文章编号:1000-5862(2021)04-0339-04

超线性扰动下的差分方程 S 渐进 ω 周期解

简伟刚[1,2],陈园园[3]
(1. 豫章师范学院数学与计算机学院,江西 南昌 330103;2. 江西师范大学数学与统计学院,江西 南昌 330022;
3. 南昌理工学院公共教学部,江西 南昌 330044)

摘要: 该文给出了 S 渐进 ω 周期函数的一个等价定义,并且研究了一类在超线性扰动下的差分方程的 S 渐进 ω 周期解的存在性. 最后,通过举例来说明定理的 3 个条件是可以实现的.

关键词: 差分方程;S 渐进 ω 周期函数;超线性扰动;依点收敛
中图分类号: O 175.7 **文献标志码:** A **DOI:** 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2021.04.03

0 引言

K. Cooke 等[1] 研究了时滞积分方程

$$x(t) = \int_{t-\tau}^{t} f(s, x(s))\,\mathrm{d}s, t \in \mathbf{R}$$

的概周期型解的情况,这是一种传染病问题的数学模型. 自此以后,越来越多的学者关注此类方程的概周期型解的存在性问题[2-8].

H. R. Henriquez 等[9] 提出了 S 渐进 ω 周期函数的概念,这引起了很多学者的关注. 如 2016 年 Zhao Jingyun 等[10] 就研究了在超线性扰动下的时滞积分方程

$$x(t) = \alpha(t)x^n(t-\beta) + \int_{t-\tau}^{t} f(s, x(s))\,\mathrm{d}s, t \in \mathbf{R}$$

的 S 渐进 ω 周期解的存在性.

在这些工作的基础上,本文给出了在离散情况下的 S 渐进 ω 周期函数的一个等价定义,并建立了在超线性扰动下的一类差分方程

$$x(n) = \alpha(n)x^a(n-b) + \sum_{k=n-\tau(n)}^{n} f(k, x(k)) \quad (1)$$

有 S 渐进 ω 周期解的存在性定理,其中 $\alpha: \mathbf{Z} \to \mathbf{R}^+$, $a, b \in \mathbf{Z}$ 且 $a \geqslant 1$, $\tau: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ 和 $f: \mathbf{Z} \times \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$. 特别地,当 $a \geqslant 2$ 时,称 $(Ax)(n) = \alpha(n)x^a(n-b)$ 为超线性扰动算子.

1 基本定义和定理

本文用 $\mathbf{R}(\mathbf{R}^+)$ 表示实数集(非负实数集),$\mathbf{Z}(\mathbf{Z}^+)$ 表示整数集(非负整数集). 用 $C(\mathbf{Z},\mathbf{R})$ 表示从 $\mathbf{Z}$ 到 $\mathbf{R}$ 的所有有界函数组成的集合,在 $C(\mathbf{Z},\mathbf{R})$ 上的范数为上确界范数. 设 $f \in C(\mathbf{Z},\mathbf{R})$,记 $R_k f = f(\cdot + k)$,称 $R_k f$ 是 f 的位移函数,其中 $k \in \mathbf{Z}$.

为方便起见,规定在本文中出现的整数序列 $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ 都具有性质:当 $i \to +\infty$ 时,$n_i \to +\infty$. 用 ω 表示某一个固定的正整数,记

$C_\omega(\mathbf{Z}) = \{f \in C(\mathbf{Z},\mathbf{R}): f$ 是以 ω 为周期的函数$\}$.

定义 1 函数 $f \in C(\mathbf{Z},\mathbf{R})$ 被称为是 S 渐进 ω 周期的,若满足

$$\lim_{n\to+\infty} |f(n+\omega) - f(n)| = 0.$$

用 $S_\omega(\mathbf{Z})$ 来表示所有这样的函数组成的集合.

由 $f \in S_\omega(\mathbf{Z})$ 的定义易见,$R_k f \in S_\omega(\mathbf{Z})$ 也成立.

