肖莉娜,卢美华. 偏好、强序刻画和社会选择形式空间等价[J]. 江西师范大学学报(自然科学版),2022,46(1):7-11.
XIAO Lina,LU Meihua. The preference,strong order characterization and equivalence of social choice form space[J]. Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science),2022,46(1):7-11.

文章编号:1000-5862(2022)01-0007-05

偏好、强序刻画和社会选择形式空间等价

肖莉娜,卢美华*

(江西科技学院理学教学部,江西 南昌　330022)

摘要:为研究一般社会选择函数的构造机制,该文通过一般性偏好的运算形成偏好的强序刻画,并基于此证明在形式背景下社会选择函数全空间的一些等价性和自等价性. 但是在强序刻画下,社会选择函数的存在性定理(Arrow 定理)的构造相对简化,约束公理系统的配置也简化,这为全面形式化处理 Arrow 定理提供了有力工具.

关键词:强序偏好;分影;形式空间等价

中图分类号:O 225　　**文献标志码**:A　　**DOI**:10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2022.01.02

0　引言

Arrow 不可能性定理有 70 多年的研究历史,已经有一些具体证明,但各种证明都有一些瑕疵[1]. 如直观上非独裁性的约束非常弱,而独裁是强约束条件,本质上独裁函数个数是可列举的,并且独裁约束矛盾于其他所有约束公理,从而逻辑上其他约束公理不可能推导出独裁性,但它们与非独裁性又不相容. 在 Arrow 不可能性定理的证明中,J. Geanakoplos[2] 已经归纳出 2 种路径:一种是 K. J. Arrow 等[3] 基于决定集的证明,另一种是 S. Barberá 等[4] 依据关键投票者(Pivotal voters)的证明;Yu Ning[5] 归纳了 3 种具体实现的方法. 事实上,每隔 10 年,都会有著名的学者提出新的证明方法[6-11],并于 2014 年 5 个诺贝尔经济学奖获得者再次讨论了 Arrow 定理的证明[12]. 在这些文献的证明性过程中克服一个瑕疵,但又会产生另一个瑕疵. 近期,左勇华等[1] 指出:在本质上该问题是一个公理系统的相容性问题. 而 Hu Liu[13] 采用了形式语句刻画给出了逻辑形式的证明,也预示了 Arrow 定理证明需要借助元数学模式.

由于 Arrow 定理涉及整个社会科学的逻辑基础,所以能否进行构造性证明或证明其不成立,除各社会科学外对决策理论最为重要,尤其是群决策理论[14]. 同时,考虑其保障存在性的约束公理配置,这里至少是一个重要的机制设计方法. 同时 Arrow 定理的证明和偏好刻画方法十分相依,为厘清 Arrow 定理的技术环节,本文基于强序标定投票者条件,构造问题空间,证明相互包含性和自包含性,为 Arrow 定理研究提供了一个简化途径,并且也能预示着群决策模式能处理好单决策模式,更是落实文献[1]提出的公理形式化思路.

1　社会选择框架

1.1　基本知识

为刻画社会选择函数(简写 SCF)框架,需要规范刻画偏好、序、强序、弱序、偏序、全序、模等基本概念. 偏好是一个经济学概念,依赖序的刻画,在对偏好进行公理化刻画后偏好至少是一个偏序,而规范刻画这些概念的基础为关系代数. 另外,严格偏好是不包含无差异关系. 由于不同文献对于偏好、强序、弱性等的刻画具有较大差异,因此本文给出一些基本概念、符号及其说明.

对于泛指的有限集合 S, $\| S \|$ 表示 S 中元素个数,被称为 S 的范数. 对于泛指关系 R,即给定集合

收稿日期:2021-06-19
基金项目:国家社会科学基金(17BJL025)资助项目.
作者简介:肖莉娜(1983—),女,江西九江人,副教授,主要从事计算数学的研究. E-mail:46000863@qq.com
通信作者:卢美华(1978—),女,江西都昌人,副教授,主要从事决策理论、模糊数学等研究. E-mail:1173071945@qq.com

