文章编号: 1000-5862(2021)04-0343-06

具有随机支出的带延迟的对偶保险风险模型

周纹心[1],申海燕[2],周国立[2*]

(1. 重庆师范大学经济与管理学院,重庆 401331; 2. 重庆大学数学与统计学院,重庆 401331)

摘要: 该文考虑了在带延迟的对偶风险模型中支出服从指数分布的情况. 首先,运用无穷小分析法以及随机过程的基本理论推导出破产时间的拉普拉斯变换、破产概率和破产时间的期望所满足的积分-微分方程; 其次,运用常微分方程方法得到了当随机支出和收入变量均为指数分布时的破产概率和相关破产时间的解析表达式; 最后,列举了数值实例来论证在模型中的某些参数对破产概率的影响.

关键词: 对偶风险模型; 延迟; 随机支出; 积分方程; 指数分布

中图分类号: O 211.67　　**文献标志码:** A　　**DOI:** 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2021.04.04

0 引言

近年来,对偶风险模型越来越受到人们关注. 已经有大量学者对此模型的破产概率和最优分红策略进行了研究. “对偶风险模型”这个名字来源于它对经典风险模型的对偶性. 在经典风险模型中,其盈余过程 $U(t)$ 定义为

$$U(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, \tag{1}$$

其中 u 为初始盈余资本,c 为一个恒定的保费收入率,$\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$ 为索赔总额过程,并且 $N(t)$ 是一个泊松过程,Y_i 为独立同分布的索赔金额. 关于经典风险模型更一般的假设(如非线性的总保费收入和非独立的索赔金额)可参见文献[1-2]. 通过将式(1)中的索赔总额和保费收入的符号对调可得对偶风险模型:

$$U(t) = u - ct + S(t), \tag{2}$$

其中 $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$. 式(2)中各参数的解释意义如下: $u \geqslant 0$ 仍为初始盈余资本,$c > 0$ 为在单位时间内的消费支出,$S(t)$ 为到时刻 t 的总收入. 对偶风险模型在文献[3]中被提出. 随后,在保险数学中,有许多学者研究了经典风险模型的对偶模型. 文献[4]研究了在障碍分红策略下的对偶风险模型,并且推导出了期望折现分红满足的积分-微分方程和在某些具体条件下的解析表达式; 文献[5]考虑了在门槛分红策略下的对偶风险模型,并且研究了在该模型下的最优分红问题. 对偶风险模型通常被用于描述石油公司、制药企业和一些以研究为基础的公司的盈余过程[6-7].

由于模型(2)中缺少延迟的考虑,因此,该模型并不能很好地描述一些复杂的经济学行为. 以石油公司为例,在对偶风险模型中,并不是更新过程一发生(发现石油)收益就立刻到达,这中间还存在开采过程的时间等,这个过程耗费时间反映在模型中就是延迟时间. 延迟大部分被用于经典风险模型中. 如文献[8]考虑了索赔发生但没有被报道或者没有立即解决的情况; 文献[9]研究了一类具有延迟的经典风险模型,并利用与非齐次泊松过程联系,得到了破产概率的渐近表达式. 随着延迟在经典风险模型中的深入研究,在对偶风险模型中的延迟也引起了人们的重视. 如文献[10]在文献[9]的基础上,在模型(2)上假设收入到达时间是存在延迟的(即 $N(t)$ 存在延迟),研究了带延迟的对偶风险模型,并推导出了破产概率和相关破产时间的渐近解; 文献[11]主要研究了延迟对偶风险模型的占位时问题,并给出了占位时的联合拉普拉斯变换的表达式.

在以往的研究中都是假设支出率是恒定的,为一个固定常数. 然而在实际中,有一些公司不仅收益会存在延迟,而且由于环境变化,其支出也不是线性的而是随机的. 基于以上考虑,本文将随机支出引入

收稿日期: 2021-05-20

基金项目: 国家自然科学基金面上课题(11971077)和重庆市自然科学基金(cstc2020jcyj-msxm2554)资助项目.

通信作者: 周国立(1981—),男,湖南娄底人,教授,博士,博士生导师,主要从事保险风险、金融管理研究. E-mail: zhouguoli736@126.com

到带延迟的对偶风险模型中,主要研究模型

$$U(t)=u-\sum_{i=1}^{N_1(t)}X_i+\sum_{i=1}^{N_2(t)}Y_i, \tag{3}$$

其中 $u\geqslant 0$ 为初始盈余;$\{N_1(t),t\geqslant 0\}$ 表示在到时刻 t 时的支出费用次数,服从参数为 $\lambda_1(>0)$ 的泊松分布;$\{X_i,i\geqslant 1\}$ 为一系列正的独立同分布的随机变量,表示每次的支出费用,并且假设 X_i 的密度函数为 $f(x)$;$\{N_2(t),t\geqslant 0\}$ 表示在到时刻 t 时有延迟的收入到达次数;$\{Y_i,i\geqslant 1\}$ 为一系列正的独立同分布的随机变量,表示每次的收入金额,并且假设 Y_i 的密度函数为 $g(y)$.

