

林府标,王骞,张千宏.一类带齐次分裂核的群体平衡方程的相似分析及相似解[J].江西师范大学学报(自然科学版),2022,46(2):215-220.

LIN Fubiao, WANG Qian, ZHANG Qianhong. The similarity analysis and solutions of a class of population balance equations with homogeneous fragmentation kernels [J]. Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science), 2022, 46(2): 215-220.

文章编号:1000-5862(2022)02-0215-06

## 一类带齐次分裂核的群体平衡方程的相似分析及相似解

林府标<sup>1</sup>,王 骞<sup>2</sup>,张千宏<sup>1</sup>

(1. 贵州财经大学数统学院, 贵州 贵阳 550025; 2. 贵州师范大学附属中学, 贵州 贵阳 550001)

**摘要:** 该文研究一类带齐次分裂核的群体平衡方程的相似分析及相似解. 首先将尺度变换群法用于一类带齐次分裂核的群体平衡方程, 探寻尺度函数的相似不变量, 用自相似不变量构造自相似解; 其次用解的群变换和自相似解获得了原方程的相似解、显式精确解、约化方程, 分析了解的的动力学性态; 最后, 相似分析结果表明: 尺度变换群法不仅可用于纯微分方程, 而且可用于群体平衡方程.

**关键词:** 群体平衡方程; 尺度变换群; 相似不变量; 相似解

**中图分类号:** O 175.5; O 175.6 **文献标志码:** A **DOI:** 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2022.02.15

### 0 引言

群体平衡方程<sup>[14]</sup>广泛应用于实体工业、化学工程、辐射诱导、机械工程、高分子聚合物降解、岩石的破碎、颗粒物的粉磨、药物的粉碎以及液滴、飞沫、微滴、雾滴、云滴的破裂过程等. 微滴分裂过程恰好是一分为二的群体平衡方程<sup>[1-2]</sup>, 它可写成

$$\underbrace{\frac{\partial f(x, t)}{\partial t}}_{\text{微滴密度分布的变化率}} = 2 \underbrace{\int_x^\infty K(x, y-x) f(y, t) dy}_{\text{微滴因分裂而出生或生长}} - \underbrace{f(x, t) \int_0^x K(y, x-y) dy}_{\text{微滴因分裂而死亡或破坏}}, \quad (1)$$

其中  $x$  代表微滴的内部坐标, 用于描述微滴种类固有的数量性态及特征, 如尺寸、形状、孔隙度、质量、体积、长度等;  $t$  代表时间,  $f(x, t)$  代表在  $t$  时刻尺寸是  $x$  的微滴分裂的尺寸演化性态分布. 分裂核  $K(x, y)$  描述尺寸是  $x+y$  的微滴分裂成尺寸分别是  $x$  和  $y$  的速率, 并且满足

$$K(x, y) = K(y, x) \geq 0,$$

尺寸是  $x$  的微滴分裂的速率  $v(x)$  以及尺寸是  $y$  的微滴分裂成尺寸是  $x$  的平均数量  $b(x|y)$  分别定义为

$$v(x) = \int_0^x K(y, x-y) dy, \\ b(x|y) = 2K(x, y-x)/v(y). \quad (2)$$

$b(x|y)$  满足质量守恒定律, 分裂微滴的子代微滴的平均数量满足关系式

$$\int_0^y x b(x|y) dx = y, 2 \leq \int_0^y b(x|y) dx = D(y) \leq \infty. \quad (3)$$

准确理解和应用实体微粒系统的复杂动力学性态以及微粒尺寸演化分布规律, 归结为研究方程(1)的精确解<sup>[4]</sup>. 但在实体应用领域中, 由于缺乏精确求解的理论和方法, 因而常用数值技术、矩方法、蒙特卡罗法、类方法、近似解析逼近理论等<sup>[1-4]</sup>.

尺度变换群与量纲分析法常被用于纯微分方程<sup>[5-9]</sup>, 文献[8]介绍了量纲分析的理论基础归结于 E. Buckingham 的  $\pi$ -定理, 并且给出了该定理的证

收稿日期: 2021-07-20

基金项目: 国家自然科学基金(11761018, 11361012), 贵州省科技计划基金(黔科合基础-ZK[2022]一般021), 贵州省科技厅科学技术基金([2020]1Y008)和贵州省教育厅创新群体(黔教合 KY 字[2021]015)资助项目.

