切洛太,覃锋,傅丽. n-一致模的构造(Ⅰ)[J]. 江西师范大学学报(自然科学版),2022,46(1):1-6.
QIE Luotai,QIN Feng,FU Li. The construction methods (Ⅰ) of n-uninorms [J]. Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science),2022,46(1):1-6.

文章编号:1000-5862(2022)01-0001-06

n-一致模的构造(Ⅰ)

切洛太[1],覃 锋[1,2*],傅 丽[1]

(1.青海民族大学数学与统计学院,青海 西宁 810007;2.江西师范大学数学与统计学院,江西 南昌 330022)

摘要:借助Clifford半群序和理论,该文提出了2种n-一致模的构造方法.基于这些构造方法,可以构造许多新的n-一致模.利用这些构造方法,证明了对具有连续基础算子n-一致模的分解定理的逆命题都成立.

关键词:模糊连接词;n-一致模;一致模;序和

中图分类号:O 159;B 815.6 **文献标志码**:A **DOI**:10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2022.01.01

0 引言

为将一致模算子和零模算子纳入统一的框架,P. Akella[1]于2007年提出了n-局部单位元的概念,定义了n-一致模,研究了它们的基本结构.鉴于2-一致模是一类非常重要的n-一致模,Zong Wenwen等[2]研究了2-一致模的结构,根据2-一致模在3点$(0,1)$、$(0,z_1)$和$(z_1,1)$的可能取值,将2-一致模分成5个相互独立的子类,完全刻画了其中的3个子类的结构,剩下的2个子类的结构还有部分没有刻画.这表明完全刻画所有2-一致模的结构是困难的,自然完全刻画所有n-一致模的结构也是困难的.因此后来的研究者通过附加一些特殊性质的办法来研究它们的结构.主要是从3个方面附加特殊性质:(i)附加代数性质,如将n-一致模的n-单位元取为特殊的2-单位元,就能分别获得零模[3]、一致零模和零一致模[4-6],或要求每个元素都是幂等元,就获得幂等n-一致模的结构刻画[7].(ii)附加一些分析性质,如要求基础算子是连续的,文献[7-9]对这类n-一致模算子进行了深入研究.(iii)附加一些逻辑性质或应用要求,如研究2-一致模算子的迁移性、分配性和条件分配性等,覃锋研究团队[10]和刘华文研究团队[2]在这方面做了大量的研究工作.

本文将从构造的角度来研究n-一致模,这不同于上述研究思路.详细说来就是,借助Clifford半群序和理论,提出了2种n-一致模的构造方法,基于这些构造方法,可以构造许多新的n-一致模.此外,利用这些构造方法,证明了在文献[8]中对具有连续基础算子n-一致模的分解定理的逆命题都成立.

1 预备知识

首先回顾三角模、三角余模和一致模的概念及其相关性质[11-13].

称二元函数$T:[0,1]^2\to[0,1]$为三角模(简称T-模),若它满足交换性、结合性、关于每个变元递增且有单位元1.称二元函数$S:[0,1]^2\to[0,1]$为三角余模(简称T-余模),若它满足交换性、结合性、关于每个变元递增且有单位元0.三角模的对偶函数是三角余模.对于任意的三角模T都可以通过方程$S(x,y)=1-T(1-x,1-y)$获得它的对偶三角余模S,反之亦然.这揭示了三角模和三角余模之间的对偶性.

称二元函数$U:[0,1]^2\to[0,1]$为一致模,若U满足结合性、交换性、关于每个变元单调递增,并且存在点$e\in[0,1]$使得$\forall x\in[0,1]$有$U(x,e)=x$.此时称e为U的单位元.

显然当$e=1$和$e=0$时,U分别退化为三角模和三角余模.当一致模U的单位元$e\in(0,1)$时,称

收稿日期:2021-09-24

基金项目:国家自然科学基金(11971210,61967008),江西省主要学科学术和技术带头人培养计划(20171ACB20010)和江西省自然科学基金(20192BAB201009)资助项目.

通信作者:覃 锋(1976—),男,湖北鹤峰人,教授,博士,博士生导师,主要从事模糊逻辑与模糊控制研究.E-mail:qinfeng923@163.com

U 为真一致模. 此外,由一致模的结合性和单调性不难获得 $U(0,1)\in\{0,1\}$,当 $U(0,1)=0$ 时,称 U 为合取一致模,当 $U(0,1)=1$ 时,称 U 为析取一致模[12]. 为了方便叙述,本文仅考虑真一致模. 对于任意真一致模 U,定义 2 个二元算子 T_U、S_U:$[0,1]^2\to[0,1]$分别为 $T_U(x,y)=U(ex,ey)/e$,$S_U(x,y)=(U(e+(1-e)x,e+(1-e)y)-e)/(1-e)$. 显然 T_U 和 S_U 分别是三角模和三角余模. 换句话说,任意真一致模 U 在区域$[0,e]^2$ 上是一个三角模,在区域$[e,1]^2$ 上是一个三角余模. T_U 和 S_U 分别被称为基础三角模和基础三角余模,把单位区域内的剩余部分记为 $A(e)$,即

$$A(e)=[0,e)\times(e,1]\cup(e,1]\times[0,e)=[0,1]^2\backslash([0,e)^2\cup[e,1]^2).$$