定理 1 设 $\{f_i\}$ 是 S 渐进 ω 周期函数序列,且在 $C(\mathbf{Z},\mathbf{R})$ 中收敛于 F,则 $F \in S_\omega(\mathbf{Z})$.

证 由于

$$|F(n+\omega) - F(n)| \leqslant |F(n+\omega) - f_i(n+\omega)| + |f_i(n+\omega) - f_i(n)| + |f_i(n) - F(n)|.$$

从而易见定理 1 结论是成立的.

由定理 1 易验证 $S_\omega(\mathbf{Z})$ 是 Banach 空间.

定理 2 设 $f \in S_\omega(\mathbf{Z})$ 和 $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是整数序列,若 f 的位移函数序列 $\{R_{n_i}f\}_{i=1}^{\infty}$ 在 $C(\mathbf{Z},\mathbf{R})$ 中收敛于 F,则 $F \in C_\omega(\mathbf{Z})$.

证 注意到

$$|F(k+\omega) - F(k)| \leqslant |F(k+\omega) - R_{n_i}f(k+\omega)| + |R_{n_i}f(k+\omega) - R_{n_i}f(k)| + |R_{n_i}f(k) - F(k)| = |F(k+\omega) - R_{n_i}f(k+\omega)| + |f(n_i+k+\omega) - f(n_i+k)| + |R_{n_i}f(k) - F(k)|.$$

当 $i \to +\infty$ 时,$|F(k+\omega) - F(k)| \to 0$. 因此,

收稿日期: 2018-12-27
基金项目: 国家自然科学基金(11861037)和江西省教育厅科技课题(GJJ151326)资助项目.
作者简介: 简伟刚(1985—),男,江西南昌人,讲师,博士研究生,主要从事应用泛函分析研究. E-mail: 1017177631@qq.com

$F \in C_\omega(\mathbf{Z})$.

定义2 设$f \in C(\mathbf{Z},\mathbf{R})$和$\{k_i\}_{i=1}^\infty$是整数序列,$\forall n \in \mathbf{Z}$,都有$\{R_{k_i}f(n)\}_{i=1}^\infty$收敛于$F(n)$,称$f$的位移函数序列$\{R_{k_i}f\}_{i=1}^\infty$依点收敛于$F \in C(\mathbf{Z},\mathbf{R})$.

定义3 若对于任意整数序列$\{n_i\}_{i=1}^\infty$都存在它的子序列$\{k_i\}_{i=1}^\infty$和$F \in C_\omega(\mathbf{Z})$,使得$\{R_{k_i\omega}f\}_{i=1}^\infty$依点收敛于$F$,则称函数$f \in C(\mathbf{Z},\mathbf{R})$是$\omega$正规的.

定理3 函数$f \in C(\mathbf{Z},\mathbf{R})$当且仅当$f$是$\omega$正规的.

证 先用反证法证明充分性.

假设f不是ω渐进周期的,则$\exists \varepsilon_0 > 0$和整数序列$\{n_i\}_{i=1}^\infty$,使得不等式

$$|f(n_i+\omega) - f(n_i)| > \varepsilon_0$$

恒成立. 由于ω是有限的正整数,不妨设$n_i = a_i\omega + r$,其中$a_i \in \mathbf{Z}$,$r \in \{0,1,\cdots,\omega-1\}$和$i=1,2,\cdots$.