S,S 上二元关系 R 是 $S\times S$ 的子集,若 a、$b\in S$ 满足 $(a,b)\in R\subset S\times S$,则称 a 关系 R 于 b,在不产生歧义情况下也称 a 和 b 之间有关系 R. 为方便表述,若 a 对于 b 有关系 R,则记为 aRb;若 a 对于 b 没有关系 R,则记作 $\neg\ aRb$. 另外,泛指 R 特性:(i) $\forall a\in S,\Rightarrow aRa$,称 R 在 S 上满足自反性;$\forall a\in S,\Rightarrow\neg\ aRa$,称 R 在 S 上满足非自反性. (ii) $\forall a$、b、$c\in S$,由 aRb、$bRc\Rightarrow aRc$,称 R 在 S 上满足传递性. (iii) $\forall a$、$b\in S$,$a\neq b$,若 $aRb\Rightarrow bRa$,则称 R 在 S 上满足对称性;$\forall a$、$b\in S$,$a\neq b$,若 $aRb\Rightarrow\neg\ bRa$,则称 R 在 S 上满足非对称性. (iv) 若 $\forall a$、$b\in S$,$a\neq b$,必有 aRb 或者 bRa,则称 R 在 S 上满足完全性.

泛指 R 在 S 上具传递性,称 R 为偏序;泛指 R 在 S 上具传递性和完全性,称 R 为全序;泛指 R 在 S 上具自反性、传递性和完全性,称 R 为弱序;泛指 R 在 S 上具非自反性、传递性和完全性,称 R 为强序. 显然,弱序、强序都为全序. 泛指 R 在 S 上具自反性、传递性、对称性,称 R 为等价,并记为"$\sim$","$\sim$"未必为全序. 由于偏好满足具自反性、传递性和完全性,所以本文所称偏好序均为弱序. 另外,关系可以进行衍生、分解、诱导等构造. 如"$\neg\ \leqslant$"="$\geqslant$",$R=P\cup I$,"$\geqslant$"="$>\cup\sim$",后续含义自明.

1.2 SCF 的强序构造

自然数实体可从广为所知的皮亚诺公理出发来构造. 自然数是一个集合 $\mathbf{N}$,它满足以下公理:(i) $0\in\mathbf{N}$;(ii) 若 $x\in\mathbf{N}$,则后继性 $x'\in\mathbf{N}$(后继的存在),并且 $\forall x\in\mathbf{N}$,有 $x'\neq 0$. 于是可形成一个实证性构造,$0:=\varnothing$,$1:=\{\varnothing\}$;$2:=1\cup\{1\}=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$;后续采用后继的归纳定义 $3:=1\cup 2\cup\{1,2\}=\{\varnothing\}\cup\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\cup\{\varnothing,\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$,依照定义规则,若已经定义好了 n,则如下定义 $n+1:=1\cup 2\cup\cdots\cup n\cup\{1,2,\cdots,n\}$,这样每个自然数是一个实体性集合对应物,其中逻辑语句":="表示"定义为". 以上定义能形成实体性自然数,也就排除了实无穷,并且每个自然数是实体性对象的实体集合. 不过,这种力求避免任何数理逻辑矛盾的构造行为形成了极大的书写困难.

为构造 SCF 的形式框架,以 A(alditinative)表示标度性备择物集,以 V(Voter)表示标度性投票者集,一般地,SCF 不是采用 individual,而是直接考虑投票. 本文采用文献[7]的 Voter 表达,并记 $(A,V)=\cup(A_i,V_j)$,其中 (A_i,V_j) 表示 A_i 中有特定个数的 i 个备择物,V_j 中有特定的 j 个投票者. 一般地,可以直接构造出 (A_i,V_j) 的实体性备择物和实体性投票者(见实体自然数的定义),但考虑自然数的实体形式化构造的书写极其复杂,直接简化备择物记为 $A_i=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_i\}$,并简化投票者记为 $V_j=\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_j\}$. $\forall\beta$ 以及 $\forall A_k$,$\exists R$ 为相关偏好序,即任给投票者 β 在任给备择物集 A_k 上都有一个偏好序 R 满足自反性、传递性、完全性. 为了简化,R 直接用 $\leqslant$ 表示其弱序关系,并且以证明需要适时分解为 $R=P\cup I$,前者为严格偏好,后者为无差异,其中严格偏好 P 满足非自反性、传递性、完全性并直接用 $<$ 表示为强序关系,I 满足对称性、自反性、传递性并直接用 $\sim$ 表示为等价关系(无差异关系). 另外,还采用 $\geqslant$、$>$ 等符号表示相应的逆关系,其含义上下文是自明的,并且显然有"$\geqslant$"="$>\cup\sim$".