在区域 $A(e)$ 内,任意一致模 U 的取值均以它变元的取小和取大作为约束边界,即 $\forall(x,y)\in A(e)$ 都有

$$\min(x,y)\leqslant U(x,y)\leqslant\max(x,y).$$

称一致模 U 具有连续的基础算子,若它的基础三角模 T_U 和基础三角余模 S_U 都是连续的. 为了表述的完整性,接下来回顾零模的定义. 所谓零模就是二元函数 F:$[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$满足结合性、交换性、关于每个变元单调递增,$\exists z_1\in[0,1]$使得 $\forall x\in[0,1]$有 $F(z_1,x)=z_1$,当 $x\leqslant z_1$ 时,有 $F(0,x)=x$,当 $x\geqslant z_1$ 时,有 $F(1,x)=x$,此时称 z_1 为 F 的零元或零化子. 下面介绍 n-一致模算子的定义与基本性质,n-一致模是一致模和零模的推广.

定义 1[1-2] 若 U^n:$[0,1]^2\to[0,1]$为二元交换函数,$0=z_0<z_1<z_2<\cdots<z_{n-1}<z_n=1$,$e_i\in[z_{i-1},z_i]$,$i=1,2,\cdots,n$,当 $x\in[z_{i-1},z_i]$时满足 $U^n(e_i,x)=x$,则称 U^n 有 n-单位元$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}_{z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}}$.

定义 2[1-2] 令 U^n:$[0,1]^2\to[0,1]$为二元交换函数,$0=z_0<z_1<z_2<\cdots<z_{n-1}<z_n=1$,$e_i\in[z_{i-1},z_i]$,$i=1,2,\cdots,n$. 若它有交换性、结合性和关于每个变元单调递增,有 n-单位元$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}_{z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}}$,则称 U^n 为 n-一致模.

下面回顾 n-一致模的基本性质.

注 1 若 n-一致模 U^n:$[0,1]^2\to[0,1]$有 n-单位元$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}_{z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}}$,则

(i) U^n 限制在$[z_{i-1},e_i]^2$ 上同构于某三角模并记为 $T_i(i=1,2,\cdots,n)$;

(ii) U^n 限制在$[e_i,z_i]^2$ 上同构于某三角余模并记为 $S_i(i=1,2,\cdots,n)$;

(iii) U^n 限制在$[z_{i-1},z_i]^2$ 上同构于某一致模并记为 $U_i(i=1,2,\cdots,n)$;

(iv) U^n 限制在$[z_i,z_j]^2$ 上同构于某$(j-i)$一致模,$i,j\in\{1,2,\cdots,n\}$,$i<j$.

称 n-一致模 U^n 具有连续的基础算子,若它的所有基础三角模 $T_1,T_2,\cdots,T_n$ 和所有基础三角余模 $S_1,S_2,\cdots,S_n$ 都连续. 由文献[1]的引理 9 可知对任意 n-一致模 U^n 都满足 $U^n(0,1)\in\{z_i\mid i=1,2,\cdots,n\}$. 特别地,若 n-一致模 U^n 满足 $U^n(0,1)=z_k$,$k\in\{1,2,\cdots,n-1\}$,则称其是第 I 类 n-一致模. 这样的 n-一致模可以看成作用在$[0,z_k]^2$ 上的 k-一致模、作用在$[z_k,1]^2$ 上的$(n-k)$-一致模以及当$(x,y)\in\{[0,z_k]\times[z_k,1]\}\cup\{[z_k,1]\times[0,z_k]\}$时 $U^n(x,y)=z_k$ 的 3 个算子的“黏合”.

前面的所有算子都是定义在单位区间$[0,1]$上,下面推广到一般情况. 为此需要引入线性变换和分段线性变换概念. 为了方便表述,用$/a,b/$表示 4 类区间$[a,b]$、$(a,b]$、$[a,b)$、(a,b)之一,定义线性变换 φ:$/a,b/\to/c,d/$为

$$\varphi(x)=(x-a)(d-c)/(b-a)+c.$$

若$/a,b/=/0,1/$,则二元算子 V:$/0,1/^2\to/0,1/$通过线性变换可以变为 U:$/c,d/^2\to/c,d/$,$U(x,y)=\varphi(V(\varphi^{-1}(x),\varphi^{-1}(y)))$. 这允许借助于$/0,1/$上的二元算子定义$/c,d/$上的二元算子 U,即 U 在$/c,d/$上运算封闭,它与定义在$[0,1]$上的某对应二元运算限制在$/0,1/^2$ 上关于 φ 同构. 如定义在$/c,d/$上的三角模 T 是指它在$/c,d/$上运算封闭,与定义在$[0,1]$上的某三角模限制在$/0,1/^2$ 上关于 φ 同构;定义在$/c,d/$上的第 I 类 n-一致模 V 是指它在$/c,d/$上运算封闭,与定义在$[0,1]$上的某第 I 类 n-一致模限制在$/0,1/^2$ 上关于 φ 同构. 进一步地,若某一定义在$[0,1]$上具有连续基础算子的第 I 类 n-一致模限制在$/0,1/^2$ 上关于 φ 与之同构,则称其为定义在$/c,d/$上具有连续基础算子的第 I 类 n-一致模.

