

文章编号: 1000-5862(2021)05-0514-06

圆域上2阶奇异变系数问题的一种有效的差分法

王财群, 安 静*

(贵州师范大学数学科学学院, 贵州 贵阳 550025)

摘要: 针对圆域上2阶奇异变系数问题, 提出了一种基于降维格式的有限差分方法. 首先, 利用极坐标变换, 将原问题转化为一组等价的1维问题; 其次, 针对每一个1维问题, 建立了适当的差分格式, 并证明了相应的误差估计; 最后, 给出了一些数值例子, 数值结果表明该算法是非常有效的.

关键词: 2阶问题; 降维格式; 有限差分法; 误差估计; 圆形区域

中图分类号: O 174 文献标志码: A DOI: 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2021.05.10

0 引言

奇异变系数方程问题有着重要的物理背景, 它在量子力学、计算流体动力学领域和热流中一类广泛物理问题的自动计算等方面有着广泛应用^[1-5]. 关于2阶奇异变系数问题的数值计算的主要方法包括有限元方法^[6-10]、有限差分法^[11]、三角域谱方法^[12-16]等. 然而, 对于圆域上奇异变系数问题, 由于涉及曲边边界, 为了获得高精度的数值解, 传统的有限差分法需要花费大量的计算时间和内存容量, 因此, 提出圆形区域上2阶奇异变系数问题的一些高精度的数值算法是有意义的. 据笔者所知, 很少报道关于用有限差分方法有效地求解这些特殊区域上的2阶奇异变系数问题. 因此, 针对圆域上2阶奇异变系数问题, 本文提出了一种基于降维格式的有限差分法. 首先, 利用极坐标变换, 将原问题转化为一组等价的1维问题; 其次, 针对每个1维问题, 建立了适当的差分格式, 并证明了相应的误差估计; 最后, 给出了一些数值例子来验证该算法是有效的.

1 降维格式

考虑下面的2阶奇异变系数问题

$$-\Delta u(x, y) + \alpha(r)u(x, y)/r = f(x, y) \quad (x, y) \in \Omega, \quad (1)$$

收稿日期: 2020-07-27

基金项目: 国家自然科学基金(11661022)和贵州省科学技术基金(黔科合平台人才[2018]5769-01号)资助项目.

通信作者: 安 静(1979—)男, 贵州思南人, 教授, 博士, 博士生导师. 主要从事偏微分方程数值解研究. E-mail: aj154@163.com

$$u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad (2)$$

其中 $0 \leq \alpha_* \leq \alpha(r) \leq \alpha^*$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. 注意到当 $r = 0$ 时, $\alpha(r) = r^k + c$ 或者 $\alpha(r) = c$ (其中 $k \in \mathbb{N}$, c 为非零常数) 时, 问题(1)和(2)是奇异变系数问题.

设 $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: R_1 < r < R_2\}$, 其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. 令 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $\varphi(r, \theta) = u(x, y)$, $F(r, \theta) = f(x, y)$, 则可得到极坐标下的 Laplace 算子

$$L\varphi = \partial_r(r\partial_r\varphi)/r + \varphi_{\theta\theta}/r^2,$$

则式(1)和式(2)可化为下列等价形式:

$$-L\varphi(r, \theta) + \alpha(r)\varphi(r, \theta)/r = F(r, \theta), \quad (r, \theta) \in (R_1, R_2) \times [0, 2\pi), \quad (3)$$

$$(i) \varphi(R_2, \theta) = 0, \quad \theta \in [0, 2\pi), \quad R_1 = 0, \quad (4)$$

$$(ii) \varphi(R_1, \theta) = \varphi(R_2, \theta) = 0, \quad \theta \in [0, 2\pi), \quad R_1 > 0. \quad (5)$$

由于 $\varphi(r, \theta)$ 与 $F(r, \theta)$ 在 θ 方向上是以 2π 为周期的, 则由傅里叶基函数展开可得

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{|m|=0}^{\infty} \varphi_m(r) e^{im\theta}, \quad F(r, \theta) = \sum_{|m|=0}^{\infty} f_m(r) e^{im\theta}. \quad (6)$$

根据式(6)可得

$$L\varphi = \sum_{|m|=0}^{\infty} \frac{1}{r} (\partial_r(r\partial_r\varphi_m) - m^2\varphi_m/r) e^{im\theta}. \quad (7)$$