在文献[2-5]及文献[9-12]中有各种 SCF 框架的刻画,本文先指定 (A_i,V_j) 形成 SCF 问题空间. 由于 SCF 要确定投票者集、备择物集,给定 (A_i,V_j),$\forall\beta_k\in V_j$ 有 A_i 上的偏好序 R_k,V_j 上的偏好序组合为 $(R_1,R_2,\cdots,R_j)$. SCF 为 $(R_1,R_2,\cdots,R_j)\xrightarrow{F}R_s$,其中 R_s 表示由全体投票者偏好集结而成的社会偏好. 文献[3]提出约束并准确形式化后 SCF 的 UD、PP、IIA、ND 约束公理,后续形成了多种约束公理体系,如 Sen 公理体系、May 公理体系等[11]. 本文采用文献[9]刻画的公理体系,并且本质上 SCF 是集结运算. 为此,先给出问题空间的定义,并基于偏好序定义分影、合影运算等概念.

定义 1 给定 (A_i,V_j),(i) 称 $P_{\mathrm{SCF}}(A_i,V_j)=\{R_1,R_2,\cdots,R_j\mid 1\leqslant k\leqslant j,R_k$ 为 A_i 上的弱序$\}$为 (A_i,V_j) 上的 SCF 的问题空间,记为 $P_{\mathrm{SCF}}(A_i,V_j)$;(ii) 称 $\cup_{i,j}P_{\mathrm{SCF}}(A_i,V_j)$ 为 SCF 问题全空间,记为 P_{SCF};(iii) 称 $P_{\mathrm{ST}}(A_i,V_j)=\{(p_1,p_2,\cdots,p_j)\mid 1\leqslant k\leqslant j,p_k$ 为 A_i 上强序$\}$为 (A_i,V_j) 的 SCF 加强空间,记为 $P_{ST}(A_i,V_j)$;(iv) 称 $\cup_{i,j}P_{\mathrm{ST}}(A_i,V_j)$ 为 SCF 问题加强全空间,记为 P_{ST}.

定义 2 在 P_{SCF} 上,$\forall A_i$、$\forall V_j$,以及 $\forall\alpha_1,\alpha_2\in A_i$,对偏好序 R_k 规定序对 $\langle R_{k+},R_{k-}\rangle$:

(i) 当 $\alpha_1R_k\alpha_2$ 为 $\alpha_1\sim\alpha_2$ 时,$\alpha_1R_{k+}\alpha_2$ 为 $\alpha_1<\alpha_2$,而 $\alpha_1R_{k-}\alpha_2$ 为 $\alpha_1>\alpha_2$;并对其他全部的 $\alpha\sim\alpha_1\sim\alpha_2$,规定 $\alpha R_{k+}\alpha_1$ 为 $\alpha\sim\alpha_1(<\alpha_2)$,规定 $\alpha R_{k-}\alpha_1$ 为 $\alpha\sim\alpha_1(>\alpha_2)$.

(ii) 当 $\alpha_1R_k\alpha_2$ 为 $\alpha_1<\alpha_2$ 时,$\alpha_1R_{k+}\alpha_2\Leftrightarrow\alpha_1R_k\alpha_2$ 且 $\alpha_1R_{k-}\alpha_2\Leftrightarrow\alpha_1R_k\alpha_2$;称 $\langle R_{k+},R_{k-}\rangle$ 为 R_k 在 α_1,α_2 2 个等价点上的有序分影,记为 $\varphi_{\alpha_1\alpha_2}R_k$,即 $\varphi_{\alpha_1\alpha_2}R_k=$

$\langle R_{k+}, R_{k-}\rangle$. 同时称 R_k 为 $\langle R_{k+}, R_{k-}\rangle$ 在 $\langle\alpha_1, \alpha_2\rangle$ 上的合影.

罗云峰等[15]归结了广泛的集结路径研究，本质上有序分影具有路径相依性. 不过，以上定义中 $\varphi_{\alpha_1\alpha_2}\neq\varphi_{\alpha_2\alpha_1}R_k$，但正好有 $\varphi_{\alpha_2\alpha_1}R_k=\langle R_{k-}, R_{k+}\rangle$. 为消除此类路径相依性，可以给出等价对 (α_1, α_2) 的分影 (R_{k+}, R_{k-}). 当然，合影只有在合适分影对上才能实施，后续将考虑在无任何3元循环时均可做合影，这将进入直接的集结运算.

