

罗奕杨,王兰,万隆,等.含阻尼效应的非线性薛定谔方程的共形分裂高阶紧致差分格式[J].江西师范大学学报(自然科学版),2022,46(2):210-214.

LUO Yiyang, WANG Lan, WAN Long, et al. The conformal splitting high-order compact difference scheme for damped nonlinear schrödinger equation [J]. Journal of Jiangxi Normal University (Natural Science), 2022, 46(2): 210-214.

文章编号:1000-5862(2022)02-0210-05

## 含阻尼效应的非线性薛定谔方程的 共形分裂高阶紧致差分格式

罗奕杨<sup>1</sup>,王 兰<sup>1\*</sup>,万 隆<sup>2</sup>,孔令华<sup>1</sup>

(1. 江西师范大学数学与统计学院,江西 南昌 330022;2. 豫章师范学院小学教育学院,江西 南昌 330103)

**摘要:**该文对含有阻尼效应的非线性薛定谔方程提出了一个新的共形分裂高阶紧致差分格式.首先利用分裂技巧,将复杂方程分裂为3个子问题;然后对于其中的非线性子问题,利用其逐点质量守恒的性质可以精确求解,避免了迭代,提高了计算效率;再利用了高阶紧致方法对空间进行离散,在基本不提高成本的情况下,提升了空间精度;最后通过理论分析与数值实验证明了该格式的高精度、稳定性以及保持共形质量守恒律.

**关键词:**含阻尼效应的非线性薛定谔方程;分裂方法;高阶紧致格式;共形守恒律

**中图分类号:**O 241.8 **文献标志码:**A **DOI:**10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2022.02.14

### 0 引言

非线性薛定谔方程是在数学物理中非常重要的模型,它在材料科学、等离子体物理学、量子物理学、非线性光学、双分子动力学等领域中得到了广泛应用.含有阻尼效应的非线性薛定谔方程描述了在非线性质中的几种谐振现象,特别是在垂直振荡水槽中的非线性法拉第谐振<sup>[1]</sup>和相敏放大器对光纤中孤子的影响<sup>[2]</sup>.本文考虑如下带有阻尼效应的非线性薛定谔(DNLS)方程:

$$i\psi_t + \psi_{xx} + \beta |\psi|^2 \psi + i\alpha \psi = 0, x \in \Omega, 0 < t \leq T \quad (1)$$

的周期初边值问题,取初始条件为

$$\psi(x, 0) = \psi_0(x), x \in \Omega, \quad (2)$$

其中 $\psi(x, t)$ 是定义在 $\Omega \times [0, T]$ 上的未知复函数, $i$ 是虚数单位, $\beta$ 是不为0的常数( $\beta > 0$ 和 $\beta < 0$ 分别表示方程是聚焦和散焦的情况), $\alpha (> 0)$ 表示系统耗散率.若 $\alpha = 0$ ,则方程变为一般的薛定谔方程,其质量与能量以及动量是守恒的.

根据 R. McLachlan 等<sup>[3]</sup>的研究,初边值问题(1)~(2)保持共形质量守恒律

$$M(t) = e^{-2\alpha t} M(0), M(t) = \int_{\Omega} |\psi|^2 dx, t \geq 0$$

以及共形动量守恒律

$$I(t) = e^{-2\alpha t} I(0), I(t) = i \int_{\Omega} \psi \bar{\psi}_x dx, t \geq 0,$$

其中 $\bar{\psi}$ 表示函数 $\psi$ 的共轭.

近年来,科研工作者对 DNLS 方程进行了一些研究,构造了一些数值格式,如 Bao Weizhu 等<sup>[4]</sup>提出了2阶时间分裂谱方法,Jiang Chaolong 等<sup>[5-6]</sup>利用傅里叶伪谱法构造了非线性隐式与线性隐式2种方法,Cai Jiaxiang 等<sup>[7]</sup>提出了紧致隐式积分算子方法,Hu Weipeng 等<sup>[8]</sup>提出了 DNLS 方程的保辛格式等.上述工作虽然有很多优点,但是部分方法依然存在精度不高、计算效率较低或共形质量守恒律不保持等问题.

