

文章编号: 1000-5862( 2021) 04-0362-04

## 带脉冲影响 2 层网络的同步

甘婷婷, 吴召艳\*

( 江西师范大学数学与统计学院 江西 南昌 330022)

摘要: 该文考虑带脉冲影响 2 层网络的同步问题. 首先, 根据 Lyapunov 函数方法和脉冲微分方程理论, 给出该网络的同步准则; 然后, 根据该准则实现同步需要的脉冲增益和脉冲间隔可以被估算出; 最后, 通过数值例子验证所得结果的有效性和正确性.

关键词: 2 层网络; 脉冲影响; 同步

中图分类号: O 231.5 文献标志码: A DOI: 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2021.04.07

### 0 引言

复杂网络常被用来构建由多个相互作用或相互影响个体构成的复杂系统的模型<sup>[1-8]</sup>, 其中节点表示个体, 连边表示个体间的相互作用或相互影响. 如在航空网络系统中, 节点表示每个机场, 连边表示机场间的航线, 即客流的走向; 再如在社会关系网中, 节点表示个人, 连边表示个人间相互影响的社会关系.

众所周知, 一些现实系统具有多层结构<sup>[9-10]</sup>. 如交通系统由航空系统、铁路系统、公路系统等构成的多层网络系统, 每个系统都可表示为一层网络, 不同层之间也会相互影响. 在社会关系网中, 2 个人之间可能既有工作上的关系又有朋友之间的关系, 且这些关系也会相互影响. 为了更好地刻画和研究这类系统, 研究者们提出了多层网络模型.

同步作为在复杂网络中一类典型的群集行为, 由于其在实际中的广泛应用而被深入研究<sup>[2]</sup>. 对于多层网络, 包括层内同步和层间同步<sup>[11-15]</sup>, 研究者们都进行了大量的研究. 但上述文献研究的 2 层网络之间的影响都是连续时间的, 对于带脉冲影响的 2 层网络的层间同步还较少见.

本文主要讨论带有脉冲影响 2 层网络的层间同步, 给出实现层间同步的充分条件, 以及得出脉冲增益和脉冲间隔的估算不等式.

### 1 模型描述

考虑如下带有脉冲影响的 2 层动态网络:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_i(t) &= f(\mathbf{x}_i(t)) + \sum_{j=1}^N a_{ij} \mathbf{H} \mathbf{x}_j(t) + \sum_{k=1}^{\infty} b(t) (\mathbf{y}_i(t) - \mathbf{x}_i(t)) \delta(t - t_k), \\ \dot{\mathbf{y}}_i(t) &= f(\mathbf{y}_i(t)) + \sum_{j=1}^N a_{ij} \mathbf{H} \mathbf{y}_j(t) + \sum_{k=1}^{\infty} b(t) (\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{y}_i(t)) \delta(t - t_k),\end{aligned}\quad (1)$$

其中  $i = 1, 2, \dots, N$ ;  $\mathbf{x}_i(t), \mathbf{y}_i(t) \in \mathbf{R}^n$  分别表示  $X$  层和  $Y$  层的节点  $i$  的状态向量;  $f(\cdot): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  为连续向量值函数;  $\mathbf{H} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ;  $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbf{R}^{N \times N}$ <sup>[16]</sup>, 定义为: 当一条边连接节点  $i$  和节点  $j (j \neq i)$  时,  $a_{ij} \neq 0$ , 否则  $a_{ij} = 0$ , 且满足  $a_{ii} = -\sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij}$ ;  $\{t_k\}$  为离散时间序列, 满足  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k$ , 且  $\lim_{k \rightarrow +\infty} t_k = +\infty$ ;  $b(t)$  为脉冲增益, 且当  $t \neq t_k$  时  $b(t) = 0$ ;  $\delta(\cdot)$  为狄拉克  $\delta$  函数. 根据狄拉克  $\delta$  函数的性质知网络 (1) 有如下等价形式:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_i(t) &= f(\mathbf{x}_i(t)) + \sum_{j=1}^N a_{ij} \mathbf{H} \mathbf{x}_j(t), \quad t \neq t_k, \\ \dot{\mathbf{y}}_i(t) &= f(\mathbf{y}_i(t)) + \sum_{j=1}^N a_{ij} \mathbf{H} \mathbf{y}_j(t), \quad t \neq t_k, \\ \mathbf{x}_i(t_k^+) &= \mathbf{x}_i(t_k^-) + b(t_k) (\mathbf{x}_i(t_k^-) - \mathbf{y}_i(t_k^-)), \\ \mathbf{y}_i(t_k^+) &= \mathbf{y}_i(t_k^-) + b(t_k) (\mathbf{y}_i(t_k^-) - \mathbf{x}_i(t_k^-)),\end{aligned}\quad (2)$$