作者简介: 林府标(1978—), 男, 贵州盘州人, 副教授, 博士, 主要从事偏微分方程研究. E-mail: linfubiao0851@163.com

明及其在包括 1945 年的核原子爆炸及热传导问题等纯偏微分方程中的应用. 文献[10] 探究了多参数尺度变换群的概念及相关理论, 给出了单参数尺度变换群在涉及非黏性气体的自相似解等纯偏微分方程中的应用. 如今该方法也被用于积分-偏微分方程群体平衡方程<sup>[11-18]</sup>. 从纯常微分方程和偏微分方程到积分-偏微分方程和群体平衡方程的应用, 并非简单地类推、拓广、平移, 这种推广最主要的困难在于积分项及类型的影响. 在文献[5-18] 的基础上, 本文用相似理论研究方程(1) 的相似不变量、约化方程、相似解、精确解、解的动力学性及特征.

## 1 齐次分裂核与群体平衡方程

设  $\lambda$  和  $\sigma$  为非负实数,  $\sigma$  次齐次分裂核  $K(x, y)$  满足

$$K(\lambda x, \lambda y) = \lambda^\sigma K(x, y). \quad (4)$$

其中式(4) 广泛应用于气溶胶科学、能源科学、医药科学、地球科学等, 受到诸多物理学家、化学家、工程师、科学家等的关注<sup>[14]</sup>. 在数学上易处理的齐次分裂核有  $K(x, y) = \kappa_0, K(x, y) = \kappa_1(x^m + y^m), K(x, y) = \kappa_2(xy)^n, K(x, y) = \kappa_3|x^p - y^p|$ , 其中  $m, n, p$  和  $\kappa_i (i = 0, 1, 2, 3)$  均是正常数,  $\kappa_i (i = 0, 1, 2, 3)$  代表动力学参数. 令  $y = xs$ , 由式(4) 可得

$$\begin{aligned} K(x, y - x) &= x^\sigma K(1, s - 1), \\ K(y, x - y) &= x^\sigma K(s, 1 - s), \\ \int_0^1 K(s, 1 - s) ds &= 2 \int_0^1 s K(s, 1 - s) ds, \\ \int_0^x K(y, x - y) dy &= x^{\sigma+1} \int_0^1 K(s, 1 - s) ds, \\ \int_x^\infty K(x, y - x) f(y, t) dy &= x^{\sigma+1} \int_1^\infty K(1, s - 1) \cdot \\ f(xs, t) ds. \end{aligned} \quad (5)$$

针对式(4), 由式(2) 和式(5) 可得

$$v(x) = x^{\sigma+1} \int_0^1 K(s, 1 - s) ds, b(sy | y) = 2y^\sigma K(s, 1 - s)/v(y), D(y) = 2. \quad (6)$$

可验证方程(6) 满足式(3). 事实上, 由式(5) 和式(6) 可得

$$\begin{aligned} \int_0^y xb(x | y) dx &= 2y \int_0^1 s K(s, 1 - s) ds / \int_0^1 K(s, 1 - s) ds = y, \\ D(y) &= \int_0^y b(x | y) dx = 2y^{\sigma+1} \int_0^1 K(s, 1 - s) ds / v(y) = 2. \end{aligned}$$

因此, 将式(4) 代入方程(1) 可得

$$\partial f(x, t) / \partial t = 2x^{\sigma+1} \int_1^\infty K(1, s - 1) f(xs, t) ds - x^{\sigma+1} \cdot$$

$$f(x, t) \int_0^1 K(s, 1 - s) ds. \quad (7)$$

方程(7) 的初值和边值条件分别是

$$f(x, 0) = f(x, t) |_{t=0}, f(0, t) = f(x, t) |_{x=0}, f(\infty, t) = 0. \quad (8)$$

$f(x, 0) = 0$  表示在最初微粒系统中没有微滴存在.  $f(\infty, 0) = 0$  描述尺寸足够大的微滴的密度分布趋于 0.