基于此,本文提出了一种高精度、高效率且保持共形质量守恒律的有限差分方法,该方法结合了时间分裂方法<sup>[9-10]</sup>与高阶紧致方法<sup>[11]</sup>(这2种方法已经得到广泛运用<sup>[12-15]</sup>).其中时间分裂方法可以将复杂的原问题分裂成几个易于求解的子问题,便于构造简便的数值格式;且高阶紧致方法是一种利用了更少的模板节点达到了更高精度的方法,它适合于构造高精度、高效率的数值格式.

收稿日期:2021-12-28

基金项目:国家自然科学基金(11961036)和江西师范大学研究生创新基金(YJS2021068)的资助项目.

通信作者:王 兰(1979—),女,安徽池州人,副教授,博士,主要从事微分方程数值方法的研究. E-mail:wl0908@yeah.net

## 1 共形分裂高阶紧致格式的构造

本部分先对  $\Omega \times [0, T]$  进行网格剖分. 设  $\Omega = [a, b]$ , 将区间  $[a, b]$  作  $J$  等分, 将区间  $[0, T]$  作  $N$  等分, 记空间步长与时间步长分别为  $h, \tau$ , 则  $h = (b - a)/J, \tau = T/N$ , 可以得到时空区域  $\Omega \times [0, T]$  的一致网格剖分

$$\Omega_{h\tau} = \{(x_j, t_n) \mid x_j = a + jh, t_n = n\tau, j = 0, 1, \dots, J, n = 0, 1, \dots, N\}.$$

记函数  $\psi(x, t)$  在  $(x_j, t_n)$  处的精确解与数值解分别为  $\Psi_j^n, \psi_j^n$ , 为方便起见, 引入如下记号:

$$\delta_t \psi_j^{n+1/2} = (\psi_j^{n+1} - \psi_j^n)/\tau, \delta_x^2 \psi_j^n = (\psi_{j+1}^n - 2\psi_j^n + \psi_{j-1}^n)/h^2, \psi_j^{n+1/2} = (\psi_j^{n+1} + \psi_j^n)/2, \delta_{2x} \psi_j^n = (\psi_{j+1}^n - \psi_{j-1}^n)/(2h), A\psi_j^n = (\psi_{j+1}^n + 10\psi_j^n + \psi_{j-1}^n)/12, \tilde{\delta}_x^2 \psi_j^n = A^{-1}\delta_x^2 \psi_j^n.$$

为构造 DNLS 方程(1) 的高阶精度格式, 首先回顾一下高阶紧致方法. 对于具有一定光滑性的函数  $u(x)$ , 其 2 阶导数  $u''(x)$  可以由  $u(x_{j+1}), u(x_j), u(x_{j-1})$  3 点近似<sup>[16]</sup>, 即

$$(u(x_{j+1}) - 2u(x_j) + u(x_{j-1}))/h^2 = u''(x_j) + h^2 u^{(4)}(x_j)/12 + O(h^4) = u''(x_j) + O(h^2),$$

若略去高阶项  $O(h^2)$ , 则得到的格式具有 2 阶精度. 若再将上式中的 4 阶导数  $d^4 u(x)/dx^4$  写成  $d^2(d^2 u(x)/dx^2)/dx^2$ , 对前一 2 阶微分采用 2 阶中心差商离散, 后一 2 阶微分保持不变, 则得到如下离散格式:

$$(u''(x_{j+1}) + 10u''(x_j) + u''(x_{j-1}))/12 = (u(x_{j+1}) - 2u(x_j) + u(x_{j-1}))/h^2 + O(h^4).$$

忽略高阶项  $O(h^4)$ , 得到截断误差为 4 阶的紧致格式:

$$Au_j'' = (u_{j+1}'' + 10u_j'' + u_{j-1}'')/12 = (u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1})/h^2 = \delta_x^2 u_j. \quad (3)$$

此格式只用了 3 个节点  $x_{j-1}, x_j, x_{j+1}$  就得到了 4 阶精度的差分格式, 若采用一般的差分离散, 则这是不可能达到的. 在周期边界条件下, 将其写成矩阵形式  $u'' = P^{-1}Qu$ , 其中

$$P = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 10 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 10 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 10 & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 10 \end{pmatrix},$$

$$Q = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & -2 & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