若要使式(7)有意义, 则需要添加本质极条件^[18]:

$$m\varphi_m|_{r=0} = 0.$$

可以进一步化简为

$$\varphi_m(0) = 0 \quad (|m| \geq 1). \quad (8)$$

令 $l_m \varphi_m = \partial_r(r \partial_r \varphi_m) / r - m^2 \varphi_m / r^2$. 当 $R_1 = 0$ 时, 将式(6)代入式(3)和式(4), 再结合本质极条件式(8), 对于每个傅里叶模 m , 可以得到一系列等价的1维问题:

$$-l_m \varphi_m + \alpha(r) \varphi_m / r = f_m \quad r \in (0, R_2), \quad (9)$$

$$(i) \varphi_m(R_2) = 0 \quad (m = 0), \quad (10)$$

$$(ii) \varphi_m(0) = \varphi_m(R_2) = 0 \quad (|m| \geq 1). \quad (11)$$

令 $r = x$, $\mu_m(x) = \varphi_m(r)$, $\beta(x) = \alpha(r)$, 则式(9)~(11)等价于

$$-u_m'' - u_m' / x + m^2 u_m / x^2 + \beta(x) u_m / x = f_m \quad x \in (0, R_2), \quad (12)$$

$$(i) u_m(R_2) = 0 \quad (m = 0), \quad (13)$$

$$(ii) u_m(0) = 0 \quad \mu_m(R_2) = 0 \quad (|m| \geq 1). \quad (14)$$

类似地, 当 $R_1 > 0$ 时, 式(3)和式(5)等价于下面一系列的1维问题:

$$-l_m \varphi_m + \alpha(r) \varphi_m / r = f_m \quad r \in (R_1, R_2), \quad (15)$$

$$\varphi_m(R_1) = \varphi_m(R_2) = 0. \quad (16)$$

令 $r = x$, $\mu_m(x) = \varphi_m(r)$, $\beta(x) = \alpha(r)$, 则式(15)和式(16)等价于

$$-u_m'' - u_m' / x + m^2 u_m / x^2 + \beta(x) u_m / x = f_m \quad x \in (R_1, R_2), \quad (17)$$

$$u_m(R_1) = u_m(R_2) = 0. \quad (18)$$

2 差分格式的建立

为了利用差分格式求解问题(1)和(2), 首先将求解区域 $I = [R_1, R_2]$ 进行剖分, 记

$$\begin{aligned} I_h &= \{u \mid u = (u_0, \mu_1, \dots, \mu_N)\}, \\ I_h^0 &= \{u \mid u = (u_1, \mu_2, \dots, \mu_{N-1})\}, \\ \partial I_h &= \{u \mid u = (u_0, \mu_N)\}. \end{aligned} \quad (19)$$

设 $u \in I_h$, 有以下记号:

$$\Delta_x u_i = (u_{i+1} - u_{i-1}) / (2h), \quad \delta_x^2 u_i = (u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) / h^2.$$

在 x_i 处考虑方程(12), 有

$$-u''(x_i) - u'(x_i) / x_i + m^2 u(x_i) / x_i^2 + \beta(x_i) u(x_i) / x_i = f_m(x_i). \quad (20)$$

应用泰勒展开式, 构造差分算子

$$\begin{aligned} l_{mi} u(x_i) &= -u''(x_i) - u'(x_i) / x_i + m^2 u(x_i) / x_i^2 + \\ &\beta(x_i) u(x_i) / x_i = -(\delta_x^2 + \Delta_x / x_i - m^2 / x_i^2 - \beta(x_i) / x_i) u(x_i) + R_i. \end{aligned} \quad (21)$$

将式(21)代入式(20), 则有

$$-(\delta_x^2 + \Delta_x / x_i - m^2 / x_i^2 - \beta(x_i) / x_i) u(x_i) + R_i = f_m, \quad (22)$$

其中 $R_i = -h^2(d^4 u / dx^4) / 12 + O(h^3)$, $f_{mi} = f_m(x_i)$.