对于整数序列$\{a_i\}$,由于f是ω正规的,存在它的子序列$\{k_i\}$和$F \in C_\omega(\mathbf{Z})$,使得$\{R_{k_i\omega}f\}$依点收敛于$F$. 因此,对于$\varepsilon_0 > 0$和2个常数$r$、$r+\omega \in \mathbf{Z}$,$\exists N \in \mathbf{Z}$,使得当$i > N$时,有

$$|R_{k_i\omega}f(r) - F(r)| < \varepsilon_0/4,$$

$$|R_{k_i\omega}f(r+\omega) - F(r+\omega)| < \varepsilon_0/4.$$

由以上2个不等式和$\{k_i\omega + r\}_{i=1}^\infty$也是$\{n_i\}$的子序列得

$$|F(r+\omega) - F(r)| \geqslant -|F(r+\omega) - R_{k_i\omega}f(r+\omega)| + |R_{k_i\omega}f(r+\omega) - R_{k_i\omega}f(r)| - |R_{k_i\omega}f(r) - F(r)| = -|F(r+\omega) - f(k_i\omega+r+\omega)| + |f(k_i\omega+r+\omega) - f(k_i\omega+r)| - |f(k_i\omega+r) - F(r)| \geqslant -\varepsilon_0/4 + \varepsilon_0 - \varepsilon_0/4 = \varepsilon_0/2.$$

这与F是ω周期函数矛盾,故充分性成立.

接下来,再证明必要性.

对于任意整数序列$\{n_i\}_{i=1}^\infty$,由$\{R_{n_i\omega}f(0)\}_{i=1}^\infty$是$\mathbf{R}$中的有界序列,故存在$\{n_i\}$的子列$\{n_{i0}\}$,当$i_0 \to +\infty$时,$R_{n_{i_0}\omega}f(0) \to I_0$,其中$I_0$是某一个常数. 同理,$\{R_{n_{i_0}\omega}f(1)\}$也是$\mathbf{R}$中的有界序列,故存在$\{n_{i_0}\}$的子列$\{n_{i_1}\}$,当$i_1 \to +\infty$时,$R_{n_{i_1}\omega}f(1) \to I_1$,其中$I_1$是某一个常数. 按此过程依次进行到第$\omega$次,可以得到$\{n_{i_{\omega-2}}\}$的子列$\{n_{i_{\omega-1}}\}$,当$i_{\omega-1} \to +\infty$时,$R_{n_{i_{\omega-1}}\omega}f(\omega-1) \to I_{\omega-1}$,其中$I_{\omega-1}$是某一个常数.

为了简化记号,以下记$\{k_i\}_{i=1}^\infty = \{n_{i_{\omega-1}}\}_{i_{\omega-1}=1}^\infty$. 于是,当$i \to +\infty$时,有$R_{k_i\omega}f(r) \to I_r$,其中$r = 0,1,\cdots,\omega-1$.

定义函数$F: \mathbf{Z} \to \mathbf{R}$满足:$F(n) = I_r$当且仅当$\omega \mid n \equiv r$,其中$r = 0,1,\cdots,\omega-1$,易见$F \in C_\omega(\mathbf{Z})$.

以下证明$\{R_{k_i\omega}f\}_{i=1}^\infty$依点收敛于$F$. $\forall \varepsilon > 0$和$n \in \mathbf{Z}$,设$n = a\omega + r$,$a \in \mathbf{Z}$和$r \in \{0,1,\cdots,\omega-1\}$.

由f是S渐进ω周期序列,故$\exists N_1 \in \mathbf{Z}$,当$n^* > N_1$时,有

$$|f(n^*+\omega) - f(n^*)| < \varepsilon/(|a|+1).$$

又由于$\{R_{k_i\omega}f\}_{i=1}^\infty$收敛到$I_r$和$\{k_i\}$是整数序列,所以$\exists N \in \mathbf{Z}$,当$i > N$时,有

$$|R_{k_i\omega}f(r) - I_r| < \varepsilon/(|a|+1),\ k_i\omega + (a-1)\omega + r > N_1,\ k_i\omega + (a-2)\omega + r > N_1,\cdots,k_i\omega + r > N_1.$$

于是

$$|R_{k_i\omega}f(n) - F(n)| = |f(k_i\omega + n) - I_r| \leqslant |f(k_i\omega + a\omega + r) - f(k_i\omega + (a-1)\omega + r)| + |f(k_i\omega + (a-1)\omega + r) - f(k_i\omega + (a-2)\omega + r)| + \cdots + |f(k_i\omega + \omega + r) - f(k_i\omega + r)| + |f(k_i\omega + r) - I_r| < \varepsilon|a|/(|a|+1) + \varepsilon/(|a|+1) = \varepsilon.$$

综上所述,$\{R_{k_i\omega}f\}_{i=1}^\infty$依点收敛于$F$. 故必要性成立. 因此,定理3得证.