为构造 DNLS 方程(1) 高效的分裂步高阶紧致格式, 先把它分裂成如下形式:

$$i\psi_t + \psi_{xx} = 0, \quad (4)$$

$$i\psi_t + \beta |\psi|^2 \psi = 0, \quad (5)$$

$$i\psi_t + i\alpha\psi = 0, \quad (6)$$

由用 Crank-Nicolson 格式对式(4) 进行时间离散和对高阶紧致格式(3) 进行空间离散可得

$$i\delta_t \psi_j^{n+1/2} + \tilde{\delta}_x^2 \psi_j^{n+1/2} = 0. \quad (7)$$

用  $\bar{\psi}$  乘以式(5) 的两边得  $i\psi_t \bar{\psi} + \beta |\psi|^4 = 0$ , 再取虚部得

$$(\psi_t \bar{\psi} + \bar{\psi}_t \psi)/2 = d|\psi(x, t)|^2/dt/2 = 0.$$

这说明各个点在各个时刻处的质量  $|\psi(x, t)|^2$  保持不变, 即

$$|\psi(x, t_{n+1})|^2 = |\psi(x, t_n)|^2.$$

这说明方程(5) 满足逐点的质量守恒律. 这使得非线性方程(5) 可以精确求解. 将其代入式(5), 则可得方程(5) 的精确解

$$\psi(x_j, t_{n+1}) = e^{i\beta |\psi(x_j, t_n)|^2 \tau} \psi(x_j, t_n). \quad (8)$$

对于式(6), 由观察可知, 此方程为线性常系数常微分方程, 可以用分离变量法得其精确解

$$\psi(x_j, t_{n+1}) = e^{-\alpha \tau} \psi(x_j, t_n). \quad (9)$$

最后, 将方程(4) ~ (6) 的解(7) ~ (9) 利用 Strang 组合, 得到在时间上 2 阶精度的格式:

$$\begin{cases} \psi_j^{(1)} = e^{-\alpha \tau/2} \psi_j^n, \\ \psi_j^{(2)} = e^{i\beta |\psi_j^{(1)}|^2 \tau/2} \psi_j^{(1)}, \\ i(\psi_j^{(3)} - \psi_j^{(2)})/\tau = -\tilde{\delta}_x^2 (\psi_j^{(3)} + \psi_j^{(2)})/2, \\ \psi_j^{(4)} = e^{i\beta |\psi_j^{(3)}|^2 \tau/2} \psi_j^{(3)}, \\ \psi_j^{n+1} = e^{-\alpha \tau/2} \psi_j^{(4)}, \end{cases} \quad (10)$$

其中  $j = 1, 2, \dots, J, n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ .

格式(10) 在时间上具有 2 阶精度, 在空间上具有 4 阶精度; 且在计算过程中, 格式(10) 在每次时间的推进时只要求解线性方程组以及简单的代数运算, 不需要额外的非线性迭代, 计算成本较低, 计算效率非常高, 这克服了已有数值格式的各种不足. 不仅如此, 格式(10) 还保持 DNLS 方程固有的一些物理性态, 如共形质量守恒.

## 2 数值格式的共形守恒律以及稳定性

为分析格式(10) 的共形守恒律, 需要运用到循环矩阵的一些性质.

**引理 1**<sup>[15]</sup> 设  $X, Y$  为同阶循环矩阵, 则其满足如下性质:

(i)  $XY = YX, X^{-1}, Y^{-1}, XY$  也都是循环矩阵;

(ii) 对于循环对称正定矩阵  $X$ , 存在唯一的矩阵  $Z$ , 使得  $X = Z^T Z$ .

**定理 1** DNLS 方程 (1) 的 Strang 分裂格式 (10) 保持如下的离散共形质量守恒律, 即

$$M^{n+1} = e^{-2\alpha\tau} M^n, M^n = \|\psi_j^n\|^2 = h \sum_{j=1}^J |\psi_j^n|^2.$$

**证** 将式 (10) 中的第 1 式与第 2 式两边取模并平方, 关于空间指标  $j$  求和, 可得

$$\|\psi^{(1)}\|^2 = e^{-\alpha\tau} \|\psi^n\|^2, \|\psi^{(2)}\|^2 = \|\psi^{(1)}\|^2, \text{同理可得 } \|\psi^{(4)}\|^2 = \|\psi^{(3)}\|^2, \|\psi^{n+1}\|^2 = e^{-\alpha\tau} \cdot \|\psi^{(4)}\|^2.$$