总之,本文在文献[9-10]的基础上引进了随机支出的情况,主要研究了具有随机支出的带延迟的对偶风险模型的破产问题. 不同于文献[9-10]的方法,本文主要通过无穷小分析法和全概率公式,并且结合随机过程的基本理论推导出破产概率、破产时间的拉普拉斯变换以及破产时间的期望所满足的积分方程. 特别地,在考虑支出和收益变量服从指数分布时,运用常微分方程的相关技巧得到了破产概率和有关破产时间的解析表达式.

1 模型建立

首先,主要对带延迟的对偶风险模型进行介绍. 在模型(2)的基础上,文献[10]引入了文献[9]中的延迟. 已知 $N_2(t)$ 为在时间[0,t]内的收益次数,并且假设 $N_2(0)=0$. 定义$\{T_k\}_{k=1}^{\infty}$为更新到达的时间,$\{L_k\}_{k=1}^{\infty}$为对应的延迟时间,则$\{T_k+L_k\}_{k=1}^{\infty}$为收益实际到达的时间,即 $N_2(t)=\sum_{k=1}^{\infty}I_{\{T_k+L_k\leqslant t\}}$.

假设$\{T_k-T_{k-1}\}_{k=1}^{\infty}$为一系列独立同分布的指数分布,参数为 λ_2. L_k 为一系列正的独立同分布的随机变量,且其分布函数为 $L(t)$. 若没有延迟存在,则收益的更新到达过程 $N_2(t)$ 为一个参数 λ_2 的泊松过程. 但当存在延迟时,$N_2(t)$ 是一个参数为 $\lambda_2L(t)$ 的非齐次泊松过程[12].

因此,具有随机支出的带延迟的对偶风险模型 $U(t)$ 定义为

$$U(t)=u-\sum_{i=1}^{N_1(t)}X_i+\sum_{i=1}^{N_2(t)}Y_i, \tag{4}$$

其中 $N_2(t)=\sum_{k=1}^{\infty}I_{\{T_k+L_k\leqslant t\}}$ 为服从参数为 $\lambda_2L(t)$ 的非齐次泊松过程. $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$、$\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$、$\{N_1(t),t\geqslant 0\}$、$\{N_2(t),t\geqslant 0\}$ 是相互独立的,且满足正的安全负电荷条件:

$$\lambda_2E(Y)>\lambda_1E(X), \tag{5}$$

其他参数值和模型(3)中的相同.

在具有随机支出的带延迟的对偶风险模型(4)中,在时刻 t 之后的破产时间仍定义为公司的盈余水平首次到达 0 的时刻,即

$$\tau(t)=\inf\{s:s\geqslant t,U(s)\leqslant 0\},$$

其中若破产没有发生,则 $\tau(t)=\infty$.

在时刻 t 的最终破产概率为

$$\varphi(u,t)=P\{\tau(t)<\infty\mid U(t)=u\},$$

令 $m(u,t)$ 为破产时间 $\tau(t)$ 的拉普拉斯变换:

$$m(u,t)=E(\mathrm{e}^{-\theta\tau(t)}\mid U(t)=u)=E_{U(t)=u}(\mathrm{e}^{-\theta\tau(t)}),$$

$v(u,t)$ 为破产时间 $\tau(t)$ 的期望值:

$$v(u,t)=E_{U(t)=u}(\tau(t)).$$

2 $m(u,t)$、$\varphi(u,t)$ 和 $v(u,t)$ 满足的积分方程

本部分主要利用无穷小分析法和全概率公式推导出了 $m(u,t)$、$\varphi(u,t)$ 和 $v(u,t)$ 满足的积分方程以及边界条件.

定理 1 假设在模型(4)中满足式(5),则破产时间的拉普拉斯变换 $m(u,t)$ 满足积分方程

$$\lambda_2L(t)\int_0^{\infty}m(u+x,t)g(x)\,\mathrm{d}x+\lambda_1\int_0^{u}m(u-x,t)f(x)\,\mathrm{d}t-(\lambda_1+\lambda_2L(t)+\theta)m(u,t)=0, \tag{6}$$

其边界条件为 $m(0,t)=\mathrm{e}^{-\theta t}$.

证 考虑时刻 t 后的一段非常小的时间$[t,t+\Delta t]$,在时间$[t,t+\Delta t]$内发生的情况有如下 4 种.