2 主要内容

引理1 设函数$f: \mathbf{Z} \times \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$满足$f(n,\lambda x) \geqslant \lambda f(n,x)$,其中$\lambda \in (0,1)$,$n \in \mathbf{Z}$和$x \in \mathbf{R}^+$. 若$\forall x \in \mathbf{R}^+$和$n \in \mathbf{Z}$,$f(\cdot,x) \in S_\omega(\mathbf{Z})$和$f(n,\cdot)$是单调递增函数,函数$g \in S_\omega(\mathbf{Z})$满足$\inf_{n \in \mathbf{Z}} g(n) > 0$,则$f(\cdot,g(\cdot)) \in S_\omega(\mathbf{Z})$.

证 首先证明$f(\cdot,g(\cdot))$是有界的. 设$a = \inf_{n \in \mathbf{Z}} g(n)$,$b = \sup_{n \in \mathbf{Z}} g(n)$和$c = \sup_{n \in \mathbf{Z}} f(n,a)$,其中$\forall n \in \mathbf{Z}$和$x$、$y \in [a,b]$. 不妨设$x \leqslant y$,考虑

$$|f(n,x) - f(n,y)| = f(n,y) - f(n,x) = f(n,y) - f(n,xy/y) \leqslant f(n,y) - xf(n,y)/y \leqslant (y-x)f(n,y)/y \leqslant |y-x| yf(n,ay/y)/(ay) \leqslant |y-x| \cdot f(n,a)/a \leqslant c|y-x|/a.$$

因此,易见$f(\cdot,g(\cdot))$是有界的.

接下来,再证明$f(\cdot,g(\cdot)) \in S_\omega(\mathbf{Z})$.

对于任意整数序列$\{n_i\}$,由于$g \in S_\omega(\mathbf{Z})$,存在$\{n_i\}$的子序列$\{s_i\}$和$G \in C_\omega(\mathbf{Z})$,使得$\{R_{s_i\omega}g\}$依点收敛于$G$. 不妨设$G(n) = I_r$当且仅当$\omega \mid n \equiv r$,其中$I_r \in \mathbf{R}$和$r \in \{0,1,\cdots,\omega-1\}$.

再由于$f(\cdot,I_0) \in S_\omega(\mathbf{Z})$,存在$\{s_i\}$的子序列$\{s_{i_0}\}$和$F_0 \in C_\omega(\mathbf{Z})$,使得$\{R_{s_{i_0}\omega}f(\cdot,I_0)\}$依点收敛于$F_0$. 同理,$f(\cdot,I_1) \in S_\omega(\mathbf{Z})$,存在$\{s_{i_0}\}$的子序列$\{s_{i_1}\}$和$F_1 \in C_\omega(\mathbf{Z})$,使得$\{R_{s_{i_1}\omega}f(\cdot,I_1)\}$依点收敛于$F_1$. 按上述过程依次进行下去,存在$\{s_{i_{\omega-2}}\}$的子序列$\{s_{i_{\omega-1}}\}$和$F_{\omega-1} \in C_\omega(\mathbf{Z})$,使得$\{R_{s_{i_{\omega-1}}\omega}f(\cdot,$

$I_{\omega-1})\}$ 依点收敛于 $F_{\omega-1}$. 为了符号上简便,记$\{k_i\}_{i=1}^{\infty}$表示$\{s_{i_{\omega-1}}\}_{i_{\omega-1}=1}^{\infty}$. 于是,有$\{R_{k_i\omega}g\}$ 依点收敛于 G 和$\{R_{k_i\omega}f(\cdot,I_r)\}$ 依点收敛于 F_r,其中 $r=0,1,\cdots,\omega-1$.