显然，偏好 R_k 中等价的分影只分解一个等价关系. 文献[10]用偏好投影、保序运算，由此考察多面体顶点. 一方面这是整体性操作；另一方面，文献[10]方法部分可拟操作，构成全局分影，毕竟在备择物 α_1、α_2 上等价序的分影过于局限. 但全局分影需考虑整个偏好序 R 的分解 $R=P\cup I$，再考虑在等价关系中全部等价序的分影.

考察加载偏好序的备择物集 (A, R)，$A=\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_i\}$，$I$ 为包含于 R 中的等价关系. 作 $A/\sim=\{\Lambda_1, \Lambda_2, \cdots, \Lambda_k\}$，其中若满足：(i) $A=\Lambda_1\cup\Lambda_2\cup\cdots\cup\Lambda_k$；(ii)任何 $\Lambda_s\cup\Lambda_t=\varnothing(s\neq t)$；(iii)在任何 Λ_s 中，$\forall\alpha$、$\alpha'\in\Lambda_s$，有 $\alpha\sim\alpha'$，即 $\alpha I\alpha'$，则称 $A/\sim$ 为 A 的等价类划分. 同时建立一类集序，$\forall\Lambda_s$、$\Lambda_t\in A/\sim$，$\forall\alpha\in\Lambda_s$、$\alpha'\in\Lambda_t$，定义等价类序如下：

(i) $\Lambda_s<\Lambda_t\Leftrightarrow\alpha<\alpha'$；(ii) $\Lambda_t<\Lambda_s\Leftrightarrow\alpha'<\alpha$.

一般地，当 (A, R) 不包含"$\sim$"时，所有的 Λ_k 都是单点集. 当 (A, R) 含"$\sim$"时，对于非单点集 Λ_k，可建立在 (A, R) 上 $A/\sim$ 的分影，记为 $\varphi_{A/\sim}R_k$，$\varphi_{A/\sim}R_k=(R_{k+}, R_{k-})$，规定 (R_{k+}, R_{k-}) 如下：

(i) $\forall\Lambda_s<\Lambda_t$ 以及 $\forall\alpha\in\Lambda_s$、$\alpha'\in\Lambda_t$，规定 $\alpha R_{k+}\alpha'$、$\alpha R_{k-}\alpha'$ 均为 $\alpha<\alpha'$.

(ii) $\forall\Lambda_s\in A/\sim$，记为 $\Lambda_s=\{\alpha_{s_1}, \alpha_{s_2}, \cdots, \alpha_{s_i}\}$，规定 $\alpha_{s_1}R_{k+}\alpha_{s_2}R_{k+}\cdots R_{k+}\alpha_{s_i}\Leftrightarrow\alpha_{s_1}<\alpha_{s_2}<\cdots<\alpha_{s_i}$，并规定 $\alpha_{s_1}R_{k-}\alpha_{s_2}R_{k-}\cdots R_{k-}\alpha_{s_i}\Leftrightarrow\alpha_{s_1}>\alpha_{s_2}>\cdots>\alpha_{s_i}$.

另外可以定义偏好序对的对影. 由以上构造，等价类上的分影同样也不唯一，但显然具有如下引理.

引理1　$\forall(A, R)\in P_{\mathrm{SCF}}$，$\varphi_{A/\sim}R_k$ 在 $A/\sim$ 上保持了等价类序.

定义3　R_+、$R_-\in(A, R)$，且都为其中的偏好强序，称 $(R_+$、$R_-)$ 为 A 上的对影偏好，若 $\forall\alpha$、ξ、$\zeta\in A$，R_+、R_- 对 α、ξ、ζ 3者的排序不在孔多塞循环中.

为充分明晰采用对影偏好的性质，采用文献[14]的可排规则来刻画，由于 R_+、R_- 都是强序偏好，不妨定 R_+ 在 α、ξ、ζ 3者上的排序为 $\alpha R_+\xi R_+\zeta$（定向为 $\alpha<\xi<\zeta$），所以 R_- 排序 α、ξ、ζ 不能为 $\xi R_-\zeta R_-\alpha$（定向为 $\xi<\zeta<\alpha$）、$\zeta R_-\alpha R_-\xi$（定向为 $\zeta<\alpha<\xi$）. R_- 排 α、ξ、ζ 序可有4种：$\alpha<\xi<\zeta$、$\alpha>\xi>\zeta$、$\alpha<\zeta<\xi$、$\xi<\alpha<\zeta$. 本质上，对影是共识的重要刻画，另外可划分 A 形成分片对影、3个投票者对影等.