其中  $\mathbf{x}_i(t_k^+) = \lim_{t \rightarrow t_k^+} \mathbf{x}_i(t)$ ,  $\mathbf{x}_i(t_k^-) = \lim_{t \rightarrow t_k^-} \mathbf{x}_i(t)$ ,  $\mathbf{y}_i(t_k^+) = \lim_{t \rightarrow t_k^+} \mathbf{y}_i(t)$ ,  $\mathbf{y}_i(t_k^-) = \lim_{t \rightarrow t_k^-} \mathbf{y}_i(t)$ . 假定方程 (2) 所有的解都是左连续的, 即  $\mathbf{x}_i(t) = \mathbf{x}_i(t_k^-)$ ,  $\mathbf{y}_i(t) = \mathbf{y}_i(t_k^-)$ . 图 1 给出了 8 个节点 2 层网络的示意图.

若  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{y}_i(t) - \mathbf{x}_i(t)\| = 0$ , 则称 2 层网络 (2) 实现了层间同步.

收稿日期: 2020-07-24

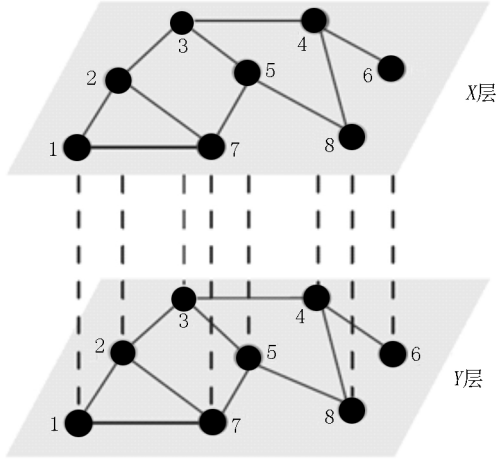
基金项目: 国家自然科学基金( 61463022, 61963019) 和江西省杰出青年人才计划( 20171BCB23031) 资助项目.

通信作者: 吴召艳( 1979—), 男, 江苏徐州人, 教授, 博士, 博士生导师, 主要从事复杂网络的建模、分析与控制研究.

E-mail: zhywu@jxnu.edu.cn

记  $e_i(t) = y_i(t) - x_i(t)$  为同步误差 则可得如下误差系统:

$$\begin{aligned}\dot{e}_i(t) &= f(y_i(t)) - f(x_i(t)) + \sum_{j=1}^N a_{ij} H e_j(t) \quad t \neq t_k, \\ e_i(t_k^+) &= e_i(t_k^-) + 2b(t_k) e_i(t_k^-).\end{aligned}$$



注: 实线表示层内的相互作用, 虚线表示层间的脉冲影响。

图1 由8个节点构成的2层网络示意图

假设1 对于函数  $f(\cdot)$  存在一个常数  $L > 0$  使得  $\|f(y) - f(x)\| \leq L \|y - x\|, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$  成立。

## 2 主要结果

记  $\lambda$  为矩阵  $2(LI_{N \times N} + A \otimes H)$  的最大特征值,  $\tau_k = t_k - t_{k-1}$  为脉冲间隔  $\theta(t_k) = (1 + 2b(t_k))^2$ 。

定理1 假定假设1成立, 若存在一个常数  $\varepsilon \in (0, 1)$  使得

$$\theta(t_k) \exp(\lambda \tau_k) < \varepsilon \quad k = 1, 2, \dots \quad (3)$$

成立, 则2层网络(2)实现层间同步。

证 考虑 Lyapunov 函数  $V(t) = \sum_{i=1}^N e_i^T(t) e_i(t)$ ,

当  $t \in (t_{k-1}, t_k)$  时, 计算  $V(t)$  的导数为

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &= 2 \sum_{i=1}^N e_i^T(t) \dot{e}_i(t) = 2 \sum_{i=1}^N e_i^T(t) (f(y_i(t)) - f(x_i(t))) + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} e_i^T(t) H e_j(t).\end{aligned}$$