定义函数: $F:\mathbf{Z}\to\mathbf{R}$, $F(n)=F_r(r)$ 当且仅当 $\omega\mid n\equiv r$. 易见 $F\in C_\omega(\mathbf{Z})$. $\forall\varepsilon>0$ 和 $n\in\mathbf{Z}$,不妨设 $\omega\mid n\equiv r$,易见 $F(n)=F(r)=F_r(r)=F_r(n)$. 考虑

$|f(k_i\omega+n,g(k_i\omega+n))-F(n)|\leqslant|f(k_i\omega+n,g(k_i\omega+n))-f(k_i\omega+n,I_r)|+|f(k_i\omega+n,I_r)-F_r(n)|\leqslant c|g(k_i\omega+n)-I_r|/a+|f(k_i\omega+n,I_r)-F_r(n)|=c|g(k_i\omega+n)-G(n)|/a+|f(k_i\omega+n,I_r)-F_r(n)|$.

由于当 $i\to+\infty$ 时, $|g(k_i\omega+n)-G(n)|\to0$ 和$|f(k_i\omega+n,I_r)-F_r(n)|\to0$ 都成立,故$|f(k_i\omega+n,g(k_i\omega+n))-F(n)|\to0$ 也成立. 因此, $f(\cdot,g(\cdot))\in S_\omega(\mathbf{Z})$.

引理 2 设函数f、$\tau\in S_\omega(\mathbf{Z})$ 且 $\tau:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}^+$,则 $F\in S_\omega(\mathbf{Z})$,其中 $F(n)=\sum_{k=n-\tau(n)}^{n}f(k)$.

证 由 $\tau:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}^+$ 且 $\tau\in S_\omega(\mathbf{Z})$,易见 $\exists N\in\mathbf{Z}$,当 $n>N$ 时,恒有 $\tau(n+\omega)=\tau(n)$ 成立.

故当 $n>N$ 时,考虑

$|F(n+\omega)-F(n)|=\left|\sum_{k=n+\omega-\tau(n+\omega)}^{n+\omega}f(k)-\sum_{k=n-\tau(n)}^{n}f(k)\right|=\left|\sum_{k=n-\tau(n+\omega)}^{n}f(k+\omega)-\sum_{k=n-\tau(n)}^{n}f(k)\right|=\left|\sum_{k=n-\tau(n)}^{n}f(k+\omega)-\sum_{k=n-\tau(n)}^{n}f(k)\right|=\left|\sum_{k=n-\tau(n)}^{n}(f(k+\omega)-f(k))\right|\leqslant\sum_{k=n-\tau(n)}^{n}|f(k+\omega)-f(k)|$.

由于$f\in S_\omega(\mathbf{Z})$,所以,当$n\to+\infty$ 时, $\sum_{k=n-\tau(n)}^{n}|f(k+\omega)-f(k)|\to0$,即 $F\in S_\omega\mathbf{Z}$.

定理 4 若方程(1) 满足以下 3 个条件:

(i) 函数 $\tau:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}^+$ 和 $\alpha:\mathbf{Z}\to\mathbf{R}^+$ 且 τ、$\alpha\in S_\omega(\mathbf{Z})$,连续函数$f:\mathbf{Z}\times\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ 满足 $\forall n\in\mathbf{Z}$ 和 $x\in\mathbf{R}^+$,有$f(n,\cdot)$ 是单调递增的和$f(\cdot,x)\in S_\omega(\mathbf{Z})$;