下面借助特殊的同构映射——分段线性变换——来观察在$[0,1]$上的一致模. 若 $0\leqslant a<b<c<d\leqslant1$,$v\in[b,c]$,$U$:$[0,1]^2\to[0,1]$是有单位元 $e\in[0,1]$的一致模,分段线性变换 ψ:$[0,1]\to[a,b)\cup\{v\}\cup(c,d]$为

$$\psi(x)=\begin{cases}(b-a)x/e+a, & x\in[0,e),\\ x, & x=e,\\ d-(1-x)(d-c)/(1-e), & \text{其他}.\end{cases}\tag{1}$$

定义二元函数 $U_v^{a,b,c,d}$:$([a,b)\cup\{v\}\cup(c,d])^2\to[a,b)\cup\{v\}\cup(c,d]$为 $U_v^{a,b,c,d}(x,y)=\psi(U(\psi^{-1}(x),\psi^{-1}(y)))$,称之为在$([a,b)\cup\{v\}\cup(c,d])^2$ 上的一致模,显然逆变换 ψ^{-1}将在$([a,b)\cup\{v\}\cup(c,d])^2$ 上的一致模变成在$[0,1]^2$ 上的一致模. 进一步地,若 $U_v^{a,b,c,d}$ 与在$[0,1]$上某一具有连续基础算

子的一致模同构,则称 $U_v^{a,b,c,d}$ 为定义在 $[a,b)\cup\{v\}\cup(c,d]$ 上具有连续基础算子的一致模.

引理1[14]　设 $A\neq\varnothing$ 是全序集,$(G_\alpha)_{\alpha\in A}$ 是一族半群,这里 $(G_\alpha)=(X_\alpha,*_\alpha)$,$X_\alpha\neq\varnothing$,$\forall\alpha,\beta\in A$,当 $\alpha<\beta$ 时,X_α 与 X_β 不相交,或者 $X_\alpha\cap X_\beta=\{X_{\alpha,\beta}\}$ 并且 $X_{\alpha,\beta}$ 既是 G_α 的单位元又是 G_β 的零化子,$\forall\gamma\in A$,$\alpha<\gamma<\beta$ 有 $X_\gamma=\{X_{\alpha,\beta}\}$. 令 $X=\bigcup_{\alpha\in A}X_\alpha$,定义二元运算 $*$ 为

$$x*y=\begin{cases}x*_\alpha y, & (x,y)\in X_\alpha\times X_\alpha,\\ x, & (x,y)\in X_\alpha\times X_\beta,\alpha<\beta,\\ y, & (x,y)\in X_\alpha\times X_\beta,\beta<\alpha,\end{cases}$$

则 $G=(X,*)$ 是一个半群,并且 G 交换当且仅当 $\forall\alpha\in A$,半群 G_α 是交换的.

2　从序和的观点来构造 n-一致模

本部分以一致模和 n-一致模为出发点,借助 Clifford 序和定理,提出了2种构造 n-一致模的方法. 与文献[8]中具有连续基础算子的 n-一致模的对应分解定理进行比较,发现这些分解定理的逆命题都成立.

2.1　构造方法1

在 Clifford 序和定理中,基础集 X_α 和 X_β 不相交或者相交于 $\{X_{\alpha,\beta}\}$. 这里考虑相交的情况,即假设外层一致模和内层 n-一致模相交于一点,提出了一种 n-一致模的构造方法,称这种方法为基于序和的 n-一致模的构造方法1.

定理1　设 $0=z_0\leqslant x_0<e_1\leqslant z_1<\cdots<z_{n-1}\leqslant e_n\leqslant y_0\leqslant z_n=1$,$e_i\in[z_{i-1},z_i]$,$z_{i-1}<z_i$,$i=1,2,\cdots,n$,$G_1$ 是在 $[0,x_0)\cup\{z_k\}\cup(y_0,1]$ 上以 z_k 为单位元的一致模,$k\in\{1,2,\cdots,n-1\}$,G_2 是在 $[x_0,y_0]$ 上以 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}_{z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}}$ 为 n-单位元的第Ⅰ类 n-一致模,则 G_1 与 G_2 的序和 V 是在 $[0,1]$ 上的 n-一致模,这里的序关系为 $1<2$.