## 2 相似分析

在文献[9-18] 的基础上, 用尺度变换群法研究方程(7) 的不变量、自相似解、自相似性的可行性. 假设方程(7) 接受单参数为  $a$  的尺度变换群

$$\bar{x} = xa^{\lambda_1}, \bar{t} = ta^{\lambda_2}, \bar{f} = fa^\mu, \quad (9)$$

其中  $\lambda_1, \lambda_2$  和  $\mu$  是常数, 则对于方程(7) 的任一解  $f = f(x, t)$ , 需满足

$$\begin{aligned} \bar{f}(\bar{x}, \bar{t}) &= a^\mu f(\bar{x}a^{-\lambda_1}, \bar{t}a^{-\lambda_2}), F(\bar{x}, \bar{t}, \bar{f}) = F(x, t, f), \\ F(x, t, f) &= \partial f(x, t) / \partial t - 2x^{\sigma+1} \int_1^\infty K(1, s - 1) f(xs, \\ t) ds &+ x^{\sigma+1} f(x, t) \int_0^1 K(s, 1 - s) ds. \end{aligned}$$

考虑方程(7) 接受式(9) 的假设, 式(9) 将方程(7) 的任一解  $f = f(x, t)$  变成如下方程的解:

$$\begin{aligned} \partial \bar{f}(\bar{x}, \bar{t}) / \partial \bar{t} &= 2\bar{x}^{\sigma+1} \int_1^\infty K(1, s - 1) \bar{f}(\bar{x}s, \bar{t}) ds - \\ \bar{x}^{\sigma+1} \bar{f}(\bar{x}, \bar{t}) &\int_0^1 K(s, 1 - s) ds. \end{aligned} \quad (10)$$

把  $\bar{f}(\bar{x}, \bar{t}) = a^\mu f(\bar{x}a^{-\lambda_1}, \bar{t}a^{-\lambda_2})$  及式(9) 代入式(10), 得到

$$a^{\mu-\lambda_2} \partial f(x, t) / \partial t = a^{\mu+(\sigma+1)\lambda_1} \left( 2x^{\sigma+1} \int_1^\infty K(1, s - 1) f(xs, t) ds - x^{\sigma+1} f(x, t) \int_0^1 K(s, 1 - s) ds \right). \quad (11)$$

因为  $f = f(x, t)$  是方程(7) 的任一解, 所以由式(11) 可推出

$$\lambda_2 = -(\sigma + 1)\lambda_1. \quad (12)$$

用量纲分析和尺度变换群法研究方程(7), 且因变量个数  $m = 1$ , 自变量个数  $n = 2$ , 尺度变换群(9) 的群参数  $r = 1$ . 于是  $m + n - r = 2$ , 因此存在 2 个相似不变量

$$J_1(x, t, f) = x^{\omega_{11}} t^{\omega_{21}} f^{\omega_{31}}, J_2(x, t, f) = x^{\omega_{12}} t^{\omega_{22}} f^{\omega_{32}}, \quad (13)$$

其中  $\omega_{1i}, \omega_{2i}, \omega_{3i} (i = 1, 2)$  为常数. 若要式(13) 在式(9) 的作用下保持不变, 则有

$$J_1(\bar{x}, \bar{t}, \bar{f}) = J_1(x, t, f), J_2(\bar{x}, \bar{t}, \bar{f}) = J_2(x, t, f).$$

依据式(9) 和式(13) 得到

$$\lambda_1 \omega_{11} + \lambda_2 \omega_{21} + \mu \omega_{31} = 0, \lambda_1 \omega_{12} + \lambda_2 \omega_{22} + \mu \omega_{32} = 0. \quad (14)$$

把式(12) 代入方程(14), 得到

$$\begin{aligned} \lambda_1 \omega_{11} - (\sigma + 1) \lambda_1 \omega_{21} + \mu \omega_{31} &= 0, \\ \lambda_1 \omega_{12} - (\sigma + 1) \lambda_1 \omega_{22} + \mu \omega_{32} &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

### 3 相似解

类似于式(9), 可验证方程(7) 接受平移变换群

$$T_{\tau_0}: \bar{x} = x, \bar{t} = t + \tau_0, \bar{f} = f,$$

其中  $\tau_0$  是群参数. 若  $\lambda_1 = 0$ , 则方程(15) 退化成

$$\omega_{1i}, \omega_{2i} \in \mathbf{R}, \omega_{3i} = 0 (i = 1, 2).$$

因此, 得到

$$(\omega_{11}, \omega_{21}, \omega_{31})^T = (1, 0, 0)^T, (\omega_{12}, \omega_{22}, \omega_{32})^T = (0, 1, 0)^T. \quad (16)$$

