delta = \langle A, A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, \dots, A_{k1}, A_{k2} \rangle$, 其中 Δ

的极大面分别为 $A = \{1, 2, \dots, 2k-1, 2k\}, A_{11} = \{2k+1, 2, 3, \dots, 2k\}, A_{12} = \{1, 2k+1, 3, \dots, 2k\}, A_{i1} = \{1, 2, \dots, 2i-2, 2k+i, 2i, \dots, 2k\}, A_{i2} = \{1, 2, \dots, 2i-1, 2k+i, 2i+1, \dots, 2k\}, \dots, A_{k1} = \{1, 2, \dots, 2k-2, 2k+k, 2k\}, A_{k2} = \{1, 2, \dots, 2k-1, 2k+k\}$. 这里 A_{i1} 是将 A 中的 $2i-1$ 替换成 $2k+i$, A_{i2} 是将 A 中的 $2i$ 替换成 $2k+i$.

直接检验可得

$$d_\Delta(A, A_{i1}) = 1, 1 \leq i \leq k,$$

$$d_\Delta(A, A_{i2}) = 1, 1 \leq i \leq k,$$

$$d_\Delta(A_{i1}, A_{i2}) = 1, 1 \leq i \leq k,$$

$$d_\Delta(A_{i1}, A_{j1}) > 1, 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq k, i \neq j,$$

$$d_\Delta(A_{i2}, A_{j2}) > 1, 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq k, i \neq j,$$

$$d_\Delta(A_{i1}, A_{j2}) > 1, 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq k, i \neq j.$$

由此可见 Δ 是图 G 的一个实现. 其中点 $v, v_{11}, v_{12}, \dots, v_{k1}, v_{k2}$ 所对应的极大面分别为 $A, A_{11}, A_{12}, \dots, A_{k1}, A_{k2}$.

因此, 得到了一种星三角形图的具体实现方式. 如当 $k=3$ 时, 星三角形图可由图 2 来实现.

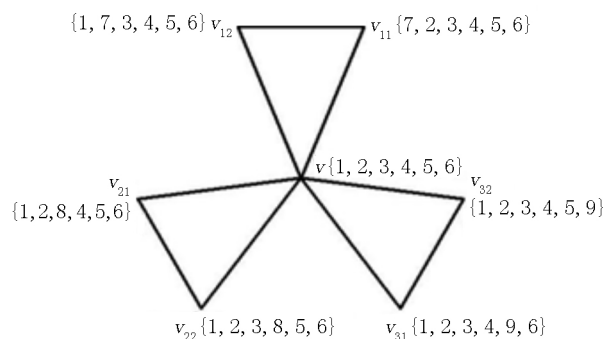


图 2 一种星三角形图的实现

3 结束语

对于纯强 shellable 复形, 可借助余 1 维图, 得到一个纯图论的等价刻画. 而对于仙人掌图, 本文证明了它们都可以作为某个单纯复形的余 1 维图. 借助余 1 维图这一工具, 可以将单纯复形上的代数组合性质与具体的图类之间建立起紧密的关联, 这也是后续可以继续开展的研究工作.

4 参考文献

- [1] Van Tuyl A, Villarreal R H. Shellable graphs and sequentially Cohen-Macaulay bipartite graphs [J]. Journal of Combinatorial Theory: Series A, 2008, 115(5): 799-814.
- [2] Björner A. Shellable and Cohen-Macaulay partially ordered

- sets [J]. Transactions of the American Mathematical Society ,1980 260(1) : 159-183.
- [3] Herzog J ,Hibi T ,Zheng Xinxian. Cohen-Macaulay chordal graphs [J]. Journal of Combinatorial Theory: Series A , 2006 ,113(5) : 911-916.
- [4] Stanley R P. Combinatorics and commutative algebra [M]. 2nd ed. Boston ,Basel ,Berlin: Birkhäuser ,1996.
- [5] Villarreal R H. Cohen-Macaulay graphs [J]. Manuscripta Mathematica ,1990 66(1) : 277-293.
- [6] Guo Jin ,Shen Yihuang ,Wu Tong suo. Strong shellability of simplicial complexes [J]. Journal of the Korean Mathematical Society 2019 56(6) : 1613-1639.
- [7] 郭锦 李海燕. 关于余一维图的实现的研究 [J]. 海南大学学报: 自然科学版 2017 35(1) : 7-10.
- [8] Mohammadi F ,Kiani D ,Yassemi S. Shellable cactus graphs [J]. Mathematica Scandinavica 2010 106(2) : 161-168.
- [9] Baste J ,Gözüpek D ,Paul C et al. Parameterized complexity of finding a spanning tree with minimum reload cost diameter [J]. Network. 2020 75(3) : 259-277.
- [10] Nishi T ,Chua L O. Topological criteria for nonlinear resistive circuits containing controlled sources to have a unique solution [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems , 1984 31(8) : 722-741.
- [11] Arcaç M. Diagonal stability on cactus graphs and application to network stability analysis [J]. IEEE Transactions on Automatic Control 2011 56(12) : 2766-2777.
- [12] Paten B ,Diekhans M ,Earl D et al. Cactus graphs for genome comparisons [J]. Journal of Computational Biology , 2011 18(3) : 469-481.
- [13] Cameron K ,Walker T. The graphs with maximum induced matching and maximum matching the same size [J]. Discrete Mathematics 2015 299(1/2/3) : 49-55.
- [14] Trung T N. Regularity ,matchings and Cameron-Walker graphs [J]. Collectanea Mathematica 2020 71(1) : 83-91.
- [15] Hibi T ,Higashitani A ,Kimura K et al. Algebraic study on Cameron-Walker graphs [J]. Journal of Algebra ,2015 , 422: 257-269.
- [16] Bolognini D ,Macchia A ,Strazzanti F. Binomial edge ideals of bipartite graphs [J]. European Journal of Combinatorics 2018 70: 1-25.

The Study on the Realization of Codimension One Graph of Some Graphs by Simplicial Complexes

WANG Xiaowen ,GUO Jin*

(School of Science ,Hainan University ,Haikou Hainan 570228 ,China)

Abstract: The problem about the realizations of codimension one graph of simple graphs is studied. It is proved that all cactus graphs are realizable. A detailed realization is shown for the star triangle graph ,which is a kind of cactus graph.

Key words: cactus graph; star triangle; simplicial complex; codimension one graph (责任编辑: 曾剑锋)

(上接第 334 页)

On Signed Clique Domination Numbers of Graphs

XU Baogen ,LAN Ting ,ZHANG Junxia ,LI Guang

(Department of Mathematics ,East China Jiaotong University ,Nanchang Jiangxi 330013 ,China)

Abstract: For a nonempty graph $G = (V, E)$ and a function $f: E \rightarrow \{-1, +1\}$ if $S \subseteq E$ then write $f(S) = \sum_{e \in S} f(e)$, a function f is said to be a signed clique dominating function (SCDF) of the graph G if $f(E(K)) \geq 1$ holds for every nontrivial clique K in G and the signed clique domination number of G is defined as $\gamma_{sc}(G) = \min\{f(E) \mid f \text{ is SCDF of } G\}$. In this paper ,the signed clique domination numbers of some join graph are studied ,and the signed clique domination numbers of graphs $C_m \vee \bar{K}_n$, $C_m \vee nK_2$ and $C_m \vee C_n$ are mainly determined ,which generalize partially some known results.

Key words: Graph; join graph; domination number; signed clique domination number (责任编辑: 曾剑锋)