证　注意到半群 G_1 和 G_2 相交于点 z_k,且 z_k 既是半群 G_1 的单位元又是半群 G_2 的零化子,因此根据引理1可知序和 V 在 $[0,1]$ 上是结合的且交换的. 要验证 V 是 n-一致模,只需验证它在 $[0,1]$ 上有 n-单位元 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}_{z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}}$ 且单调即可. 首先验证它有 n-单位元 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}_{z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}}$,为此需考虑下面4种情况.

(ⅰ)若 $x\in[0,x_0)$,则由引理1、$e_1\in[x_0,y_0]$ 以及序关系 $1<2$ 可知 $V(e_1,x)=x$.

(ⅱ)若 $x\in[x_0,z_1]$,则由引理1以及 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}_{z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}}$ 是 G_2 的 n-单位元可知 $V(e_1,x)=G_2(e_1,x)=x$.

(ⅲ)若 $x\in(z_{i-1},z_i]$,$i=2,3,\cdots,n-1$,则由引理1以及 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}_{z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}}$ 是 G_2 的 n-单位元可知 $V(e_1,x)=G_2(e_i,x)=x$.

(ⅳ)若 $x\in(z_{n-1},y_0]$,则由引理1以及 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}_{z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}}$ 是 G_2 的 n-单位元可知 $V(e_n,x)=G_2(e_n,x)=x$.

(ⅴ)若 $x\in(y_0,1]$,则由引理1,$e_n\in[x_0,y_0]$ 以及序关系 $1<2$ 可知 $V(e_n,x)=x$.

综上所述,V 有 n-单位元 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}_{z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}}$. 接下来验证 V 是单调的,为此需考虑下面3种情况.

(ⅰ)$x\in[0,x_0)$. 当 $y\in[0,x_0)$ 时,由 G_1 是在 $[0,x_0)\cup\{z_k\}\cup(y_0,1]$ 上以 z_k 为单位元的任意一致模可知 $V(x,y)\leqslant V(x,z_k)$;当 $y\in[x_0,y_0]$ 时,由序和的定义可知 $V(x,y)=x$;当 $y\in(y_0,1]$ 时,由 G_1 是在 $[0,x_0)\cup\{z_k\}\cup(y_0,1]$ 上以 z_k 为单位元的一致模可知 $V(x,y)\geqslant V(x,z_k)=x$.

(ⅱ)$x\in[x_0,y_0]$. 当 $y\in[0,x_0)$ 时,由序和的定义可知 $V(x,y)=y<x_0$;当 $y\in[x_0,y_0]$ 时,由 G_2 是在 $[x_0,y_0]$ 上以 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}_{z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}}$ 为 n-单位元的 n-一致模可知 $x_0=V(x_0,x_0)\leqslant V(x,y)\leqslant V(y_0,y_0)=y_0$;当 $y\in(y_0,1]$ 时,由序和的定义可知 $V(x,y)=y>y_0$.

(ⅲ)$x\in(y_0,1]$. 当 $y\in[0,x_0)$ 时,由 G_1 是在 $[0,x_0)\cup\{z_k\}\cup(y_0,1]$ 上以 z_k 为单位元的一致模可知 $V(x,y)\leqslant V(x,z_k)=x$;当 $y\in[x_0,y_0]$ 时,由序和的定义可知 $V(x,y)=x$;当 $y\in(y_0,1]$ 时,由 G_1 是在 $[0,x_0)\cup\{z_k\}\cup(y_0,1]$ 上以 z_k 为单位元的一致模可知 $V(x,y)\geqslant V(x,z_k)=x$.

综上所述,V 是单调的. 这就证明了 V 是在 $[0,1]$ 上的一个 n-一致模.

从定理1的证明不难看出:序和 V 的 n-单位元 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}_{z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}}$ 是由 G_2 的 n-单位元扩充而成. 根据引理1、序关系 $1<2$ 以及 $z_k\in[x_0,y_0]$ 可知 $\forall x\in[x_0,y_0]$ 有 $V(z_k,x)=z_k$,因此 G_2 必须是在 $[x_0,y_0]$ 上的第Ⅰ类 n-一致模. 此外,除要求 G_1 和 G_2 分别是一致模和第Ⅰ类 n-一致模外,就没有其他限制了. 接下来考虑在定理1中的一些特殊情况.

注2　(ⅰ)在定理1中,若令 $x_0=0$,$y_0=1$,则 G_1 就退化为只有1个元素的平凡半群 $(\{z_k\},I_d)$,此时 $V=G_2$. 根据引理1以及序关系 $1<2$ 知 $\forall x\in[0,1]$ 有 $V(z_k,x)=z_k$,这表明任意第Ⅰ类 n-一致模都可写成这种序和形式. 对于其他 n-一致模而言,它们都不能写成这种序和形式,这是因为 $\exists x_0\in[0,1]$ 使得 $V(x_0,z_k)\neq z_k$.