记  $e(t) = (e_1^T(t), e_2^T(t), \dots, e_N^T(t))^T$  则有

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &\leq 2L \sum_{i=1}^N e_i^T(t) e_i(t) + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} e_i^T(t) H e_j(t) = \\ e^T(t) (2LI_{N \times N} + A \otimes H) e(t) &\leq \lambda V(t).\end{aligned}$$

可得对于  $t \in (t_{k-1}, t_k)$ ,

$$V(t) \leq \exp(\lambda(t - t_{k-1})) V(t_{k-1}). \quad (4)$$

当  $t = t_k$  时有

$$\begin{aligned}V(t_k^+) &= \sum_{i=1}^N e_i^T(t_k^+) e_i(t_k^+) = (1 + 2b(t_k))^2 \cdot \\ \sum_{i=1}^N e_i^T(t_k^-) e_i(t_k^-) &= \theta(t_k) \sum_{i=1}^N e_i^T(t_k^-) e_i(t_k^-).\end{aligned} \quad (5)$$

根据式(4)和式(5), 当  $k = 1$  时有

$$V(t) \leq \exp(\lambda(t - t_0)) V(t_0) \quad t \in (t_0, t_1),$$

$$V(t_1^-) \leq \exp(\lambda \tau_1) V(t_0),$$

$$V(t_1^+) = \theta(t_1) V(t_1^-) \leq \theta(t_1) \exp(\lambda \tau_1) V(t_0);$$

当  $k = 2$  时有

$$V(t) \leq \exp(\lambda(t - t_1)) V(t_1) \quad t \in (t_1, t_2),$$

$$V(t_2^-) \leq \exp(\lambda \tau_2) V(t_1) \leq \theta(t_1) \exp(\lambda(\tau_1 + \tau_2)) V(t_0),$$

$$V(t_2^+) = \theta(t_2) V(t_2^-) \leq \theta(t_1) \theta(t_2) \exp(\lambda(\tau_1 + \tau_2)) V(t_0).$$

根据数学归纳法可证对于任意的正整数  $k$  都有

$$V(t_k^+) \leq \prod_{p=1}^k \theta(t_p) \exp(\lambda \tau_p) V(t_0).$$

若条件(3)成立, 则有

$$V(t_k^+) \leq \prod_{p=1}^k \theta(t_p) \exp(\lambda \tau_p) V(t_0) \leq \varepsilon^k V(t_0),$$

由于  $\varepsilon \in (0, 1)$ , 当  $k \rightarrow +\infty$  时, 有  $\lim_{k \rightarrow +\infty} V(t_k^+) = 0$ 。

当  $t \in (t_k, t_{k+1})$  时,  $V(t) \leq \exp(\lambda(t - t_k)) V(t_k)$ 。这表明  $\forall k$  有  $\lim_{t \rightarrow +\infty} V(t) = 0$ 。根据  $V(t)$  的定义可知

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e_i(t) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

即网络(2)实现了层间同步。

## 3 数值例子

考虑由8个节点组成的2层网络(见图1)。选取节点动力学为如下 Chen 系统:

$$\dot{s}_1 = 35(s_2 - s_1), \quad \dot{s}_2 = -7s_1 + 28s_2 - s_1 s_3, \quad \dot{s}_3 = s_1 s_2 - 3s_3,$$