考虑SCF的本质是集结运算，为提供准确的证明，有必要约简问题规模，形成更为标准的形式. 众多文献提出了很多SCF约束公理，同时还可以考虑公理配置，如单峰偏好就是重新配置了UD公理. 为此，以 A_S 代表一组约束公理（Axiom system），考虑SCF的存在性. 若在2个空间中，SCF的存在性是一致的，则称之为集结性等价，并以 O_{scf} 及一般性集结.

定义4　称空间 P_1 与 P_2 在约束公理系统 A_S 下是集结性等价的，若在 A_S 下，在 P_1 中存在SCF必然在 P_2 中也存在SCF，反之亦然.

2　主要结果

定理1　$A_i=\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_i\}$，$P_1$、$P_2$ 为 A_i 上的两强序偏好，(P_1, P_2) 为对影序，则 $O_{scf}(P_1, P_2)$ 为序偏好.

证　若 P_1、P_2 为在 $A_2=\{\alpha_1, \alpha_2\}$ 上的两强序偏好，则 (P_1, P_2) 为序同向或异向，故任何 $O_{scf}(P_1, P_2)=P_1=P_2$，或者 $O_{scf}(P_1, P_2)=$"$\sim$". 在 $A_2=\{\alpha_1, \alpha_2\}$ 上 $O_{scf}(P_1, P_2)$ 是平凡的.

若 $A_i=\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_i\}$ 不少于3个备择物，则 $\forall\alpha$、ξ、$\zeta\in A_i$，既然 P_1、P_2 为强序，为方便设 $\alpha P_1\xi P_1\zeta$ 定向为 $\alpha<\xi<\zeta$，由对影知 P_2 排 α、ξ、ζ 序有4种：$\alpha<\xi<\zeta$、$\alpha>\xi>\zeta$、$\alpha<\zeta<\xi$、$\xi<\alpha<\zeta$. 下面分4种情况讨论，并且采用文献[14]的刻画方法.

(i)若 P_2 排 α、ξ、ζ 序为 $\alpha<\xi<\zeta$，则 $O_{scf}(P_1, P_2)$ 排 α、ξ、ζ 序为 $\alpha<\xi<\zeta$. $\forall\delta\neq\alpha$、ξ、ζ，$\delta\in A_i$，显然，P_1 排 α、ξ、ζ、δ 序为 $\delta<\alpha<\xi<\zeta$，或 $\alpha<\delta<\xi<\zeta$，或 $\alpha<\xi<\delta<\zeta$，或 $\alpha<\xi<\zeta<\delta$.

若 P_1 排序为 $\delta<\alpha<\xi<\zeta$，则 P_2 只能排序为 $\delta<\alpha<\xi<\zeta$ 或 $\alpha<\delta<\xi<\zeta$，否则 P_2 排序为 $\alpha<\xi<\delta<\zeta$ 或 $\alpha<\xi<\zeta<\delta$. 在这2种情况下，无论何种情况，P_1、P_2 对 δ、α、ξ 都会存在孔多塞循环的连续排序. 当 P_2 排序为 $\alpha<\xi<\zeta<\delta$ 时 δ、α、ζ 以及 ξ、ζ、δ 甚至也都构成了孔多塞循环的连续排序. 为此，$O_{scf}(P_1, P_2)$ 排 α、ξ、ζ、δ 序为 $\delta<\alpha<\xi<\zeta$ 或 $\delta<\alpha<\xi<\zeta$.

若 P_1 排序为 $\alpha<\delta<\xi<\zeta$，P_2 必不排序为 $\alpha<\xi<\zeta<\delta$，否则 ξ、ζ、α 将在 P_1、P_2 下构成孔多塞循环的连续排序. 于是有：P_2 排序为 $\delta<\alpha<\xi<\zeta\Rightarrow O_{scf}(P_1, P_2)$ 排序 $\delta\sim\alpha<\xi<\zeta$；$P_2$ 排序为 $\alpha<\delta<\xi<$

$\zeta \Rightarrow O_{scf}(P_1,P_2)$排序$\alpha<\delta<\xi<\zeta$;$P_2$排序为$\alpha<\xi<\delta<\zeta \Rightarrow O_{scf}(P_1,P_2)$排序$\alpha<\delta \sim \xi<\zeta$.