(ii)在定理 1 中,若令 $x_0=0$(或 $y_0=1$),则 G_1 就退化为定义在 $\{z_k\}\cup(y_0,1]$ 上的三角余模(在 $[0,x_0)\cup\{z_k\}$ 上的三角模),此时 V 可以看成 G_2 和三角余模(三角模)的序和,这表明第 I 类 n-一致模与三角余模(三角模)按这种方式生成的序和仍然是 n-一致模. 进一步地,注意到 G_1 限制在 $(y_0,1]$、$[0,x_0)$ 上关于运算是封闭的,与限制在 $[0,1]$ 上的三角余模(在 $[0,1]$ 上的三角模)同构,与 G_2 不相交,故也可将序和 V 看成是第 I 类 n-一致模与限制的三角模(或限制的三角余模)的序和.

例 1　令 U_1 是在 $[0,1]$ 上的"3Π"一致模,即

$$U_1(x,y)=\begin{cases}0,(x,y)\in\{(1,0),(0,1)\},\\ xy/((1-x)(1-y)+xy),\text{其他}.\end{cases}\tag{2}$$

$\psi:[0,1]\to[0,1/4)\cup\{1/2\}\cup(3/4,1]$ 为分段线性同构映射,$G_1(x,y)=\psi(U_1(\psi^{-1}(x),\psi^{-1}(x)))$,

$$G_2(x,y)=\begin{cases}1/2,(x,y)\in\{[1/4,1/2]\times[1/2,\\ 3/4]\}\cup\{[1/2,3/4]\times[1/4,1/2]\},\\ \min(x,y),(x,y)\in\{[1/4,3/8]^2\}\cup\\ \{[1/2,3/4]^2\backslash[5/8,3/4]^2\},\\ \max(x,y),\text{其他},\end{cases}\tag{3}$$

则 G_1 和 G_2 的序和 V 是在 $[0,1]$ 上的 2-一致模.

对在 $[0,1]$ 上满足下面命题中条件的具有连续基础算子的 n-一致模,文献[8]的定理 5.10 给出了分解定理. 其实,它的逆命题也成立,现总结如下.

命题 1　令 $U^n:[0,1]^2\to[0,1]$ 是二元运算,记 $U^n(0,1)=z_k$,$k\in\{1,2,\cdots,n-1\}$,$x_0=\inf\{x\in[0,1]\mid U^n(x,z_k)=z_k\}$,$y_0=\sup\{x\in[0,1]\mid(x,z_k)=z_k\}$,$U^n(x_0,y_0)=z_k$,则 U^n 是以 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}_{z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}}$ 为 n-单位元且具有连续基础算子的 n-一致模当且仅当它可分解为 2 个半群 G_1 和 G_2 的序和,其中 G_1 是在 $[0,x_0)\cup\{z_k\}\cup(y_0,1]$ 上以 z_k 为单位元且具有连续基础算子的一致模,G_2 是在 $[x_0,y_0]$ 上以 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}_{z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}}$ 为 n-单位元且具有连续基础算子的第 I 类 n-一致模,序关系为 $1<2$.

证　由文献[8]的定理 5.10 可知必要性成立. 为证明充分性,根据定理 1,只需证明 U^n 在 $\{[0,x_0]\times\{x_0\}\}\cup\{\{x_0\}\times[0,x_0]\}$ 和 $\{[y_0,1]\times\{y_0\}\}\cup\{\{y_0\}\times[y_0,1]\}$ 上连续即可. 使用 U^n 的单调性和交换性以及序和的结构定理,只需证明 $\forall x\in(0,x_0)$,截线 $U^n(x,\cdot)$ 在点 x_0 处左连续即可,因为其他情况完全类似可证. 事实上,记 U_1 是定义在 $[0,1]$ 上有单位元 e_1 的一致模并与 G_1 同构,则 $\forall x\in(0,x_0)$ 有

$$\lim_{y\to x_0^-}U^n(x,y)=\lim_{y\to x_0^-}\psi(U_1(\psi^{-1}(x),\psi^{-1}(y)))=\psi(U_1(\psi^{-1}(x),\lim_{y\to x_0^-}\psi^{-1}(y)))=\psi(U_1(\psi^{-1}(x),e_1))=\psi(\psi^{-1}(x))=x.$$

2.2　构造方法 2

定理 1 讨论了在 2 个半群的基本集相交于一点时其序和构成 n-一致模的情况. 但由引理 1 可知,当 2 个半群不相交时,其序和构成仍然能构成半群. 因此,把从 2 个不相交半群出发构造 n-一致模的方法称为基于序和的 n-一致模的构造方法 2. 这里考虑 2 种情况. 首先考虑 G_1 是在 $[0,x_0]\cup(y_0,1]$ 上以 x_0 为单位元的任意一致模,G_2 是在 $(x_0,y_0]$ 上以 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}_{z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}}$ 为 n-单位元的 n-一致模.