当 $R_1 = 0$ 时, 在式(22)中省略高阶无穷小量 R_i , 对问题(12)~(14)建立如下差分格式:

$$-\delta_x^2 u_i - \Delta_x u_i / x_i + m^2 u_i / x_i^2 + \beta(x_i) u_i / x_i = f_{mi}, \quad (23)$$

$$(i) u_N = 0 \quad (m = 0), \quad (24)$$

$$(ii) u_0 = u_N = 0 \quad (|m| \geq 1). \quad (25)$$

类似地, 当 $R_1 > 0$ 时, 对问题(17)和(18)建立如下差分格式:

$$-\delta_x^2 u_i - \Delta_x u_i / x_i + m^2 u_i / x_i^2 + \beta(x_i) u_i / x_i = f_{mi}, \quad (26)$$

$$u_0 = u_N = 0. \quad (27)$$

3 误差分析

为了简洁, 仅对 $R_1 > 0$ 的情形给出误差分析, 对 $R_1 = 0$ 的情形能够类似地推导.

首先引入几个范数的定义:

$$\|u\|_\infty = \max |u_i| \quad u \in I_h, \quad i \in \{0, 1, \dots, N\},$$

$$\|u\|_{\infty 0} = \max |u_i| \quad u \in I_h^0, \quad i \in \{1, 2, \dots, N-1\},$$

$$\|u\|_{\infty \partial I_h} = \max |u_i| \quad u \in \partial I_h, \quad i = 0, N.$$

引理1 假如在 I_h^0 上有

$$\tilde{l}_i u_i = -(\delta_x^2 + \Delta_x / x_i) u_i \leq 0 \quad (\tilde{l}_i u_i \geq 0),$$

则 u_i 在 I_h 上的极大值(极小值)只能在边界 ∂I_h 上达到.

证 假如 u_i 是 I_h^0 上的一个局部极大值, 即有

$$u_i \geq u_{i+1}, \quad u_i \geq u_{i-1},$$

且其中 $u_i > u_{i+1}$ 与 $u_i > u_{i-1}$ 至少有一个成立, 则

$$\begin{aligned} \tilde{l}_i u_i &= (2u_i - u_{i+1} - u_{i-1}) / h^2 + (u_{i-1} - u_i + u_{i+1} - \\ &u_{i+1}) / (2hx_i) > (u_{i+1} + u_{i-1} - u_{i+1} - u_{i-1}) / h^2 + (u_{i-1} - \\ &u_{i-1} + u_{i+1} - u_{i+1}) / (2hx_i) = 0. \end{aligned}$$

这与条件 $\tilde{l}_i u_i \leq 0$ 矛盾, 故 u_i 在 I_h 上的极大值只能在 ∂I_h 上出现. 极小值情况类似可证.

引理2 假定 u_i 是 I_h 上的函数, 且 $u_0 = u_N = 0$, 则有

$$\|u\|_\infty \leq C \|\tilde{l}_i u_i\|_{\infty 0},$$

其中 u 表示 u_i 构成的向量.

证 考虑定义在 I_h 上的 u_i 且在 ∂I_h 上满足 $u_0 =$

$u_N = 0$, 定义 I_h^0 上的函数

$$M_i = \tilde{l}_i u_i, \mu = (u_1, u_2, \dots, u_{N-1}) \in I_h^0, i = 1, 2, \dots, N-1.$$

显然

$$-\|M\|_{\infty} \leq \tilde{l}_i u_i \leq \|M\|_{\infty}, \quad (28)$$

其中 $M = (M_1, M_2, \dots, M_{N-1})$, 定义 $w_i = x_i^2/4$.

注意

$$\begin{aligned} \tilde{l}_i w_i &= -((x_{i+1}^2 - 2x_i^2 + x_{i-1}^2)/(4h^2) + (x_{i+1}^2 - x_i^2 + x_i^2 - x_{i-1}^2)/(8hx_i)) \\ &= -(h(x_{i+1} - x_i + x_i - x_{i-1})/(4h^2) + h(x_{i+1} + x_i + x_i + x_{i-1})/(8hx_i)) \\ &= -(1/2 + 1/2) = -1, \end{aligned}$$

于是由不等式(28)得

$$\tilde{l}_i(u_i - \|M\|_{\infty} w_i) = \tilde{l}_i u_i - \|M\|_{\infty} \tilde{l}_i w_i = \tilde{l}_i u_i + \|M\|_{\infty} \geq 0.$$

同理, 有 $\tilde{l}_i(u_i + \|M\|_{\infty} w_i) \leq 0$.