显然,若P_1排序为$\alpha<\xi<\zeta<\delta$,则证明过程同于P_1排序为$\alpha<\delta<\xi<\zeta$的情况;若P_1排序为$\alpha<\xi<\delta<\zeta$,则证明过程同于P_1排序为$\alpha<\delta<\xi<\zeta$的情况.

于是,综合上述,若P_2排α、ξ、ζ序为$\alpha<\xi<\zeta$,则$O_{scf}(P_1,P_2)$得证.

(ii)若P_2排α、ξ、ζ序为$\alpha>\xi>\zeta$,$O_{scf}(P_1,P_2)$排α、ξ、ζ序为$\alpha \sim \xi \sim \zeta$. 再考虑$\forall \delta \neq \alpha$、$\xi$、$\zeta$,$\delta \in A_i$,显然$P_1$在$\alpha<\xi<\zeta$上$\delta$有4种排位. 若$P_1$排序为$\delta<\alpha<\xi<\zeta$,则$P_2$排序为$\delta>\alpha>\xi>\zeta \Rightarrow O_{scf}(P_1,P_2)$排序为$\delta \sim \alpha \sim \xi \sim \zeta$.

若P_1排序为$\delta<\alpha<\xi<\zeta$,则P_2排序为$\alpha>\delta>\xi>\zeta$,即$\zeta<\xi<\delta<\alpha \Rightarrow \xi<\delta<\alpha$与$\delta<\alpha<\xi$构成孔多塞循环的连续排序$\Rightarrow(P_1,P_2)$不为对影序$\Rightarrow P_2$不排序为$\alpha>\delta>\xi>\zeta$;同样,若$P_1$排序为$\delta<\alpha<\xi<\zeta$,则$P_2$也必不排序为$\alpha>\xi>\delta>\zeta$.

若P_1排序为$\delta<\alpha<\xi<\zeta$,则P_2排序为$\alpha>\xi>\zeta>\delta \Rightarrow O_{scf}(P_1,P_2)$排序为$\delta<\alpha \sim \xi \sim \zeta$.

这种情况说明:若对影序(P_1,P_2)严格反序排任何3个备择物,则其他备择物只能是在该3个备择物的边界上.

(iii)若P_2排序为$\alpha<\zeta<\xi$,$O_{scf}(P_1,P_2)$排α、ξ、ζ序为$\alpha<\xi \sim \zeta$. 再考虑$\forall \delta \neq \alpha$、$\xi$、$\zeta$,$\delta \in A_i$,同样$P_1$在$\alpha<\xi<\zeta$上$\delta$有4种排位. 若$P_1$排序为$\delta<\alpha<\xi<\zeta$,则$P_2$排序为$\delta<\alpha<\zeta<\xi \Rightarrow O_{scf}(P_1,P_2)$排序为$\delta<\alpha<\xi \sim \zeta$;若$P_1$排序为$\delta<\alpha<\xi<\zeta$,则$P_2$排序为$\alpha<\delta<\zeta<\xi \Rightarrow O_{scf}(P_1,P_2)$排序为$\delta \sim \alpha<\xi \sim \zeta$;若$P_1$排序为$\delta<\alpha<\xi<\zeta$,则$P_2$必不排序为$\alpha<\zeta<\delta<\xi$,否则$\delta<\alpha<\xi<\zeta$、$\alpha<\zeta<\delta<\xi \Rightarrow \delta<\xi<\zeta$、$\zeta<\delta<\xi$在$P_1$、$P_2$下构成孔多塞循环的连续排序;若$P_1$排序为$\delta<\alpha<\xi<\zeta$,则$P_2$必不排序为$\alpha<\zeta<\xi<\delta$,否则$\delta<\alpha<\xi<\zeta$、$\alpha<\zeta<\xi<\delta \Rightarrow \delta<\alpha<\xi$、$\alpha<\xi<\delta$在$P_1$、$P_2$下构成孔多塞循环的连续排序,甚至$\delta$、$\alpha$、$\zeta$也在$P_1$、$P_2$下构成孔多塞循环的连续排序.

这说明:P_2排序为$\alpha<\zeta<\xi$,$O_{scf}(P_1,P_2)$能集结为偏好序.