定理 2　设 $0=z_0\leqslant x_0\leqslant e_1\leqslant z_1<\cdots<z_{n-1}\leqslant e_n\leqslant y_0\leqslant z_n=1$,$e_i\in[z_{i-1},z_i]$,$z_{i-1}<z_i$,$i=1,2,\cdots,n$,$G_1$ 是在 $[0,x_0]\cup(y_0,1]$ 上以 x_0 为单位元的一致模,G_2 是在 $(x_0,y_0]$ 上以 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}_{z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}}$ 为 n-单位元的 n-一致模,则 G_1、G_2 的序和 V 是在 $[0,1]$ 上的 n-一致模,这里的序关系为 $1<2$.

证　因为 G_1 与 G_2 不相交,由引理 1 可知 V 在 $[0,1]$ 上是结合与交换的. 要验证 V 是在 $[0,1]$ 上的 n-一致模,只需验证它在 $[0,1]$ 上有 n-单位元 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}_{z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}}$ 且是单调的即可. 首先验证它在 $[0,1]$ 上有 n-单位元 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}_{z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}}$,为此需考虑下面 5 种情况.

(i)若 $x\in[0,x_0]$,则由引理 1、$e_1\in(x_0,y_0]$ 以及序关系 $1<2$ 可知 $V(e_1,x)=x$.

(ii)若 $x\in(x_0,z_1]$,则由引理 1 以及 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}_{z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}}$ 是 G_2 的 n-单位元可知 $V(e_1,x)=G_2(e_1,x)=x$.

(iii)若 $x\in(z_{i-1},z_i]$,$i=2,3,\cdots,n-1$,则由引理 1 以及 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}_{z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}}$ 是 G_2 的 n-单位元可知 $V(e_i,x)=G_2(e_i,x)=x$.

(iv)若 $x\in(z_{n-1},y_0]$,则由引理 1 以及 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}_{z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}}$ 是 G_2 的 n-单位元可知 $V(e_n,x)=G_2(e_n,x)=x$.

(v)若 $x\in(y_0,1]$,则由引理 1、$e_n\in(x_0,y_0]$ 以及序关系 $1<2$ 可知 $V(e_n,x)=x$.

综上所述,V 有 n-单位元 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}_{z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}}$. 接下来验证 V 是单调的,为此需考虑下面 3 种情况.

(i)$x\in[0,x_0]$. 当 $y\in[0,x_0]$ 时,由 G_1 是在 $[0,x_0]\cup(y_0,1]$ 上以 x_0 为单位元的任意一致模可知 $V(x,y)\leqslant V(x,x_0)=x$;当 $y\in(x_0,y_0]$ 时,由序和的定义可知 $V(x,y)=x$;当 $y\in(y_0,1]$ 时,利用 G_1 是在 $[0,x_0]\cup(y_0,1]$ 上以 x_0 为单位元的任意一致模可

知 $V(x,y)\geqslant V(x,x_0)=x$.

(ii)$x\in(x_0,y_0]$. 当 $y\in[0,x_0]$时,由序和的定义可知 $V(x,y)=y\leqslant x_0$;当 $y\in[x_0,y_0]$时,由 G_2 是在$(x_0,y_0]$上以$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}_{z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}}$为 n-单位元的 n-一致模可知 $x_0<V(x,y)\leqslant V(y_0,y_0)=y_0$;当 $y\in(y_0,1]$时,由序和的定义可知 $V(x,y)=y>y_0$.

(iii)$x\in(y_0,1]$. 当 $y\in[0,x_0]$时,由 G_1 是在$[0,x_0]\cup(y_0,1]$上以 x_0 为单位元的任意一致模可知 $V(x,y)\leqslant V(x,x_0)=x$;当 $y\in(x_0,y_0]$时,由序和的定义可知 $V(x,y)=x$;当 $y\in(y_0,1]$时,由 G_1 是在$[0,x_0]\cup(y_0,1]$上以 x_0 为单位元的任意一致模可知 $V(x,y)\geqslant V(x,x_0)=x$.

综上所述,V 是单调的. 这就证明了 V 是在$[0,1]$上的 n-一致模.

在定理 2 中,序和 V 的 n-单位元$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}_{z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}}$可看成 由 G_2 的 n-单位元扩充而成. 下面考虑在定理 2 中的一些特殊情况.

注 3　(i)在定理 2 中,若令 $x_0=0,y_0=1$,则 G_1 就退化为只有 1 个元素的平凡半群$(\{0\},I_d)$,根据引理 1 以及 $1<2$ 可知$\forall x\in[0,1]$有 $V(0,x)=0$,特别地有 $V(0,1)=0$.

(ii)在定理 2 中,若令 $x_0=0$(或 $y_0=1$),则 G_1 就退化为定义在$\{0\}\cup(y_0,1]$上的三角余模($[0,x_0]$上的三角模),此时 V 可以看成 G_2 和三角余模(三角模)的序和,这表明定义在$(x_0,y_0]$上的 n-一致模与三角模(三角余摸)的按这种方式生成的序和仍然是 n-一致模.