(ii) 存在 2 个常数m、M, $0<m<M$,使得 $\forall n\in\mathbf{Z}$,有

$$\alpha(n)m^a+\sum_{k=n-\tau(n)}^{n}f(k,m)\geqslant m,$$

$$\alpha(n)M^a+\sum_{k=n-\tau(n)}^{n}f(k,M)\leqslant M;$$

(iii) 存在函数 $\varphi:(0,1)\to(0,1]$ 使得 $\forall n\in\mathbf{Z}$, $x\in\mathbf{R}^+$ 和 $\lambda\in(0,1)$,有

$f(n,\lambda x)\geqslant\varphi(\lambda)f(n,x)$, $\varphi(\lambda)>\lambda+r_0(\lambda-\lambda^a)$,

其中 $r_0=\bar{\alpha}M^a/\inf_{n\in\mathbf{Z}}\sum_{k=n-\tau(n)}^{n}f(k,m^2/M)$;

则方程(1) 具有一个 S 渐进 ω 周期解.

证 设 $P=\{x\in S_\omega(\mathbf{Z}):\inf_{n\in\mathbf{Z}}x(n)>0\}$, A 是定义在 P 上的映射,且

$$(Ax)(n)=\alpha(n)x^a(n-b)+\sum_{k=n-\tau(n)}^{n}f(k,x(k)).$$

易见 $Ax\in P$,即 A 是 $P\to P$ 的算子. 由 r_0 的构造知,对于 $x\in P$ 满足 $m^2/M\leqslant x(n)\leqslant M(n\in\mathbf{Z})$,有

$\alpha(n)x^a(n-b)\leqslant(\sup_{n\in a}\alpha(n))M^a\leqslant r_0\sum_{k=n-\tau(n)}^{n}f(k,x(k))$.

于是, $(Ax)(n)=\alpha(n)x^a(n-b)+\sum_{k=n-\tau(n)}^{n}f(k,x(k))\leqslant(1+r_0)\sum_{k=n-\tau(n)}^{n}f(k,x(k))$.

$\forall\lambda\in(0,1)$ 和$m^2/M\leqslant x(n)\leqslant M(n\in\mathbf{Z})$,考虑

$A(\lambda x)(n)=\alpha(n)\lambda^a x^a(n-b)+\sum_{k=n-\tau(n)}^{n}f(k,\lambda x(k))\geqslant\lambda^a\alpha(n)x^a(n-b)+\varphi(\lambda)\sum_{k=n-\tau(n)}^{n}f(k,x(k))=\lambda^a\alpha(n)x^a(n-b)+\varphi(\lambda)\sum_{k=n-\tau(n)}^{n}f(k,x(k))-\lambda\alpha(n)x^a(n-b)-\lambda\sum_{k=n-\tau(n)}^{n}f(k,x(k))+\lambda(Ax)(n)=\lambda(Ax)(n)+(\lambda^a-\lambda)\alpha(n)x^a(n-b)+(\varphi(\lambda)-\lambda)\sum_{k=n-\tau(n)}^{n}f(k,x(k))>\lambda(Ax)(n)+r_0(\lambda^a-\lambda)\sum_{k=n-\tau(n)}^{n}f(k,x(k))+(\varphi(\lambda)-\lambda)\sum_{k=n-\tau(n)}^{n}f(k,x(k))\geqslant(\lambda+(\varphi(\lambda)-\lambda-r_0(\lambda^a-\lambda))/(1+r_0))(Ax)(n)=h(\lambda)(Ax)(n)>\lambda(Ax)(n)$,

其中$h(\lambda)=(\varphi(\lambda)-\lambda-r_0(\lambda^a-\lambda))/(1+r_0)>\lambda$.