因此 $u - \|M\|_{\infty} w$ 的极小值与 $u + \|M\|_{\infty} w$ 的极大值均出现在边界 ∂I_h 上, 于是

$$\begin{aligned} \max_{\partial I_h} (u + \|M\|_{\infty} w) &= \|M\|_{\infty} \|w\|_{\infty} \geq u_i + \|M\|_{\infty} w_i \geq u_i, \mu \in I_h, i = 0, 1, \dots, N-1. \\ \text{或 } -\|M\|_{\infty} \|w\|_{\infty} &\leq u_i \leq \|M\|_{\infty} \|w\|_{\infty}, \text{ 因为 } \|w\|_{\infty} = R_2^2/4, \text{ 所以} \end{aligned}$$

$$\|u\|_{\infty} \leq C \|\tilde{l}_i u_i\|_{\infty}.$$

定理 1 假定 $v \in C^4(I)$ 是问题(17)和(18)的解, μ_i 为差分格式(26)和(27)的解, 则有

$$\|v - u\|_{\infty} \leq Ch^2.$$

证 为了表述简洁, 只针对 $m = \beta(x) = 0$. 设 v 为问题(17)和(18)的解, 由相容性条件知 v_i 满足

$$\tilde{l}_i v_i = f_{mi} + O(h^2). \quad (29)$$

因为 u_i 满足

$$\tilde{l}_i u_i = f_{mi}, \quad (30)$$

所以将式(29)与式(30)相减得

$$\tilde{l}_i(v_i - u_i) = O(h^2).$$

又因为在 ∂I_h 上 $v_i - u_i = 0$, 所以由引理 2 有

$$\|v - u\|_{\infty} \leq Ch^2.$$

4 算法的有效实现

本部分将给出如何用差分法来求解问题(1)和(2), 令

$$K_m = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 & & & \\ s_2 & p_2 & q_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & s_{N-2} & p_{N-2} & q_{N-2} \\ & & & s_{N-1} & p_{N-1} \end{pmatrix}_{(N-1) \times (N-1)},$$

其中 $p_i = 2x_i/h^2 + m^2/x_i + \beta$, $q_i = -x_i/h^2 - 1/(2h)$, $s_i = -x_i/h^2 + 1/(2h)$.

当 $R_1 = 0, m = 0$ 时, 将式(19)代入式(23)和(24)则可得到线性系统

$$A_0 U^0 = F_0,$$

其中 $A_0 = \begin{pmatrix} -1/(2h) + \beta & 1/(2h) \\ & s_1 & & & \\ & & K_0 & & \end{pmatrix}_{N \times N}$, $F_0 = (x_0 f_0(x_0), x_1 f_0(x_1), \dots, x_{N-1} f_0(x_{N-1}))^T$, $U^0 = (u_0^0, \mu_1^0, \dots, \mu_{N-1}^0)^T$.

当 $|m| \geq 1$ 时, 将式(19)代入式(23)和(25),

则可得到线性系统

$$B_m U^m = F_m,$$

其中 $B_m = K_m U^m = (u_1^m, \mu_2^m, \dots, \mu_{N-1}^m)^T$, $F_m = (x_1 f_m(x_1), x_2 f_m(x_2), \dots, x_{N-1} f_m(x_{N-1}))^T$.

当 $R_1 > 0$ 时, 将式(19)代入式(26)和(27), 则可得到线性系统

$$C_m U^m = \tilde{F}_m,$$

其中 $C_m = K_m U^m = (u_1^m, \mu_2^m, \dots, \mu_{N-1}^m)^T$, $\tilde{F}_m = (x_1 f_m(x_1), x_2 f_m(x_2), \dots, x_{N-1} f_m(x_{N-1}))^T$.

5 数值实验

现在进行一系列数值实验, 为了验证算法的有效性, 在 MATLAB R2016b 上进行编程计算.

设 $u_{Mh}(x, y)$ 是精确解 $u(x, y)$ 的逼近解, 由极坐标变换

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta (R_1 < r < R_2, 0 \leq \theta < 2\pi)$$

可得到

$$u(x, y) = U(r, \theta) = \sum_{|m|=0}^{\infty} u_m(r) e^{im\theta},$$

$$u_{Mh}(x, y) = U_{Mh}(r, \theta) = \sum_{|m|=0}^{\infty} u_{mh}(r) e^{im\theta},$$

然后, 定义精确解 $u(x, y)$ 与数值解 $u_{Mh}(x, y)$ 之间的误差:

$$e(u(x, y), u_{Mh}(x, y)) = \|u(x, y) - u_{Mh}(x, y)\|_{\infty} = \|U(r, \theta) - U_{Mh}(r, \theta)\|_{\infty}.$$