用  $\psi^{(3)} + \psi^{(4)}$  与式 (10) 中第 3 式作内积, 取虚部并利用引理 1 可得

$$\|\psi^{(3)}\|^2 = \|\psi^{(2)}\|^2.$$

综上所述有  $\|\psi^{n+1}\|^2 = e^{-2\alpha\tau} \|\psi^n\|^2$ , 即格式 (10) 满足离散共形质量守恒律  $M^{n+1} = e^{-2\alpha\tau} M^n$ . 同时这表明了格式 (10) 是无条件稳定的, 原因是

$$\|\psi^{n+1}\|^2 = e^{-2\alpha\tau} \|\psi^n\|^2 = e^{-2\alpha\tau_{n+1}} \|\psi^0\|^2 \leq \|\psi^0\|^2.$$

### 3 数值实验

本部分主要通过数值实验来检验所构造的格式 (10) 的有效性, 并验证该格式的收敛精度和对共形质量守恒律的保持情况. 此外, 考虑到 DNLS 方程 (1) 具有共形动量守恒律, 定义方程 (1) 对应的离散动

量表达式为

$$I^n = i(\psi, D_x \psi) = ih \sum_{j=1}^J \psi_j^n (D_x \bar{\psi}^n)_j,$$

其中  $D_x$  为 1 阶导数  $\psi_x$  的离散算子  $\delta_{2x}$  所对应的反对称矩阵. 通过上述公式来模拟格式的动量变化情况.

取空间为  $\Omega = [-25, 25]$ , DNLS 方程 (1) 中的参数  $\beta = 2, \alpha = 0.005$ , 取初值为  $\psi_0(x) = \text{sech}(x) \cdot e^{2ix}$ . 由于无法给出其精确解, 所以为便于分析, 将利用格式 (10) 在相对小的时间步长与空间步长下得到的数值解作为“精确解”. 这里取  $h = 1/32, \tau = 1 \times 10^{-4}$ . 为了计算收敛阶, 使用公式

$$o_\tau = \ln(\|e(h, \tau_1)\|_\gamma / \|e(h, \tau_2)\|_\gamma) / \ln(\tau_1 / \tau_2),$$

$o_h = \ln(\|e(h_1, \tau)\|_\gamma / \|e(h_2, \tau)\|_\gamma) / \ln(h_1 / h_2)$  来分别计算时间方向与空间方向的收敛阶数, 其中  $\|e(h, \tau)\|_\gamma$  表示在空间步长  $h$  以及时间步长  $\tau$  下误差的  $\gamma$  范数,  $\gamma = 2$  或  $\infty$ .

在计算空间方向的收敛阶时, 可以选取不同的空间步长, 并固定一个相对小的时间步长来数值模拟, 以此来减少时间方向对误差的影响; 在计算时间方向的收敛阶时同理. 选择  $\tau = 1 \times 10^{-4}, h = 1/2, 1/4, 1/8, 1/16$  来计算空间方向的收敛阶, 选择  $h = 1/32, \tau = 1/25, 1/50, 1/100, 1/200$  来计算时间方向的收敛阶, 问题计算到  $t = 1$ . 从表 1 和表 2 容易看出: 格式 (10) 在空间方向上有 4 阶收敛率, 在时间方向上有 2 阶收敛率. 这与理论分析结果相符.

表 1 空间收敛阶及误差 ( $\tau = 1 \times 10^{-4}$ )

$h$	2-范数		$\infty$ -范数	
	$\ e(h, \tau)\ _2$	$o_h$	$\ e(h, \tau)\ _\infty$	$o_h$
1/2	$2.3425 \times 10^{-1}$		$1.7249 \times 10^{-1}$	
1/4	$1.1013 \times 10^{-2}$	4.411	$7.1923 \times 10^{-3}$	4.584
1/8	$6.6428 \times 10^{-4}$	4.051	$4.3590 \times 10^{-4}$	4.044
1/16	$3.8821 \times 10^{-5}$	4.097	$2.5467 \times 10^{-5}$	4.097

表 2 时间收敛阶及误差 ( $h = 1/32$ )