根据文献[16]的讨论, 可以选取  $L = 52.1$  使得假设1成立。选取内部耦合矩阵  $H$  为单位阵, 层内外部耦合矩阵为

$$A = 0.5 \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

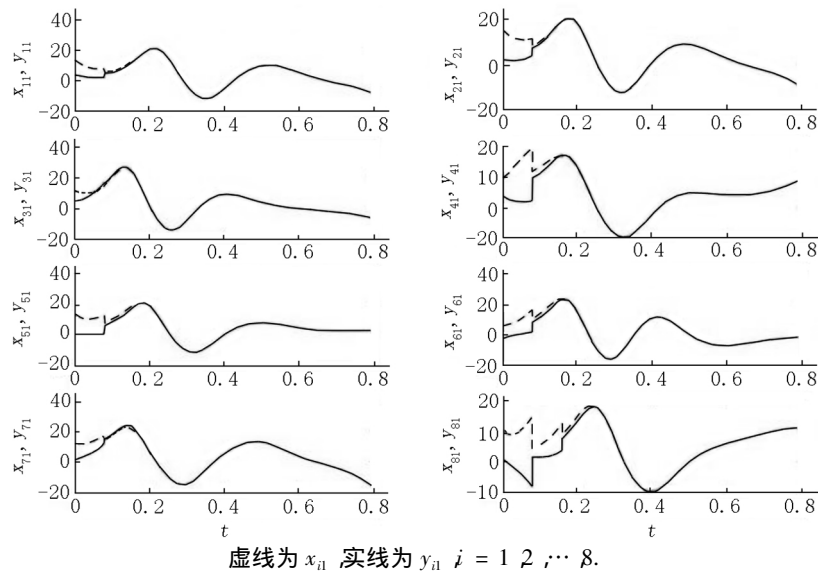
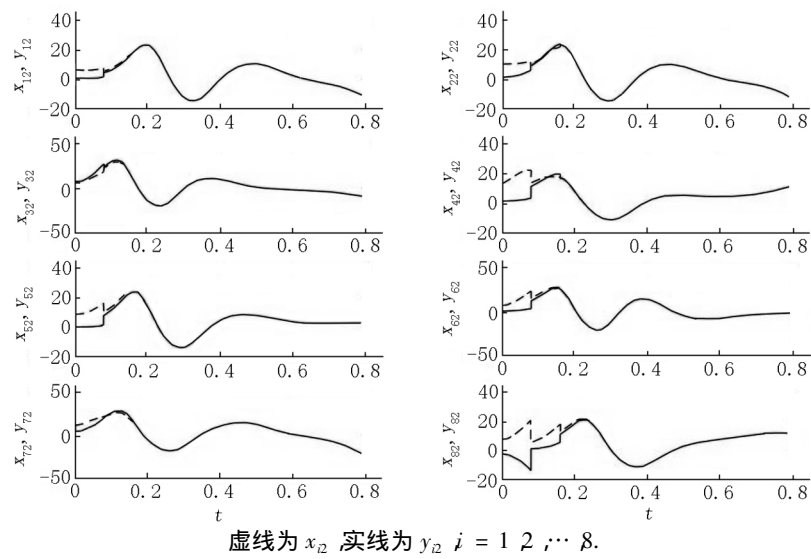
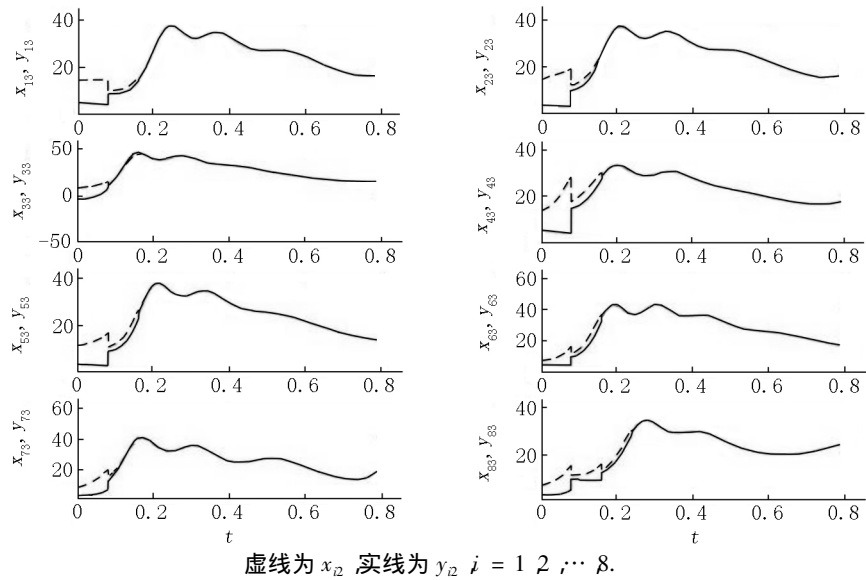
通过计算可得矩阵  $2(LI_{N \times N} + A \otimes H)$  的最大特征值  $\lambda = 109.5534$ 。