例 1 当 $R_1 = 0, R_2 = 1$ 时, 取 $\alpha(r) = r^2 + 1$, $u(x, y) = x(x^2 + y^2 - 1)e^{(x^2 + y^2)}$, 显然 $u(x, y)$ 满足边界条件(2), $f(x, y)$ 可由 $u(x, y)$ 代入方程(1) 得到. 在表 1 中对于不同的 M 和 h 列出了数值解与精确解

之间的误差, 并在图 1 和图 2 中分别画出了精确解与数值解的图像. 为了进一步表明算法的有效性和理论结果的正确性, 在图 3 和图 4 中又分别给出了精确解与数值解的误差图像.

表 1 当 M 和 h 取不同值时, 精确解与数值解之间的误差

h	$M = 6$	$M = 8$	$M = 10$	$M = 12$
1/32	0.001 8	0.001 8	0.001 8	0.001 8
1/64	$4.456\ 1 \times 10^{-4}$	$4.456\ 1 \times 10^{-4}$	$4.456\ 1 \times 10^{-4}$	$4.456\ 1 \times 10^{-4}$
1/128	$1.114\ 4 \times 10^{-4}$	$1.114\ 4 \times 10^{-4}$	$1.114\ 4 \times 10^{-4}$	$1.114\ 4 \times 10^{-4}$
1/256	$2.786\ 2 \times 10^{-5}$	$2.786\ 2 \times 10^{-5}$	$2.786\ 2 \times 10^{-5}$	$2.786\ 2 \times 10^{-5}$

由表 1 可以看出: 当 $h \leq 1/64, M = 6$ 时, 误差 $e(u(x, y), \mu_{Mh}(x, y))$ 至少达到了 10^{-4} 的精度. 同时, 从图 1 ~ 图 4 可以看出数值解随着 h 的减小而收敛到精确解.