(iii)在定理 2 中,若令 $e_n=1$,则必有 $y_0=1$,此时 G_1 退化为定义在$[0,x_0]$上的三角模,G_2 退化为定义在$(x_0,1]$上有 n-单位元$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}_{z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}}$的 n-一致模. 从定理 2 的证明不难发现$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}_{z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}}$也是序和 V 的 n-单位元.

(iv)在定理 2 中,若令 $e_1=0$,则必有 $x_0=0$,此时 G_1 退化为定义在$\{0\}\cup(y_0,1]$上的三角余模,G_2 退化为定义在$(0,y_0]$上有 n-单位元$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}_{z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}}$的 n-一致模. 根据定理 2 的证明过程不难发现$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}_{z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}}$也是序和 V 的 n-单位元.

对在$[0,1]$上满足下面命题中条件的具有连续基础算子的 n-一致模,文献[8]的定理 5.10 给出了分解定理. 其实,它的逆命题也成立,现总结如下.

命题 2　令 $U^n:[0,1]^2\to[0,1]$是二元运算,记 $U^n(0,1)=z_k,k\in\{1,2,\cdots,n-1\},x_0=\inf\{x\in[0,1]\mid U^n(x,z_k)=z_k\},y_0=\sup\{x\in[0,1]\mid U^n(x,z_k)=z_k\},U^n(x_0,y_0)=x_0,U^n(z_k,y_0)=z_k,\forall y>y_0$ 有 $U^n(x_0,y)=y$,则 U^n 是以$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}_{z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}}$为 n-单位元且具有连续基础算子的 n-一致模当且仅当它可分解为 2 个半群 G_1 和 G_2 的序和,其中 G_1 是在$[0,x_0]\cup(y_0,1]$上以 x_0 为单位元且具有连续基础算子的一致模,G_2 是在$(x_0,y_0]$上以$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}_{z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}}$为 n-单位元且具有连续基础算子的第 I 类 n-一致模,序关系为 $1<2$.

证　由文献[8]的定理 5.10 可知必要性成立. 为证明充分性,根据定理 2,只需证明 V 在$\{[0,x_0]\times\{x_0\}\}\cup\{\{x_0\}\times[0,x_0]\}$和$\{[y_0,1]\times\{y_0\}\}\cup\{\{y_0\}\times[y_0,1]\}$上连续即可. 但剩余的证明过程完全类似命题 1 的证明过程,故略去.

接下来,考虑第 2 种情况:定理 2 的对偶情况,即假定 G_1 是在$[0,x_0)\cup[y_0,1]$上以 y_0 为单位元的任意一致模,G_2 是在$[x_0,y_0)$上以$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}_{z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}}$为 n-单位元的 n-一致模. 在这里仅罗列结论,因为证明过程完全类似,故略去.

定理 3　设 $0=z_0\leqslant x_0\leqslant e_1\leqslant z_1<\cdots<z_{n-1}\leqslant e_n\leqslant y_0\leqslant z_n=1,e_i\in[z_{i-1},z_i],z_{i-1}<z_i,i=1,2,\cdots,n$,$G_1$ 是在$[0,x_0)\cup[y_0,1]$上以 y_0 为单位元的一致模,G_2 是在$[x_0,y_0)$上以$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}_{z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}}$为 n-单位元的 n-一致模,则 G_1,G_2 的序和 V 是在$[0,1]$上的 n-一致模,这里的序关系为 $1<2$.

在定理 3 中,序和 V 的 n-单位元$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}_{z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}}$可看成由 G_2 的 n-单位元扩充而成. 下面考虑在定理 3 中的一些特殊情况.

注 4　(i)在定理 3 中,若令 $x_0=0,y_0=1$,则 G_1 就退化为只有 1 个元素的平凡半群$(\{1\},I_d)$,根据引理 1 以及 $1<2$ 可知$\forall x\in[0,1]$有 $V(1,x)=1$,特别地有 $V(1,0)=1$.

(ii)在定理 3 中,若令 $x_0=0$(或 $y_0=1$),则 G_1 就退化为定义在$[y_0,1]$上的三角余模(在$[0,x_0)\cup\{1\}$上的三角模),此时 V 可以看成 G_2 和三角余模(三角模)的序和,这表明定义在$[x_0,y_0)$上的 n-一致模与三角余模(三角模)按这种方式生成的序和仍然是 n-一致模.

注意到定理 3 除要求 G_1 和 G_2 不相交外,仅要求 G_2 是一般的 n-一致模,没有其他任何限制. 因此,在定理 3 中当 G_2 是第 I 类 n-一致模时,结论显然成立. 对于在$[0,1]$上满足下面命题中条件的具有连续基础算子的 n-一致模,虽然文献[8]没有给出分解定理,但是类似于命题 2,它有如下完全刻画,这里略去其证明.