$\forall n\in\mathbf{Z}$,令$u_0(n)\equiv m$ 和$v_0(n)\equiv M$, $u_i(n)=(Au_{i-1})(n)$ 和 $v_i(n)=(Av_{i-1})(n)$. 由条件(ii) 知, $u_1(n)>m$, $v_1(n)<M$. 再由条件(i) 得

$$m\leqslant u_1(n)\leqslant u_2(n)\leqslant\cdots\leqslant v_2(n)\leqslant v_1(n)\leqslant M.$$

由引理 1 和引理 2 得, u_i、$v_i\in S_\omega(\mathbf{Z})$,其中 $i=0,1,2,\cdots$.

令 $\theta_i=\sup\{\theta>0:u_i(n)\geqslant\theta v_i(n),n\in\mathbf{Z}\}$,于是 $m/M\leqslant\theta_0\leqslant\theta_1\leqslant\cdots\leqslant\theta_i\leqslant\cdots\leqslant1$. 记$\theta_0=\lim_{i\to+\infty}\theta_i$,显然, $\theta_0\in[m/M,1]$. 接下来用反证法证明 $\theta_0=1$. 假设 $\theta_0<1$,由于

$u_{i+1}(n)=(Au_i)(n)\geqslant A(\theta_i v_i)(n)=A(\theta_i\theta_0 v_i/\theta_0)(n)\geqslant\theta_i A(\theta_0 v_i)(n)/\theta_0\geqslant\theta_i h(\theta_0)A(v_i)(n)/\theta_0=\theta_i h(\theta_0)v_{i+1}(n)/\theta_0$,

所以 $\theta_{i+1}\geqslant\theta_i h(\theta_0)/\theta_0$,即 $\theta_{i+1}/\theta_i\geqslant h(\theta_0)/\theta_0>1$,于是,当 $i\to+\infty$ 时, $\theta_{i+1}\geqslant\theta_1(h(\theta_0)/\theta_0)^i\to+\infty$,

矛盾. 因此 $\theta_0 = 1$ 成立.

$\forall i、j \in \mathbf{Z}^+$ 且 $i < j$,有 $0 \leqslant u_j(n) - u_i(n) \leqslant v_j(n) - u_i(n) \leqslant v_i(n) - u_i(n) \leqslant v_i(n) - \theta_i v_i(n) \leqslant (1-\theta_i) u_i(n) \leqslant (1-\theta_i) M$,$n \in \mathbf{Z}$,即$\sup\limits_{n\in\mathbf{Z}} | u_j(n) - u_i(n) | \leqslant (1-\theta_i) M \to 0 (i \to +\infty)$. 由于 $S_\omega(\mathbf{Z})$ 是完备的,所以 $\exists x^* \in S_\omega(\mathbf{Z})$ 使得$\{u_i\}$ 在 $S_\omega(\mathbf{Z})$ 中收敛于 x^*. 易见 $\forall n \in \mathbf{Z}$,有 $x^*(n) \leqslant v_i(n)$. 再由于

$$0 \leqslant v_i(n) - x^*(n) \leqslant v_i(n) - u_i(n) \leqslant (1-\theta_i) M \to 0 (i \to 0),$$

故$\{v_i\}$ 在 $S_\omega(\mathbf{Z})$ 中也收敛于 x^*. 由于

$$u_{i+1}(n) = (Au_i)(n) \leqslant (Ax^*)(n) \leqslant (Av_i)(n) \leqslant v_{i+1}(n),$$

所以 $Ax^* = x^*$,即 x^* 是方程(1) 的 S 渐进 ω 周期解.

举出一个例子说明在定理 4 中的 3 个条件是可以实现的.

例 1 设在方程(1) 中 $\alpha(n) \equiv 1/20$,$a = 2$,$b = 0$,$\tau(n) \equiv 0$ 并且$f(n,x) = g(n)\sqrt{x}$,其中 $g(n) \in S_\omega(\mathbf{Z})$,$1 \leqslant g(n) \leqslant 9\sqrt{2}/10$,$n \in \mathbf{Z}$,则定理4 的3 个条件满足.