(i) 在$[t,t+\Delta t]$内既没有支出也没有收益发生,这种情况发生的概率为

$$P(N_1(t+\Delta t)-N_1(t)=0,N_2(t+\Delta t)-N_2(t)=0)=\frac{(\lambda_1\Delta t)^0\mathrm{e}^{-\lambda_1\Delta t}}{0!}\cdot\frac{(\lambda_2L(t)\Delta t)^0\mathrm{e}^{-\lambda_2L(t)\Delta t}}{0!}=\mathrm{e}^{-\lambda_1\Delta t}\cdot\mathrm{e}^{-\lambda_2L(t)\Delta t}+o(\Delta t)=(1-\lambda_1\Delta t)(1-\lambda_2L(t)\Delta t)+o(\Delta t)=1-\lambda_1\Delta t-\lambda_2L(t)\Delta t+o(\Delta t).$$

(ii) 在$[t,t+\Delta t]$内没有支出但发生 1 次收益,这种情况发生的概率为

$$P(N_1(t+\Delta t)-N_1(t)=0,N_2(t+\Delta t)-N_2(t))>0)=\frac{(\lambda_1\Delta t)^0\mathrm{e}^{-\lambda_1\Delta t}}{0!}\left(1-\frac{(\lambda_2L(t)\Delta t)^0\mathrm{e}^{-\lambda_2L(t)\Delta t}}{0!}\right)=\mathrm{e}^{-\lambda_1\Delta t}(1-\mathrm{e}^{-\lambda_2L(t)\Delta t})+o(\Delta t)=(1-\lambda_1\Delta t)\lambda_2L(t)\Delta t+o(\Delta t)=\lambda_2L(t)\Delta t+o(\Delta t).$$

(iii) 在$[t,t+\Delta t]$内有 1 次支出但没有收益,这种情况发生的概率为

$$P(N_1(t+\Delta t)-N_1(t)>0, N_2(t+\Delta t)-N_2(t))=0)=\left(1-\frac{(\lambda_1\Delta t)^0 \mathrm{e}^{-\lambda_1\Delta t}}{0!}\right)\frac{(\lambda_2 L(t)\Delta t)^0 \mathrm{e}^{-\lambda_2 L(t)\Delta t}}{0!}=(1-\mathrm{e}^{-\lambda_1\Delta t})\mathrm{e}^{-\lambda_2 L(t)\Delta t}+o(\Delta t)=\lambda_1\Delta t(1-\lambda_2 L(t)\Delta t)+o(\Delta t)=\lambda_1\Delta t+o(\Delta t).$$

(iv) 在 $[t,t+\Delta t]$ 内有 1 次支出也有 1 次收益,这种情况发生的概率为

$$P(N_1(t+\Delta t)-N_1(t)>0, N_2(t+\Delta t)-N_2(t))>0)=\left(1-\frac{(\lambda_1\Delta t)^0 \mathrm{e}^{-\lambda_1\Delta t}}{0!}\right)\left(1-\frac{(\lambda_2 L(t)\Delta t)^0 \mathrm{e}^{-\lambda_2 L(t)\Delta t}}{0!}\right)=(1-\mathrm{e}^{-\lambda_1\Delta t})(1-\mathrm{e}^{-\lambda_2 L(t)\Delta t})o(\Delta t)=\lambda_1\Delta t\lambda_2 L(t)\Delta t+o(\Delta t)=o(\Delta t).$$

考虑上述 4 种情况可得

$$m(u,t)=\mathrm{e}^{-\theta\Delta t}(1-\lambda_1\Delta t-\lambda_2 L(t)\Delta t+o(\Delta t))\cdot E(m(u,t+\Delta t))+\mathrm{e}^{-\theta\Delta t}(\lambda_2 L(t)\Delta t+o(\Delta t))\cdot E\left(\int_0^\infty m(u+y,t+\Delta t)g(y)\,\mathrm{d}y\right)+\mathrm{e}^{-\theta\Delta t}(\lambda_1\Delta t+o(\Delta t))\cdot E\left(\int_0^u m(u-x,t+\Delta t)f(x)\,\mathrm{d}x\right)+o(\Delta t)=(1-\theta\Delta t)\cdot(1-\lambda_1\Delta t-\lambda_2 L(t)\Delta t)E(m(u,t))+(1-\theta\Delta t)\lambda_2\cdot L(t)\Delta t\int_0^\infty m(u+x,t+\Delta t)g(x)\,\mathrm{d}x+(1-\theta\Delta t)\lambda_1\Delta t\cdot\int_0^u m(u-x,t+\Delta t)f(x)\,\mathrm{d}x+o(\Delta t)=(1-(\theta+\lambda_1+\lambda_2 L(t))\Delta t)m(u,t)+\lambda_2 L(t)\Delta t\int_0^\infty m(u+x,t+\Delta t)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x+\lambda_1\Delta t\int_0^u m(u-x,t+\Delta t)f(x)\,\mathrm{d}x+o(\Delta t).$$

再将上式进行化简可得

$$-(\theta+\lambda_1+\lambda_2 L(t))m(u,t)+\lambda_2 L(t)\int_0^\infty m(u+x,t+\Delta t)g(x)\,\mathrm{d}x+\lambda_1\int_0^u m(u-x,t+\Delta t)f(x)\,\mathrm{d}x+o(\Delta t)/\Delta t=0.$$

再令 $\Delta t\to 0$ **可得式**(6).

下面证明边界条件,当 $u=0$ **时**,$\tau(t)=t$,**则** $m(0,\tau(t))=m(0,t)=\mathrm{e}^{-\theta t}$.