(iv)若P_2排序为$\xi<\alpha<\zeta$,依情况(iii),同理可证$O_{scf}(P_1,P_2)$能集结为偏好序.

综合4种情况,定理1得证.

定理1说明对影序可以把一般序强化为严格序. 定理1及其证明过程在比较狭窄的空间上,一方面,给出了一个集结的直接方法;另一方面,给出了可集结性的判断. 并且,这里集结性是广泛适应的,也就是在广泛性约束公理上都是适应的,并且在对影和孔多塞循环之间建立了联系. 本质上,可以提出3元对影和多元对影,作为可集结性的一个指示. 当然,广泛的约束公理并没有指明,其中约束无限制性定义域(UD公理)对于共识非常重要[16];当然UD公理也可以扩充,本质上文献[17-18]在格序上和在弱序上定义群决策就延展了UD公理. 考虑SCF问题的规模性,给出如下定理.

定理2 对于任何约束公理系统A_S,SCF问题全体的问题空间P_{SCF}等价于SCF问题加强全空间P_{ST},后者是前者的真子空间.

证 $P_{\mathrm{ST}}=\bigcup_{i,j}P_{\mathrm{ST}}(A_i,V_j)$,而其中$P_{\mathrm{ST}}(A_i,V_j)=\{(p_1,p_2,\cdots,p_j)\mid 1\leqslant k\leqslant j,p_k$为$A_i$上强序$\}$. 但是,$P_{\mathrm{SCF}}=\bigcup_{i,j}P_{\mathrm{SCF}}(A_i,V_j)$,其中$P_{\mathrm{SCF}}(A_i,V_j)=\{(R_1,R_2,\cdots,R_j)\mid 1\leqslant k\leqslant j,R_k$为$A_i$上弱序$\}$.

显然,有$P_{\mathrm{SCF}}\supset P_{\mathrm{ST}}$,即后者是前者的真子空间. 那么,对于任何约束公理系统A_S,若SCF在P_{SCF}上存在,则SCF必在P_{ST}上存在. 为此,只需证明若SCF在P_{ST}上存在则必有SCF在P_{SCF}上存在.

设公理系统A_S下SCF在P_{ST}上存在,考察P_{SCF}上的SCF存在性. $\forall P\in P_{\mathrm{SCF}}$,$\exists(i,j)$使得$P\in(A_i,V_j)$,为此记$P=(R_1,R_2,\cdots,R_j)$,其中$R_k$为$A_i$上弱序. 其中$R_k$可能包含也可能不包含"$\sim$",都可作$\varphi_{A/\sim}R_k=(R_{k+},R_{k-})$,必有$\varphi_{P/\sim}P=(\varphi_{A/\sim}R_1,\varphi_{A/\sim}R_2,\cdots,\varphi_{A/\sim}R_k,\cdots,\varphi_{A/\sim}R_j)$,为了简便,记$\varphi_{P/\sim}P=(R_{1+},R_{1-},R_{2+},R_{2-},\cdots,R_{j+},R_{j-})=(p_1,p_2,\cdots,p_j,p_{j+1},\cdots,p_{2j})$. 故显然有$\varphi_{P/\sim}P\in P_{\mathrm{ST}}(A_i,V_{2j})$,由$A_S$下在$P_{\mathrm{ST}}$上存在SCF,记其中之一为$S_0:P_{\mathrm{ST}}(A_i,V_{2j})\to P_{\mathrm{SCF}}(A_i,V_0)$,这里$(A_i,V_0)$满足$\|V_0\|=1$,即$V_0$只有1个投标者,故$P_{\mathrm{SCF}}(A_i,V_0)$为社会的偏好. 从构造上$S_0$通过$\varphi_{P/\sim}P$把$\forall P\in(A_i,V_j)$映射为$P_{\mathrm{SCF}}(A_i,V_0)$的一个确定性元素,从而得到$A_S$下$(A_i,V_j)$上的SCF,并且该$S(P)=S_0\varphi_{P/\sim}(P)$. 并由$P\in P_{\mathrm{SCF}}$的任意性知,SCF在$P_{\mathrm{SCF}}$上存在.

综上所述,在A_S下,SCF问题全体的问题空间P_{SCF}集结性等价于SCF问题加强全空间P_{ST}.

定理2说明:基于强序标定投票者条件,在SCF问题空间的构造上集结性等价于其一个真子集. 这就为Arrow定理研究提供了一个简化途径;同时,定理2也提供了一个指示可集结的条件,如对影的集结是非常简洁.