$\tau$	2-范数		$\infty$ -范数	
	$\ e(h, \tau)\ _2$	$o_\tau$	$\ e(h, \tau)\ _\infty$	$o_\tau$
1/25	$8.7810 \times 10^{-2}$		$5.8888 \times 10^{-2}$	
1/50	$2.1479 \times 10^{-2}$	2.031	$1.4078 \times 10^{-2}$	2.065
1/100	$5.3400 \times 10^{-3}$	2.008	$3.4836 \times 10^{-3}$	2.015
1/200	$1.3329 \times 10^{-3}$	2.038	$8.6850 \times 10^{-4}$	2.004

下面再考察格式 (10) 长时间的数值模拟能力. 选取  $h = 1/8, \tau = 0.01, \alpha = 0$  与  $\alpha = 0.005$ , 利用格式 (10) 模拟到  $t = 40$ . 图 1 展现了当  $\alpha = 0$  与  $\alpha = 0.005$  时孤立波  $|\psi_j|$  在  $t = 0, 10, 20, 30, 40$  处的波形图. 由图 1 可知: 当  $\alpha = 0$  时, 没有阻尼效应, 孤立波的形状和振幅保持不变; 当  $\alpha = 0.005$  时, 波形保持不变, 然而孤立波的振幅逐渐减小, 这与真实的物理问题一致.

图 2 与图 3 分别展示了当  $\alpha = 0$  和  $\alpha = 0.005$

时质量与动量随时间的演化情况. 图 4 描绘了质量和动量的衰减率随时间的演化关系, 其纵坐标的数据由  $(\ln(Q^n/Q^0))/2 \pm 0.1$  (其中  $Q^n = M^n$  或  $I^n$ ) 计算得到, 中间的线条是参照线  $y = -\alpha t = -0.005t$ . 从图 2 可以看出: 当  $\alpha = 0$  时, 质量与初始值相比是基本保持不变的, 符合薛定谔方程的质量守恒律, 而动量与初始值相比具有一定的误差. 由图 3 和图 4 可以看到: 质量随时间的衰减率完全与理论分析的结果一样, 且动量也随着时间而衰减.