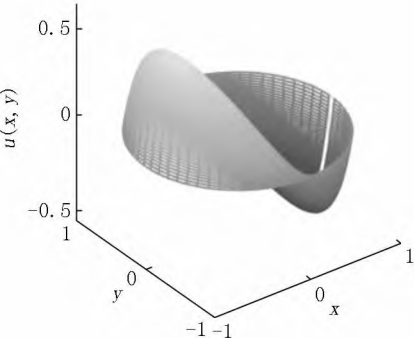


图 1 当 $h = 1/256$ 时, 精确解的图像

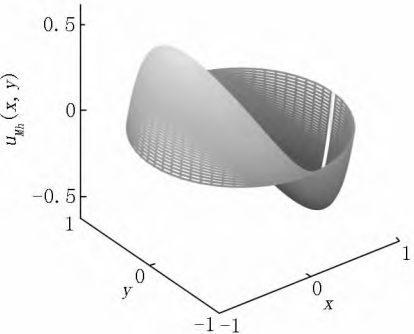


图 2 当 $h = 1/256, M = 12$ 时, 数值解的图像

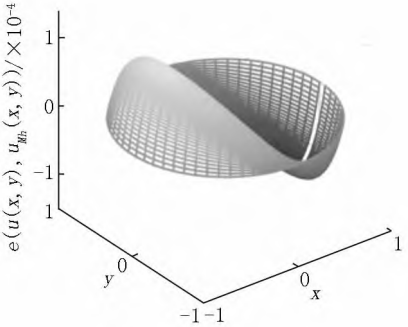


图 3 当 $h = 1/128, M = 10$ 时, 精确解与数值解的误差图像

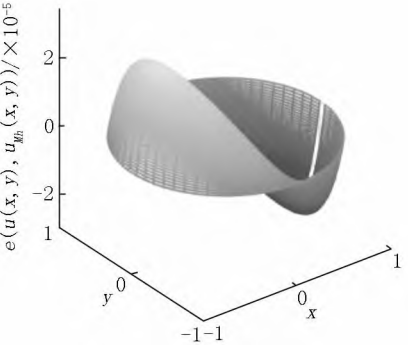


图 4 当 $h = 1/256, M = 12$ 时, 精确解与数值解的误差图像

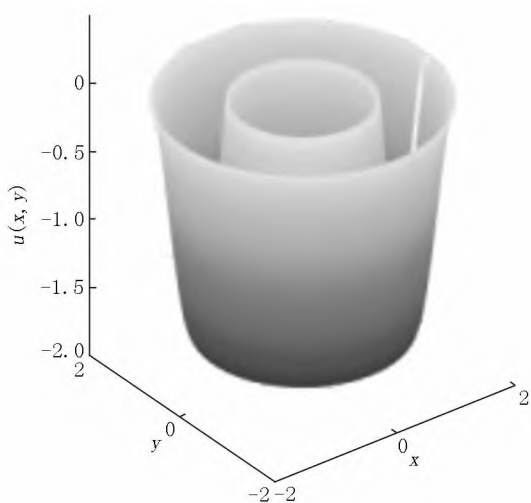
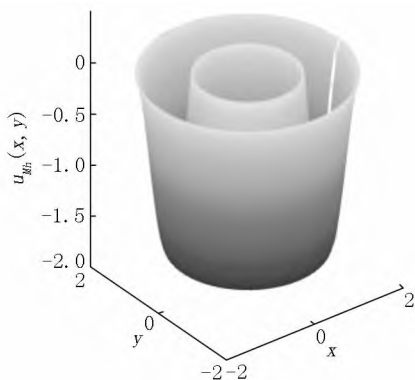
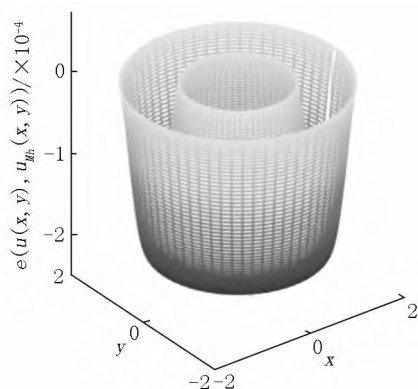
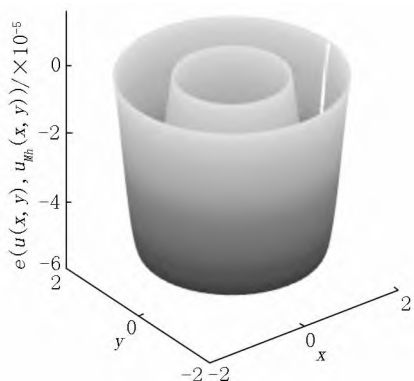
例 2 当 $R_1 = 1, R_2 = 2$ 时, 取 $\alpha(r) = 2/3$, $u(x, y) = (x^2 + y^2 - 4) \sin(x^2 + y^2 - 1)$, 显然 $u(x, y)$ 满足边界条件(2), 可将 $u(x, y)$ 代入方程(1) 得到 $f(x, y)$. 在表 2 中对于不同的 M 和 h 列出了数值

表 2 当 M 和 h 取不同值时, 精确解与数值解之间的误差

h	$M = 6$	$M = 8$	$M = 10$	$M = 12$
1/32	0.003 3	0.003 3	0.003 3	0.003 3
1/64	$8.124\ 2 \times 10^{-4}$	$8.124\ 2 \times 10^{-4}$	$8.124\ 2 \times 10^{-4}$	$8.124\ 2 \times 10^{-4}$
1/128	$2.030\ 9 \times 10^{-4}$	$2.030\ 9 \times 10^{-4}$	$2.030\ 9 \times 10^{-4}$	$0.030\ 9 \times 10^{-4}$
1/256	$5.077\ 0 \times 10^{-5}$	$5.077\ 0 \times 10^{-5}$	$5.077\ 0 \times 10^{-5}$	$5.077\ 0 \times 10^{-5}$

解与精确解之间的误差. 类似地, 在图 5 和图 6 中分别画出了精确解与数值解的图像. 为了进一步表明算法的有效性和理论结果的正确性, 在图 7 和图 8 中又分别给出了精确解与数值解的误差图像.

从表 2 可以看出: 当 $h \leq 1/64, M = 6$ 时, 误差 $e(u(x, y), \mu_{Mh}(x, y))$ 至少达到了 10^{-4} 的精度. 同时, 从图 5 ~ 图 8 可以看出数值解随着 h 的减小而收敛到精确解.