命题 3 令 $U^n:[0,1]^2\to[0,1]$是二元运算,记 $U^n(0,1)=z_k,k\in\{1,2,\cdots,n-1\},x_0=\inf\{x\in[0,1]\mid U^n(x,z_k)=z_k\},y_0=\sup\{x\in[0,1]\mid U^n(x,z_k)=z_k\},U^n(x_0,y_0)=y_0,U^n(z_k,x_0)=z_k,\forall x<x_0$ 有 $V(y_0,x)=x$,则 U^n 是以$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}_{z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}}$为 n-单位元且具有连续基础算子的 n-一致模当且仅当它可分解为 2 个半群 G_1 和 G_2 的序和,其中 G_1 是在$[0,x_0)\cup[y_0,1]$上以 y_0 为单位元且具有连续基础算子的一致模,G_2 是在$[x_0,y_0)$上以$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}_{z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}}$为 n-单位元且具有连续基础算子的第 I 类 n-一致模,序关系为 $1<2$.

3 结束语

本文从 2 个半群出发,借助 Clifford 半群序和理论,提出了 2 种 n-一致模的构造方法,利用这些构造方法,能构造大量新的 n-一致模,丰富了对 n-一致模的认识. 此外,利用这些构造方法,证明了文献[8]中关于具有连续基础算子 n-一致模的分解定理的逆命题都成立. 在未来的工作中,将致力于 n-一致模的新构造方法,尤其是在有界格上的构造方法.

4 参考文献

[1] AKELLA P. Structure of n-uninorms [J]. Fuzzy Sets and Systems,2007,158(15):1631-1651.

[2] ZONG Wenwen,SU Yong,LIU Huawen,et al. On the structure of 2-uninorms [J]. Information Sciences,2018,467:506-527.

[3] CALVO T,DE BAETS B,FODOR J. The functional equations of Frank and Alsina for uninorms and nullnorms [J]. Fuzzy Sets and Systems,2001,120(3):385-394.

[4] SUN Feng,QU Xiaobing,ZHU Ling. On the migrativity of uni-nullnorms [J]. Journal of Intelligent and Fuzzy Systems,2019,37(4):5269-5279.

[5] SUN Feng,WANG Xueping,QU Xiaobing. Uni-nullnorms and null-uninorms [J]. Journal of Intelligent and Fuzzy Systems,2017,32(3):1969-1981.

[6] SUN Feng,WANG Xueping,QU Xiaobing. Characterizations of uni-nullnorms with continuous Archimedean underlying t-norms and t-conorms [J]. Fuzzy Sets and Systems,2018,334(1):24-35.

[7] MESIAROVÁ- ZEMÁNKOVÁ A. Characterization of idempotent n-uninorms [J]. Fuzzy Sets and Systems,2022,427(1):1-22.

[8] MESIAROVÁ-ZEMÁNKOVÁ A. The n-uninorms with continuous underlying t-norms and t-conorms [J]. International Journal of General Systems,2021,50(1):92-116.

[9] MESIAROVÁ-ZEMÁNKOVÁ A. Characterizing functions of n-uninorms with continuous underlying functions [EB/OL].(2021-02-04)[2021-10-19]. https://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp? tp=&arnumber=9347748.

[10] WANG Gang,QIN Feng,LI Wenhuang. Distributivity and conditional distributivity for uni-nullnorms [J]. Fuzzy Sets and Systems,2019,372(1):34-49.

[11] DRYGÁS P. Discussion of the structure of uninorms [J]. Kybernetika,2005,41(2):213-226.

[12] FODOR J C,YAGER R R,RYBALOV A. Structure of uninorms [J]. International Journal of Uncertainty,Fuzziness and Knowledge-Based Systems,1997,5(4):411-127.

[13] KLEMENT E P,MESIAR R,PAP E. Triangular norms [M]. Dordrecht:Kluwer Academic Publishers,2000.

[14] CLIFFORD A H. Naturally totally ordered commutative semigroups [J]. American Journal of Mathematics,1954,76(3):631-646.

[15] YAGER R R,RYBALOV A. Uninorm aggregation operators [J]. Fuzzy Sets and Systems,1996,80(1):111-120.

[16] AKELLA P. C-sets of n-uninorms [J]. Fuzzy Sets and Systems,2009,160(1):1-21.

The Construction Methods (I) of n-Uninorms

QIE Luotai[1],QIN Feng[1,2*],FU Li[1]

(1. School of Mathematics and Statistics,Qinghai Minzu University,Xining Qinghai 810007,China;

2. School of Mathematics and Statistics,Jiangxi Normal University,Nanchang Jiangxi 330022,China)

Abstract:By means of Clifford's semigroup ordinal sum theory,two kinds of methods to constructing a new n-uninorm are given. Based on these methods,there are a number of new n-uninorms. Moreover,applying these results,it is proved that the converse propositions of all decomposed theorems for all n-uninorms with continuous underlying functions hold.

Key words:fuzzy connective;n-uninorms;uninorms;ordinal sum

(责任编辑:曾剑锋)