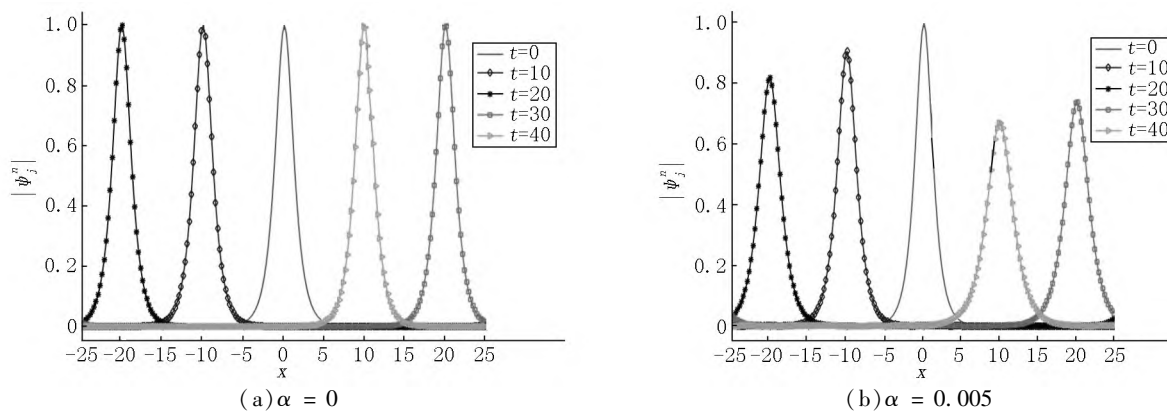
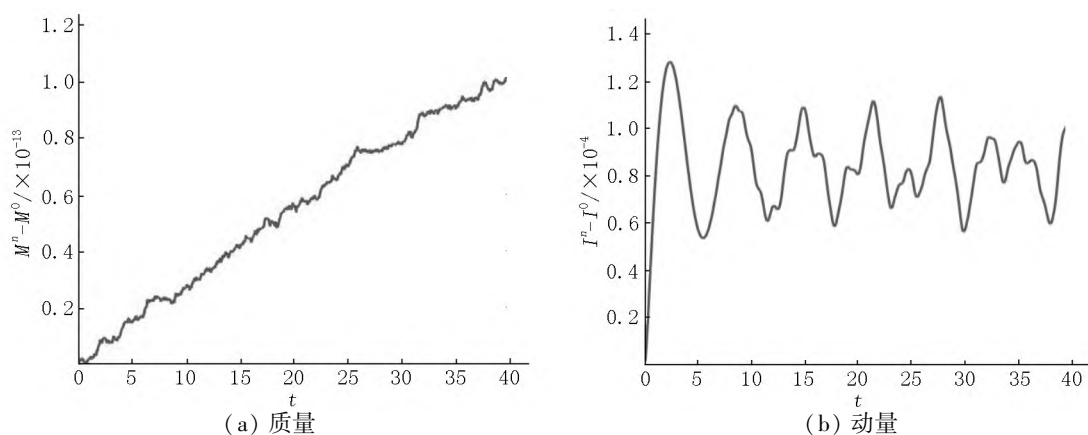
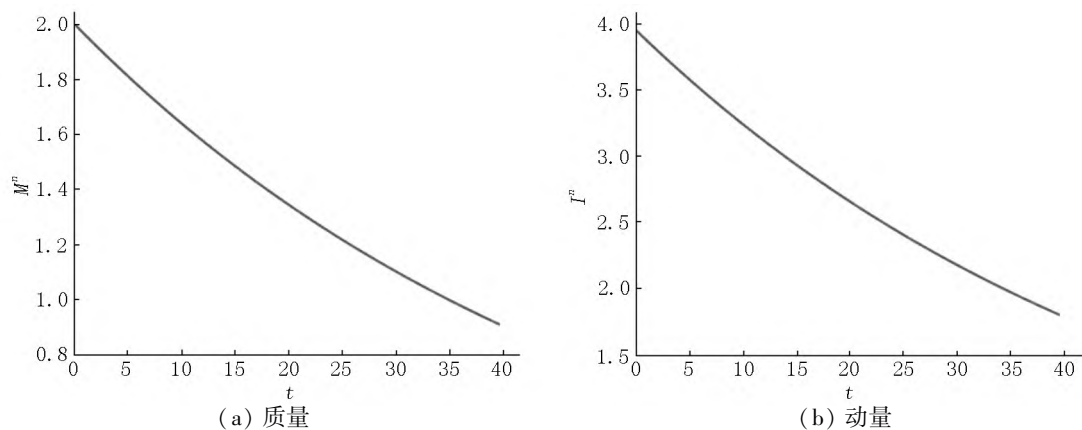
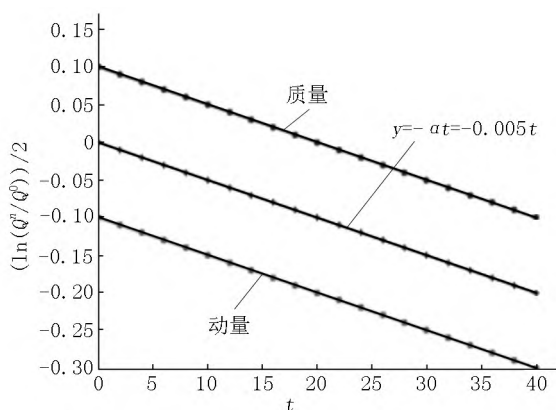
图1  $|\psi_j^n|$  在不同时间上的波形图2 当  $\alpha = 0$  时质量与动量随时间的演化图3 当  $\alpha = 0.005$  时质量与动量随时间的演化

图4 质量与动量随时间的衰减率

## 4 结论

本文通过采用分裂步方法和高阶紧致方法,构造了含有阻尼效应的非线性薛定谔方程的共形分裂高阶紧致方法.通过采用分裂步技术把原方程分解成更简单的2个微分方程,其中非线性问题能够精确求解,这可以避免求解非线性代数方程组.对于空间导数的离散采用高效的高阶紧致格式,这样得到的数值格式不仅能够保持原方程的共形结构,而且计算效率还非常高.这种数值格式的构造思路可以