在数值模拟中, 选取脉冲增益  $b(t_k) = -0.49$ , 脉冲间隔  $\tau_k = t_k - t_{k-1} = 0.08$ , 则有

$$\theta(t_k) \exp(\lambda \tau_k) \approx 0.6401 < 1,$$

即条件(3)成立, 2层网络可以实现同步。

图2 ~ 图4分别给出了状态变量  $x_i$  和  $y_i$  3个分量的轨迹图, 可以看出2层网络实现了层间同步。

图2 状态变量  $x_i$  和  $y_i$  第1个分量的轨迹图图3 状态变量  $x_i$  和  $y_i$  第2个分量的轨迹图图4 状态变量  $x_i$  和  $y_i$  第3个分量的轨迹图

## 4 结论

本文考虑了一类具有相同拓扑结构带脉冲影响的2层网络的层间同步问题,基于Lyapunov函数法和脉冲微分方程理论,严格推导出了同步准则,数值例子验证了结果的正确性.

## 5 参考文献

- [1] Boccaletti S, Latora V, Moreno Y, et al. Complex networks: structure and dynamics [J]. *Physical Reports*, 2006, 424: 175-308.
- [2] Arenas A, Diaz-Guilera A, Kurths J, et al. Synchronization in complex networks [J]. *Physical Reports*, 2008, 469: 93-153.
- [3] Li Kezhan, Zhang Haifeng, Zhu Guanghu, et al. Suboptimal control and targeted constant control for semi-random epidemic networks [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2021, 51(4): 2602-2610.
- [4] Li Kezan, Yu Wenwu, Ding Yong. Successive lag synchronization on nonlinear dynamical networks via linear feedback control [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2015, 80(1/2): 421-430.
- [5] 严佳烨, 周嘉颖, 吴召艳. 离散时滞动力学网络的拓扑辨识 [J]. *江西师范大学学报: 自然科学版*, 2019, 43(1): 39-43.
- [6] 彭雅丽, 杨雨鑫, 曾欣怡, 等. 一种构建波动模态组的复杂网络分析方法研究 [J]. *江西师范大学学报: 自然科学版*, 2019, 43(3): 298-308.
- [7] 陈淑芳, 吴庆初. 网络上局部行为反应对爆发阈值的影响 [J]. *江西师范大学学报: 自然科学版*, 2015, 41(5): 531-535.
- [8] 吴召艳, 张平辉. 有色边动态网络的同步 [J]. *江西师范大学学报: 自然科学版*, 2013, 39(4): 428-431.
- [9] Kivela M, Arenas A, Barthelemy M, et al. Multilayer networks [J]. *Journal of Complex Networks*, 2014, 2: 203-271.
- [10] Boccaletti S, Bianconi G, Criado R, et al. The structure and dynamics of multilayer networks [J]. *Physical Reports*, 2014, 544: 1-122.
- [11] Sevilla-Escoboza R, Sendina-Nadal I, Leyva I, et al. Inter-layer synchronization in multiplex networks of identical layers [J]. *Chaos*, 2016, 26: 65304.
- [12] Leyva I, Sevilla-Escoboza R, Sendina-Nadal I, et al. Inter-layer synchronization in nonidentical multi-layer networks [J]. *Scientific Reports*, 2017(7): 45475.
- [13] Gambuzza L V, Frasca M, Gomez-Gardenes J. Intra-layer synchronization in multiplex networks [J]. *Europhysics Letters*, 2014, 110(2): 20010.
- [14] Shen Jie, Tang Longkun. Intra-layer synchronization in duplex networks [J]. *Chinese Physics: B*, 2018, 27: 100503.
- [15] Tang Longkun, Lu Junan, Lu Jinhu. A threshold effect of coupling delays on intra-layer synchronization in duplex networks [J]. *Science China: Technological Sciences*, 2018, 61: 1907-1914.
- [16] Yu Wenwu, Chen Guanrong, Lu Jinhu. On pinning synchronization of complex dynamical networks [J]. *Automatica*, 2009, 45: 429-435.

## The Synchronization of Two-Layer Dynamical Network with Impulsive Effect

GAN Tingting, WU Zhaoyan\*

(School of Mathematics and Statistics, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi 330022, China)

**Abstract:** The synchronization of two-layer network with impulsive effect is considered. According to Lyapunov function and impulsive differential equation theory, the synchronization criteria are derived. From these criteria, the impulsive gains and intervals can be easily estimated. Finally, the effectiveness and correctness of the obtained results are verified by a numerical example.

**Key words:** two-layer network; impulsive effect; synchronization

(责任编辑: 曾剑锋)