3 结论

本文的主要结论显示:社会选择函数能在严格

的偏好序空间(即强序空间)上构造,其存在性完全等价于弱序空间上的存在性,从而社会选择函数的问题空间可以压缩.另外,在强序空间上构造社会选择函数无论是文献[15]的可排序,还是图像排序,还是 border 赋值等各种方法,其刻画描述更为准确和清晰,从而社会选择函数的存在性判断更为具体.同时,从群决策的角度来看,可以形成更为清晰的偏好集结的方式.虽然在形式空间的等价性研究上,并不涉及具体的约束公理,但对于公理系统的约束相容性,至少可更方便的构造指示性算子.也就是说,即使未必能确定性判断约束公理的相容性,但还是可以构造一些运算予以指示.同时,问题空间的不同构造以及不同的加载拓扑,能产生更广泛的结论,至少能统一诸多文献的结论[2-9,16-20].

4　参考文献

[1] 左勇华,杜江.破解 Arrow 不可能性定理的解读偏差[N].中国社会科学报,2020-05-20(003).

[2] GEANAKOPLOS J. Three brief proofs of Arrow's impossibility theorem [J]. Economic Theory,2005,26(1):211-215.

[3] ARROW K J. Social choice and individual values [M]. New York:Wiley,1951.

[4] BARBERÁ S. Pivotal voters:a new proof of Arrow's theorem [J]. Economics Letters,1980,6(1):13-16.

[5] YU Ning. A one-shot proof of Arrow's impossibility theorem [J]. Economic Theory,2012,50(2):523-525.

[6] SEN A. Collective choice and social welfare [M]. San Francisco:Holden-Day,1970.

[7] FISHBURN P C. Arrow's impossibility theorem:concise proof and infinite voters [J]. Journal of Economic Theory,1970,2(1):103-106.

[8] BLAU J H. A direct proof of Arrow's theorem [J]. Econometrica,1972,40(1):61-67.

[9] POUZET M. A projection property and Arrow's impossibility theorem [J]. Discrete Mathematics,1998,192(1):293-308.

[10] CATO S. Brief proofs of Arrovian impossibility theorems [J]. Social Choice and Welfare,2010,35(2):267-284.

[11] CATO S. Incomplete decision-making and Arrow's impossibility theorem [J]. Mathematical Social Sciences,2018,94(10):58-64.

[12] 埃里克·马斯金,阿马蒂亚·森.选择的悖论:阿罗不可能定理与社会选择真相 [M].黄永,译.北京:中信出版社,2016.

[13] HU Liu. A modal logic for social welfare functions [J]. Studies in Logic,2019,12(6):1-21.

[14] 胡毓达,胡的的.群体决策:多数规则与投票悖论[M].上海:上海科学技术出版社,2006.

[15] 罗云峰,肖人彬.社会选择的理论与进展 [M].北京:科学出版社,2003.

[16] 吴志彬.群体共识决策理论与方法 [M].北京:科学出版社,2017.

[17] 郭春香.不确定格序决策方法 [M].成都:西南交通大学出版社,2013.

[18] TANAKA Y. A topological approach to the Arrow impossibility theorem when individual preferences are weak orders [J]. Applied Mathematics and Computation,2006,174(2):961-981.

[19] JUÁREZ-ANGUIANO H. Equivariant retracts and a topological social choice model [J]. Topology and Its Applications,2020,279:107246.

[20] TANAKA Y. On the equivalence of the Arrow impossibility theorem and the Brouwer fixed point theorem [J]. Applied Mathematics and Computation,2006,172(2):1303-1314.

The Preference,Strong Order Characterization and Equivalence of Social Choice Form Space

XIAO Lina,LU Meihua*

(Faculty of Science Teaching,Jiangxi University of Technology,Nanchang Jiangxi 330022,China)

Abstract:In order to study the construction mechanism of general social choice function,through the calculation of general preference,a strong order description of preference is formed,and based on this,some equivalence and self-equivalence of the whole space of social choice function under the formal background are proved. However,under the characterization of strong order,the construction of the existence theorem (Arrow theorem) of the social choice function is relatively simplified,and the configuration of the constraint axiom system is also simplified,which provides a powerful tool for comprehensively formalizing the theorem.

Key words:strong order preference;back projection;equivalence of formal space　　(责任编辑:曾剑锋)