图5 当 $h = 1/256$ 时 精确解的图像图6 当 $h = 1/256$ $M = 12$ 时 数值解的图像图7 当 $h = 1/128$ $M = 10$ 时 精确解与数值解的误差图像图8 当 $h = 1/256$ $M = 12$ 时 精确解与数值解的误差图像

6 总结

首先,针对2阶奇异变系数问题,提出了一种基于降维格式的有限差分方法,该方法主要利用极坐标变换将2维问题转化为一组等价的1维问题;然后,引入极条件,构造适当的差分格式,并给出了相应的误差估计;最后,通过具体的数值算例表明了算法的有效性,该算法还可应用于高阶的微分方程.

7 参考文献

- [1] Andrews G E, Askey R, Ranjan R. Special functions [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
- [2] Grebenkov D, Nguyen B. Geometrical structure of Laplacian eigen functions [J]. SIAM Rev, 2013, 55(4): 601-667.
- [3] Felli V, Ferrero A, Terracini S. Asymptotic behavior of solutions to Schrödinger equations near an isolated singularity of the electromagnetic potential [J]. Journal of the European Mathematical Society, 2011, 13(1): 119-174.
- [4] Fournais S, Hoffmann-Ostenhof M, Hoffmann-Ostenhof T, et al. Analytic structure of solutions to multiconfiguration equations [J]. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2009, 42(31): 1943-1953.
- [5] Ahn H J. Vibration of a pendulum consisting of a bob suspended from a wire: the method of integral equations [J]. Quarterly of Applied Mathematics, 1981, 39(1): 109-117.
- [6] Apel T, Nicaise S. The finite element method with anisotropic mesh grading for elliptic problems in domains with corners and edges [J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 1998, 21(6): 519-549.
- [7] Babuška I, Kellogg R B, Pitkääranta J. Direct and inverse error estimates for finite elements with mesh refinements [J]. Numerische Mathematik, 1979, 33(4): 447-471.
- [8] Chen Huajie, He Lianhua, Zhou Aihui. Finite element approximations of nonlinear eigenvalue problems in quantum physics [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2011, 200(21/22): 1846-1865.
- [9] Li Hengguang, Mazzucato A L, Nistor V. Analysis of the finite element method for transmission/mixed boundary value problems on general polygonal domains [J]. Electronic Transactions on Numerical Analysis, 2010, 37(1): 41-69.
- [10] Bcu C, Nistor V, Zikatanov L T. Improving the rate of convergence of high order finite elements on polygons and domains with cusps [J]. Numerische Mathematik, 2005,

- 100(2):165-184.
- [11] Amore P, Boyd J P, Fernández F M, et al. High order eigenvalues for the Helmholtz equation in complicated non-tensor domains through Richardson Extrapolation of second order finite differences [J]. Journal of Computational Physics 2016, 312: 252-271.
- [12] Dubiner M. Spectral methods on triangles and other domains [J]. Journal of Scientific Computing, 1991, 6(4): 345-390.
- [13] Rynne B P, Sleeman B D. The interior transmission problem and inverse scattering from inhomogeneous media [J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 1991, 22(6): 1755-1762.
- [14] Shen Jie. Efficient Spectral-Galerkin method I: direct solvers of second- and fourth-order equations using Legendre polynomials [J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 1994, 15(6): 1489-1505.
- [15] Bjorstad P E, Tjostheim B P. Timely communication: efficient algorithms for solving a fourth order equation with Spectral-Galerkin method [J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 1997, 18(2): 621-632.
- [16] Shen Jie, Tang Tao, Wang Lilian. Spectral methods: algorithms analysis and applications [M]. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2011.
- [17] An Jing, Li Huiyuan, Zhang Zhiming. Spectral-Galerkin approximation and optimal error estimate for biharmonic eigenvalue problems in circular/spherical/elliptical domains [J]. Numerical Algorithms, 2020, 84(2): 427-455.

The Efficient Finite Difference Method for Second Order Singular Variable Coefficient Problems in a Circular Domain

WANG Caiqun, AN Jing*

(School of Mathematical Sciences, Guizhou Normal University, Guiyang Guizhou 550025, China)

Abstract: The finite difference method based on dimension reduction scheme is proposed for the second order singular variable coefficient problems in a circular domain. Firstly, the original problem is transformed into a series of equivalent one-dimensional problems by using polar coordinate transformation. Then for each one-dimensional problem, the appropriate difference scheme and corresponding error estimate are established. Finally, some numerical examples are given and the numerical results show that the algorithm is very effective.

Key words: second-order problem; dimension reduction scheme; finite difference method; error estimation; circular domain

(责任编辑: 曾剑锋)