定理 2　**假设在模型**(4)**中满足式**(5),**则破产概率** $\varphi(u,t)$ **满足积分方程:**

$$\lambda_2 L(t)\int_0^\infty \varphi(u+x,t)g(x)\,\mathrm{d}x+\lambda_1\int_0^u \varphi(u-x,t)f(x)\,\mathrm{d}x-(\lambda_1+\lambda_2 L(t))\varphi(u,t)=0, \tag{7}$$

其中边界条件为 $\varphi(0,t)\equiv 1$.

证　**因为** $m(u,t)=E_{U(t)=u}(\mathrm{e}^{-\theta\tau(t)})=E_{U(t)=u}(\mathrm{e}^{-\theta\tau(t)}\mid\tau(t)=\infty)+E_{U(t)=u}(\mathrm{e}^{-\theta\tau(t)}\mid\tau(t)<\infty)=E_{U(t)=u}(\mathrm{e}^{-\theta\tau(t)}\mid\tau(t)<\infty)$,**所以令** $\theta=0$,**可得**

$$m(u,t)\big|_{\theta=0}=E_{U(t)=u}(1\mid\tau(t)<\infty)=P\{\tau(t)<\infty\mid U(t)=u\}=\varphi(u,t),$$

再根据定理 1 的结论可得到式(7),**并且当** $u=0$ **时**,$\varphi(0,t)\equiv 1$.

当模型(4)**满足式**(6)**时**,$\tau(t)$ **可以取值为** ∞. **即** $E_{U(t)=u}(\tau(t))$ **是无穷大. 为了使得估计** $v(u,t)=E_{U(t)=u}(\tau(t))$ **的值有意义,假设** $\lambda_2 E[Y]<\lambda_1 E[X]$,**则** $v(u,t)$ **是有限的. 接下来将推导** $v(u,t)$ **满足的积分方程.**

定理 3　**假设** $\lambda_2 E[Y]<\lambda_1 E[X]$,**则** $v(u,t)$ **满足积分方程:**

$$\lambda_2 L(t)\int_0^\infty v(u+x,t)g(x)\,\mathrm{d}x+\lambda_1\int_0^u v(u-x,t)f(x)\,\mathrm{d}x-(\lambda_1+\lambda_2 L(t))v(u,t)=0, \tag{8}$$

其边界条件为 $v(0,t)\equiv t$.

证　**类似在定理 1 中的讨论,可得**

$$v(u,t)=\mathrm{e}^{-\theta\Delta t}(1-\lambda_1\Delta t-\lambda_2 L(t)\Delta t)E(v(u,t+\Delta t))+\mathrm{e}^{-\theta\Delta t}(\lambda_2 L(t)\Delta t)E\left(\int_0^\infty v(u+y,t+\Delta t)\cdot g(y)\,\mathrm{d}y\right)+\mathrm{e}^{-\theta\Delta t}\lambda_1\Delta t E\left(\int_0^u v(u-x,t+\Delta t)f(x)\,\mathrm{d}x\right)+o(\Delta t)=(1-(\lambda_1+\lambda_2 L(t))\Delta t)v(u,t)+\lambda_2 L(t)\Delta t\cdot\int_0^\infty v(u+x,t+\Delta t)g(x)\,\mathrm{d}x+\lambda_1\Delta t\int_0^u v(u-x,t+\Delta t)\cdot f(x)\,\mathrm{d}x+o(\Delta t).$$

化简上式可得

$$(\lambda_1+\lambda_2 L(t))v(u,t)+\lambda_2 L(t)\int_0^\infty v(u+x,t+\Delta t)g(x)\,\mathrm{d}x+\lambda_1\int_0^u v(u-x,t+\Delta t)f(x)\,\mathrm{d}x+o(\Delta t)/\Delta t=0.$$

再令 $\Delta t\to 0$ **可得式**(8).

3　指数分布

假设支出费用和收入费用均服从指数分布,概率密度函数分别为

$$f(x)=\beta_1\mathrm{e}^{-\beta_1 x}, g(y)=\beta_2\mathrm{e}^{-\beta_2 y}, x、y\geqslant 0.$$

并且记 β_1 **为支出参数**,β_2 **为收入参数,则利用偏微分方程的知识可以求得** $m(u,t)$、$\varphi(u,t)$ **和** $v(u,t)$ **的显示解.**

定理 4　**在指数分布假设下,破产时间的拉普拉斯变换** $m(u,t)$ **的具体解为**

$$m(u,t)=c_1\mathrm{e}^{r_1 u}+c_2\mathrm{e}^{r_2 u}, u\geqslant 0, \tag{9}$$

其中 r_1 **和** r_2 **为方程**

$$-(\lambda_1+\lambda_2L(t)+\theta)(\beta_2-\beta_1)\gamma^2+(\lambda_1(\beta_1\beta_2-\beta_2^2)+\lambda_2L(t)(\beta_1^2-2\beta_2^2+\beta_1\beta_2)+\theta(\beta_1^2-\beta_2^2))\gamma+\theta(2\beta_2^2-\beta_1\beta_2^2-\beta_1^2\beta_2)=0$$

关于 γ 的 2 个根, c_1 和 c_2 为满足方程组

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{2}\lambda_1\beta_1c_i/(\beta_1+r_i)=0,\\ c_1+c_2=\mathrm{e}^{-\theta t}\end{cases}$$

的解.