证 易验证(i) 是成立的. 令 $m = 1$,$M = 2$,由于 $1/20 \times 1 + g(n) \times 1 \geqslant 1$,$1/20 \times 4 + g(n) \times \sqrt{2} \leqslant 2$,其中 $n \in \mathbf{Z}$,所以 $m = 1$,$M = 2$ 是满足条件(ii) 的. 再令 $\varphi(\lambda) = \sqrt{\lambda}$,可以计算出 $r_0 = 1/20 \times 4/\sqrt{1/2} = \sqrt{2}/5 < 1/2$. 于是,$\forall \lambda \in (0,1)$,有

$$(\varphi(\lambda) - \lambda)/(\lambda - \lambda^2) = (\sqrt{\lambda} - \lambda)/(\lambda - \lambda^2) = 1/(\sqrt{\lambda}(1 + \sqrt{\lambda})) > 1/(1 + \sqrt{\lambda}) > 1/2 > r_0,$$

则条件(iii) 也是成立的.

致谢 笔者在此衷心感谢江西师范大学丁惠生教授对本文研究方法的指导和帮助.

3 参考文献

[1] Cooke K,Kapplan J. A periodicity threshold theorem for epidemics and population growth [J]. Mathematical Biosciences,1976,31(1/2):87-104.

[2] Dads E A,Ezzinbi K. Almost periodic solution for some neutral nonlinear integral equations [J]. Nonlinear Analysis Theory Methods and Applications,1997,28(9):1479-1489.

[3] Dads E A,Cieutst P,Lhachimi L. Positive pseudo almost periodic solutions for some nonlinear infinite delay integral equations [J]. Mathematical and Computer Modelling,2009,49(3/4):721-739.

[4] Ding Huisheng,Chen Yuanyuan,N′guérékata G M. Existence of positive pseudo almost periodic solutions to a class of neutral integral equations [J]. Nonlinear Analysis Theory Methods and Applications,2011,74(18):7356-7364.

[5] Ding Huisheng,Fu Jiudong,N′guérékata G M. Positive almost periodic type solutions to a class of nonlinear difference equations [J]. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations,2011,25(25):1-17.

[6] Zhang Chuanyi. Almost periodic type functions and ergodicity [M]. Dordrecht,Boston,London:Kluwer Academic Publishers,2003.

[7] 简伟刚,陈园园. 一类非线性差分方程的伪概周期解 [J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2017,41(6):617-622.

[8] Ding Huisheng,Xiao Tijun,Liang Jin. Existence of positive almost automorphic solutions to nonlinear delay integral equations [J]. Nonlinear Analysis Theory Methods and Applications,2009,70(6):2216-2231.

[9] Henriquez H R,Pierri M,Taboas P. On S-asymptotically ω-periodic functions on Banach spaces and applications [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,2008,343(2):1119-1130.

[10] Zhao Jingyun,Ding Huisheng,N′GUéRéKATA G M. S-asymptotically periodic solutions for an epidemic model with superlinear perturbation [J]. Advances in Difference Equations,2016,2016(1):221.

The S-Asmptotically ω-Periodic Type Solutions for Difference Equations with Superlinear Perturbation

JIAN Weigang[1,2],CHEN Yuanyuan[3]

(1. School of Mathematics and Computers,Yuzhang Normal University,Nanchang Jiangxi 330103,China;

2. School of Mathematics and Statistics,Jiangxi Normal University,Nanchang Jiangxi 330022,China;

3. Department of Public Education,Nanchang Institute of Technology,Nanchang Jiangxi 330044,China)

Abstract: Firstly,an equivalent definition of the S-asmptotically ω-periodic type function is provides,and the existence of S-asymptotically periodic solutions for the following difference equation with superlinear perturbations is investigated. At last,an example is given to point out that the three conditions studied in the theorem are achievable.

Key words: difference equations; S-asymptotically ω-periodic function; superlinear perturbation; dependent point convergence

(责任编辑:曾剑锋)