推广到其他微分方程保结构格式的构造中,在未来的工作中将深入讨论此类格式。

## 5 参考文献

- [1] ELPHICK C, MERON E. Localized structures in surface waves [J]. *Physical Review A: General Physics, Atomic and Molecular Structure*, 1989, 40(6): 3226-3229.
- [2] DEUTSCH I H, ABRAM I. Reduction of quantum noise in soliton propagation by phase-sensitive amplification [J]. *Journal of the Optical Society of America B: Optical Physics*, 1994, 11(11): 2303-2313.
- [3] MCLACHLAN R, PERLMUTTER M. Conformal Hamiltonian systems [J]. *Journal of Geometry and Physics*, 2001, 39(4): 276-300.
- [4] BAO Weizhu, JAKSCH D. An explicit unconditionally stable numerical method for solving damped nonlinear Schrödinger equations with a focusing nonlinearity [J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2003, 41(4): 1406-1426.
- [5] JIANG Chaolong, CAI Wenjun, WANG Yushun. Optimal error estimate of a conformal Fourier pseudo-spectral method for the damped nonlinear Schrödinger equation [J]. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 2018, 34(4): 1422-1454.
- [6] JIANG Chaolong, SONG Yongzhong, WANG Yushun. A linearly implicit structure-preserving Fourier pseudo-spectral scheme for the damped nonlinear Schrödinger equation in three dimensions [J]. *Advances in Computational Mathematics*, 2020, 46(2): 2621-2633.
- [7] CAI Jiaxiang, ZHANG Haihui. Efficient schemes for the damped nonlinear Schrödinger equation in high dimensions [J]. *Applied Mathematics Letters*, 2020, 102: 106158.
- [8] HU Weipeng, DENG Zichen, YIN Tingting. Almost structure-preserving analysis for weakly linear damping nonlinear Schrödinger equation with periodic perturbation [J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2017, 42: 298-312.
- [9] STRANG G. On the construction and comparison of difference schemes [J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1968, 5(3): 506-517.
- [10] MCLACHLAN R I, QUISPES G R W. Splitting methods [J]. *Acta Numerica*, 2002, 11: 341-434.
- [11] LELE S K. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution [J]. *Journal of Computational Physics*, 1992, 103(1): 16-42.
- [12] 贺增甲, 孔令华, 符芳芳. 2 维 Gross-Pitaevskii 方程的分裂高阶紧致差分格式 [J]. *江西师范大学学报(自然科学版)*, 2020, 44(6): 599-603.
- [13] 陈萌, 孔令华, 王兰. Burgers 方程的跳点紧致格式 [J]. *江西师范大学学报(自然科学版)*, 2017, 41(5): 526-530.
- [14] KONG Linghua, LUO Yiyang, WANG Lan, et al. HOC-ADI schemes for two-dimensional Ginzburg-Landau equation in superconductivity [J]. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2021, 190: 494-507.
- [15] KONG Linghua, KUANG Liqun, WANG Tingchun. Efficient numerical schemes for two-dimensional Ginzburg-Landau equation in superconductivity [J]. *Discrete and Continuous Dynamical Systems: B*, 2019, 24(12): 6325-6347.
- [16] 孙志忠. 偏微分方程数值解法 [M]. 2 版. 北京: 科学出版社, 2012.

## The Conformal Splitting High-Order Compact Difference Scheme for Damped Nonlinear Schrödinger Equation

LUO Yiyang<sup>1</sup>, WANG Lan<sup>1\*</sup>, WAN Long<sup>2</sup>, KONG Linghua<sup>1</sup>

(1. School of Mathematics and Statistics, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi 330022, China;

2. School of Primary Education, Yuzhang Normal University, Nanchang Jiangxi 330103, China)

**Abstract:** The new conformal splitting high-order compact difference scheme for damped nonlinear Schrödinger equation is proposed in this paper. Firstly, the complex equation is divided into three subproblems by using the splitting technique. Then, the nonlinear subproblem can be solved precisely by using the property of point-by-point mass conservation, which avoids iteration and improves computational efficiency. In addition, the high-order compact method is applied to discretize the space, which improves the spatial accuracy without increasing the cost. Finally, the high accuracy, stability and two conformal conservation laws of the scheme are proved by theoretical analysis and numerical experiments.

**Key words:** damped nonlinear Schrödinger equation; splitting method; high-order compact scheme; conformal conservation law

(责任编辑: 曾剑锋)