证　因为

$$\int_0^u m(u+x,t)f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^u m(x,t)f(u-x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_0^\infty m(u+x,t)g(x)\,\mathrm{d}x=\int_u^\infty m(x,t)g(x-u)\,\mathrm{d}x,$$

所以式(6)可改写为

$$-(\lambda_1+\lambda_2L(t)+\theta)m(u,t)+\lambda_2L(t)\int_u^\infty m(x,t)g(x-u)\,\mathrm{d}x+\lambda_1\int_0^u m(x,t)f(u-x)\,\mathrm{d}x=0,$$

上式可化简为

$$-(\lambda_1+\lambda_2L(t)+\theta)m(u,t)+\lambda_2L(t)\beta_2\mathrm{e}^{\beta_2u}\int_u^\infty m(x,t)\cdot\mathrm{e}^{-\beta_2x}\mathrm{d}x+\lambda_1\beta_1\mathrm{e}^{-\beta_1u}\int_0^u m(x,t)\mathrm{e}^{\beta_1x}\mathrm{d}x=0.\quad(10)$$

对于式(10),关于变量 u 求导得

$$-(\lambda_1+\lambda_2L(t)+\theta)\partial m(u,t)/\partial u+\lambda_2L(t)\beta_2^2\mathrm{e}^{\beta_2u}\cdot\int_u^\infty m(x,t)\mathrm{e}^{-\beta_2x}\mathrm{d}x-\lambda_2L(t)\beta_2m(u,t)-\lambda_1\beta_1^2\mathrm{e}^{-\beta_1u}\cdot\int_0^u m(x,t)\mathrm{e}^{\beta_1x}\mathrm{d}x+\lambda_1\beta_1m(u,t)=0,$$

然后可得

$$-(\lambda_1+\lambda_2L(t)+\theta)\partial m(u,t)/\partial u+(\lambda_1\beta_1-\lambda_2L(t)\beta_2)m(u,t)+\lambda_2L(t)\beta_2^2\mathrm{e}^{\beta_2u}\int_0^\infty m(x,t)\mathrm{e}^{-\beta_2x}\mathrm{d}x-\lambda_1\beta_1^2\mathrm{e}^{-\beta_1u}\int_0^u m(x,t)\mathrm{e}^{\beta_1x}\mathrm{d}x=0.\quad(11)$$

再对于式(11),关于变量 u 求导得

$$-(\lambda_1+\lambda_2L(t)+\theta)\partial^2m(u,t)/\partial u^2+(\lambda_1\beta_1-\lambda_2L(t)\beta_2)\partial m(u,t)/\partial u-\lambda_2L(t)\beta_2^2m(u,t)+\lambda_2L(t)\beta_2^3\mathrm{e}^{\beta_2u}\cdot\int_u^\infty m(x,t)\mathrm{e}^{-\beta_2x}\mathrm{d}x+\lambda_1\beta_1^2\mathrm{e}^{-\beta_1u}\int_0^u m(x,t)\mathrm{e}^{\beta_1x}\mathrm{d}x+\lambda_1\beta_1^2m(u,t)=0.\quad(12)$$

令式(10)乘以 β_2 再减去式(11)可得

$$(\lambda_1+\lambda_2L(t)+\theta)\partial m(u,t)/\partial u-(\lambda_1(\beta_1+\beta_2)+\theta\beta_2)\cdot m(u,t)+\lambda_1\beta_1(\beta_2-\beta_1)\mathrm{e}^{-\beta_1u}\int_0^u m(x,t)\mathrm{e}^{\beta_1x}\mathrm{d}x=0.\quad(13)$$

再根据式(10)和式(13)可得

$$\lambda_1\beta_1\mathrm{e}^{-\beta_1u}\int_0^u m(x,t)\mathrm{e}^{\beta_1x}\mathrm{d}x=((\lambda_1+\lambda_2L(t)+\theta)\partial m(u,t)/\partial u-(\lambda_1(\beta_1+\beta_2)+\theta\beta_2)m(u,t))/(\beta_2-\beta_1),\quad(14)$$

$$\lambda_2L(t)\beta_2\mathrm{e}^{\beta_2u}\int_u^\infty m(x,t)\mathrm{e}^{-\beta_2x}\mathrm{d}x=(\lambda_1+\lambda_2L(t)+\theta)m(u,t)-\lambda_1\beta_1\mathrm{e}^{-\beta_1u}\int_0^u m(x,t)\mathrm{e}^{\beta_1x}\mathrm{d}x=((2\lambda_1\beta_2+\lambda_2L(t)(\beta_2-\beta_1)+\theta(2\beta_2-\beta_1))m(u,t)-(\lambda_1+\lambda_2L(t)+\theta)\partial m(u,t)/\partial u)/(\beta_2-\beta_1).\quad(15)$$

将式(14)和式(15)代入式(12)可得

$$-(\lambda_1+\lambda_2L(t)+\theta)(\beta_2-\beta_1)\partial^2m(u,t)/\partial u^2+(\lambda_1\beta_1-\lambda_2L(t)\beta_2)(\beta_2-\beta_1)\partial m(u,t)/\partial u+(\lambda_1\beta_1^2-\lambda_2L(t)\beta_2^2)(\beta_2-\beta_1)m(u,t)+\beta_2^2(2\lambda_1\beta_2+\lambda_2L(t)(\beta_2-\beta_1)+\theta(2\beta_2-\beta_1))m(u,t)-\beta_2^2(\lambda_1+\lambda_2L(t)+\theta)\partial m(u,t)/\partial u+\beta_1^2(\lambda_1+\lambda_2L(t)+\theta)\partial m(u,t)/\partial u-\beta_1^2(\lambda_1(\beta_1+\beta_2)+\theta\beta_2)m(u,t)=0.$$

然后将上式化简可得

$$(\lambda_1(\beta_1\beta_2-\beta_2^2)+\lambda_2L(t)(\beta_1^2-2\beta_2^2+\beta_1\beta_2)+\theta(\beta_1^2-\beta_2^2))\partial m(u,t)/\partial u-(\lambda_1+\lambda_2L(t)+\theta)(\beta_2-\beta_1)\partial^2m(u,t)/\partial u^2+\theta(2\beta_2^2-\beta_1\beta_2^2-\beta_1^2\beta_2)m(u,t)=0.$$

求得上式的特征方程为

$$-(\lambda_1+\lambda_2L(t)+\theta)(\beta_2-\beta_1)\gamma^2+(\lambda_1(\beta_1\beta_2-\beta_2^2)+\lambda_2L(t)(\beta_1^2-2\beta_2^2+\beta_1\beta_2)+\theta(\beta_1^2-\beta_2^2))\gamma+\theta(2\beta_2^2-\beta_1\beta_2^2-\beta_1^2\beta_2)=0.\quad(16)$$

方程(16)的 2 个根记为 r_1 和 r_2. 因此,积分方程式(6)的解 $m(u,t)$ 可表示为

$$m(u,t)=c_1\mathrm{e}^{r_1u}+c_2\mathrm{e}^{r_2u},u\geqslant0.\quad(17)$$

为了求解 c_1 和 c_2,将式(17)代入式(10)得

$$-(\lambda_1+\lambda_2L(t)+\theta)\sum_{i=1}^2c_i\mathrm{e}^{r_iu}+\lambda_2L(t)\beta_2\cdot\sum_{i=1}^2c_i\mathrm{e}^{r_iu}/(\beta_2-r_i)+\lambda_1\beta_1\sum_{i=1}^2c_i\mathrm{e}^{r_iu}/(\beta_1+r_i)-\lambda_1\beta_1\sum_{i=1}^2c_i\mathrm{e}^{-\beta_1u}/(\beta_1+r_i)=0.$$

从而可得

$$\sum_{i=1}^2(-\lambda_1+\lambda_2L(t)+\theta)+\lambda_2L(t)\beta_2/(\beta_2-r_i)+\lambda_1\beta_1/(\beta_1+r_i))c_i\mathrm{e}^{r_iu}-\sum_{i=1}^2\lambda_1\beta_1c_i\mathrm{e}^{-\beta_1u}/(\beta_1+r_i)=0.$$

上式对所有的 $u\geqslant0$ 都成立,且 $r_i(i=1,2)$ 是方程式(14)的根,因此有

$$\begin{cases}-(\lambda_1+\lambda_2L(t)+\theta)+\lambda_2L(t)\beta_2/(\beta_2-r_i)+\lambda_1\beta_1/(\beta_1+r_i)=0,\\ \sum_{i=1}^2\lambda_1\beta_1c_i/(\beta_1+r_i)=0.\end{cases}\quad(18)$$

根据式(18)和边界条件 $m(0,t)=\mathrm{e}^{-\theta t}$ 可得

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{2}\lambda_1\beta_1 c_i/(\beta_1+r_i)=0,\\ c_1+c_2=\mathrm{e}^{-\theta t}.\end{cases}$$

再由上式可求得 c_1 和 c_2.

注 1　因为 $m(u,t)|_{\theta=0}=\varphi(u,t)$，所以根据定理 4 可求得破产概率的显示解为

$$\varphi(u,t)=c_1\mathrm{e}^{r_1u}+c_2\mathrm{e}^{r_2u},u\geqslant 0,$$

其中 r_1 和 r_2 为方程

$$-(\lambda_1+\lambda_2L(t))(\beta_2-\beta_1)\gamma^2+(\lambda_1(\beta_1\beta_2-\beta_2^2)+\lambda_2L(t)(\beta_1^2-2\beta_2^2+\beta_1\beta_2))\gamma=0$$

关于 γ 的 2 个根，c_1 和 c_2 为满足方程组

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{2}\lambda_1\beta_1 c_i/(\beta_1+r_i)=0,\\ c_1+c_2=1\end{cases}$$

的解.

定理 5　假设 $\lambda_2E(Y)<\lambda_1E(X)$，则破产时间期望值 $v(u,t)$ 的解的形式为

$$v(u,t)=k_1+k_2\mathrm{e}^{\xi u},u\geqslant 0,\tag{26}$$

其中 ξ 为满足方程

$$-(\lambda_1+\lambda_2L(t))(\beta_2-\beta_1)\xi+\lambda_1(\beta_1\beta_2-\beta_2^2)+\lambda_2L(t)(\beta_1^2-2\beta_2^2+\beta_1\beta_2)=0$$

的解，k_1 和 k_2 为满足方程组

$$\begin{cases}k_1(\beta_1+\xi)+\beta_1k_2=0,\\ k_1+k_2=t\end{cases}$$

的解.

证　通过做与定理 4 类似地讨论可得上述结论.

4　数值实例

本节主要进行数值模拟实验，并且根据实验结果来说明在具有随机支出的带延迟的对偶风险模型中的一些参数对破产概率的影响.

例 1　假设 $L(t)=t,\beta_1=2,\beta_2=1,\lambda_1=1,\lambda_2=1$，则根据注 1 的结果可得到破产概率的表达式为

$$\varphi(u,t)=-1/r+(1+1/r)\mathrm{e}^{ru},$$

其中 $r=-(1+4t)/(1+t)$.

最后得到在时刻 $t=0.25$、0.50、0.75、1.00、1.25 和初始盈余值 $x=0.2$、0.4、0.6、0.8、1.0、1.2 下的破产概率，具体结果如表 1 和图 1 所示.

从表 1 和图 1 的结果可以得到: 当时刻 t 确定时，破产概率 $\varphi(u,t)$ 随初始盈余 u 的增加而减小; 当初始盈余 u 确定，并且支出参数 $\beta_1=2$ 大于收入参数 $\beta_1=1$ 时，破产概率 $\varphi(u,t)$ 随着时间 t 的增加而减小. 下面将讨论支出参数和收入参数对破产概率的影响.

表 1　破产概率 $\varphi(u,t)$

t	u					
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2
0.35	0.869 1	0.777 4	0.713 1	0.668 0	0.636 4	0.614 3
0.70	0.800 8	0.673 4	0.591 9	0.539 8	0.506 5	0.485 2
1.05	0.759 0	0.613 8	0.526 5	0.473 8	0.442 2	0.423 1
1.40	0.730 8	0.575 5	0.485 8	0.434 1	0.404 3	0.387 1

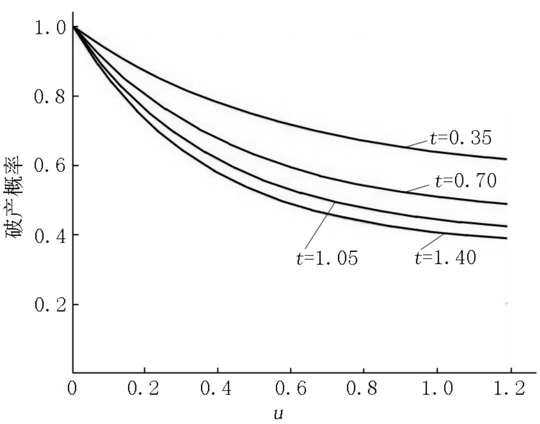

图 1　破产概率

例 2　假设 $L(t)=t,t=1,\lambda_1=1,\lambda_2=1$，则根据注 1 的结果可得到破产概率的表达式为

$$\varphi(u,t)=-\beta_1/r+(1+\beta_1/r)\mathrm{e}^{ru},$$

其中 $r=(2\beta_1\beta_2-3\beta_2^2+\beta_1^2)/(2(\beta_2-\beta_1))$. 随后，分别取 $u\in[0,8]$，$\beta_1=3.0$ 和 $\beta_2=1.50$、1.85、2.20、2.55，得到的破产概率结果如图 2 所示. 再分别取 $u\in[0,8]$，$\beta_1=1.0$、1.5、2.0、2.5 和 $\beta_2=0.50$ 得到的破产概率结果如图 3 所示.

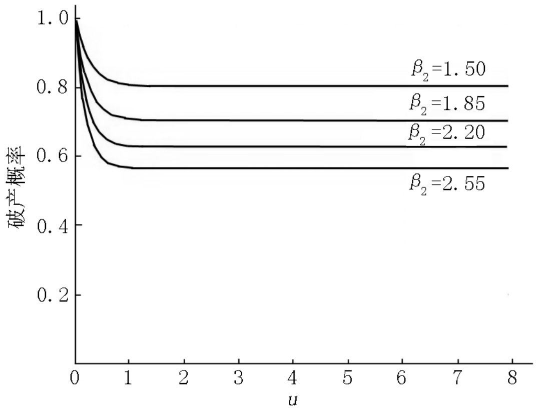

图 2　在 β_2 变换时的破产概率

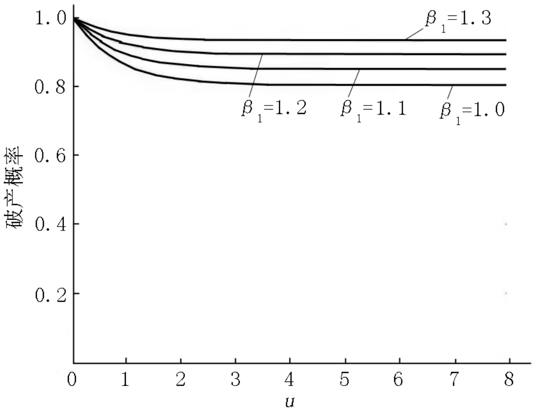

图3 在β_1变换时的破产概率

从图2和图3可以看出:当初始盈余u和支出参数β_1确定时,破产概率$\varphi(u,t)$随着收入参数β_2的增加而减小;当初始盈余u和收入参数β_2确定时,破产概率$\varphi(u,t)$随着支出参数β_1的增加而增加.同时,当初始盈余u足够大时,破产概率只依赖于支出参数β_1和收入参数β_2.

5 总结

本文在前人研究的基础上,将随机支出引入到带延迟的对偶风险模型中,并研究了该模型的破产问题.与文献[9-10]的方法不同,本文主要利用无穷小分析法和全概率公式以及结合随机过程的基本理论,推导出了破产时间的拉普拉斯变换、破产概率和破产时间的期望所满足的积分方程.同时,在考虑支出和收入变量均为指数分布的条件下,运用常微分方程的相关方法得到了具体解,并通过数值实例说明了破产概率与一些参数(初始盈余值u、时间t、支出参数β_1和收入参数β_2)之间的关系.这对符合该模型盈余过程的公司降低破产概率有参考价值.

6 参考文献

[1] Mazza C,Rullière D. A link between wave governed random motions and ruin processes [J]. Insurance: Mathematics and Economics,2004,35(2):205-222.

[2] Lefèvre Cl,Picard Ph. A nonhomogeneous risk model for insurance [J]. Computers and Mathematics with Applications,2006,51(2):325-334.

[3] Cramér H. Collective risk theory: a survey of the theory from the point of view of the theory of stochastic processes [M]. Stockholm: Nordiska Bokhandeln,1955.

[4] Avanzi B,Gerber H U,Elias S. Optimal dividends in the dual model [J]. Insurance: Mathematics and Economics,2007,41(2):653-667.

[5] Andrew C Y Ng. On a dual model with a dividend threshold [J]. Insurance Mathematics and Economics,2009,44(2):315-324.

[6] Wen Yuzhen,Yin Chuancun. On a dual model with barrier strategy [J]. Journal of Applied Mathematics,2012,2012(11):331-353.

[7] Cheung E C K. A unifying approach to the analysis of business with random gains [J]. Scandinavian Actuarial Journal,2012,2012(3):153-182.

[8] Waters H R,Papatriandafylou A. Ruin probabilities allowing for delay in claims settlement [J]. Insurance Mathematics and Economics,1985,4(2):113-122.

[9] Dassios A,Zhao Hongbiao. A risk model with delayed claims [J]. Journal of Applied Probability,2013,50(3):686-702.

[10] Zhu Lingjiong. A delayed dual risk model [J]. Stochastic Models,2017,33(1):149-170.

[11] 张万路,殷晓龙,赵翔华. 对偶延迟更新风险模型的占位时 [J]. 数学物理学报,2019,39(4):918-931.

[12] Mirasol N M. The output of an M/G/∞ queuing systems is Poisson [J]. Operations Research,1963,11(2):282-284.

The Delayed Dual Risk Model with Stochastic Expense

ZHOU Wenxin[1],SHEN Haiyan[2],ZHOU Guoli[2*]

(1. School of Economics and Management,Chongqing Normal University,Chongqing 401331,China;

2. School of Mathematics and Statistics,Chongqing University,Chongqing 401331,China)

Abstract: The case that expense follows exponential distribution in the delayed dual risk model is considered. Firstly,by using the infinitesimal method and the basic theory of stochastic processes,the integral equations of the Laplace transform of the ruin time,the ruin probability and the expected value of the ruin time are derived. Secondly,when the stochastic expense and revenue variables are exponential distribution,the explicit expressions for ruin probability and related ruin time by using the ordinary differential equation are obtained. Finally,numerical examples are given to demonstratethe effect of some parameters in this model on ruin probability.

Key words: dual risk model; delay; stochastic expense; integral equations; exponential distribution

(责任编辑:曾剑锋)