把解(16) 代入式(13), 得到

$$J_1(x, t, f) = x, J_2(x, t, f) = t.$$

因此, 对于此情形, 借助于  $T_{\tau_0}$ , 方程(7) 的相似解可写成

$$f(x, t) = e^{\alpha(t+\tau)} \varphi(x), \alpha \in \mathbf{R}, \quad (17)$$

其中解(17) 满足式(8),  $\varphi(x)$  满足约化方程

$$\begin{aligned} \alpha \varphi(x) &= 2x^{1+\sigma} \int_1^\infty K(1, s-1) \varphi(xs) ds - x^{1+\sigma} \cdot \\ \varphi(x) \int_0^1 K(s, 1-s) ds. \end{aligned} \quad (18)$$

若  $\lambda_1 \neq 0$ , 令  $\alpha = \mu/\lambda_1$ , 则  $\alpha \in \mathbf{R}$ , 方程(15) 可写成

$$\begin{aligned} \omega_{11} - (\sigma + 1) \omega_{21} + \alpha \omega_{31} &= 0, \\ \omega_{12} - (\sigma + 1) \omega_{22} + \alpha \omega_{32} &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

方程(19) 的解为

$$\begin{aligned} (\omega_{11}, \omega_{21}, \omega_{31})^T &= (\sigma + 1, 1, 0)^T, \\ (\omega_{12}, \omega_{22}, \omega_{32})^T &= (-\alpha, 0, 1)^T. \end{aligned} \quad (20)$$

将解(20) 代入式(13), 得到

$$J_1(x, t, f) = x^{\sigma+1} t, J_2(x, t, f) = x^{-\alpha} f.$$

因此, 借助于  $T_{\tau_0}$ , 方程(7) 的相似解可写成

$$f(x, t) = x^\alpha \varphi(z), z = x^{\sigma+1} (t + \tau_0), \quad (21)$$

其中解(21) 满足式(8),  $\varphi(z)$  满足约化方程

$$\begin{aligned} \varphi'(z) &= 2 \int_1^\infty K(1, s-1) s^\alpha \varphi(zs^{\sigma+1}) ds - \varphi(z) \cdot \\ \int_0^1 K(s, 1-s) ds. \end{aligned} \quad (22)$$

#### 3.1 情形 $K(x, y) = \kappa_0$

针对  $K(x, y) = \kappa_0$ , 用性质(4) 得到  $\sigma = 0$ . 由式(17) 和式(18) 得方程(7) 的相似解为

$$f(x, t) = e^{\alpha(t+\tau_0)} \varphi(x),$$

其中  $\varphi(x)$  满足约化方程

$$(\kappa_0 x + \alpha) \varphi(x) = 2\kappa_0 x \int_1^\infty \varphi(xs) ds. \quad (23)$$

类似地, 由式(21) 和式(22) 知, 方程(7) 的相似解可写成

$$f(x, t) = x^\alpha \varphi(z), z = x(t + \tau_0),$$

其中  $\varphi(z)$  满足约化方程

$$\varphi'(z) + \kappa_0 \varphi(z) = 2\kappa_0 \int_1^\infty s^\alpha \varphi(zs) ds.$$

#### 3.2 情形 $K(x, y) = \kappa_1(x^m + y^m)$

鉴于  $K(x, y) = \kappa_1(x^m + y^m)$ , 由性质(4) 可得  $\sigma = m$ . 由式(17) 和式(18) 知, 方程(7) 的相似解可写成

$$f(x, t) = e^{\alpha(t+\tau_0)} \varphi(x),$$

其中  $\varphi(x)$  满足约化方程

$$(\alpha + 2\kappa_1 x^{1+m}/(1+m)) \varphi(x) = 2\kappa_1 x^{1+m} \int_1^\infty (1 + (s-1)^m) \varphi(xs) ds.$$

类似地, 由式(21) 和式(22) 知, 方程(7) 的相似解可写成

$$f(x, t) = x^\alpha \varphi(z), z = x^{m+1} (t + \tau_0),$$

其中  $\varphi(z)$  满足约化方程

$$\begin{aligned} \varphi'(z) + 2\kappa_1 \varphi(z)/(1+m) &= 2\kappa_1 \int_1^\infty (1 + (s-1)^{m-1}) s^\alpha \varphi(zs^{m+1}) ds. \end{aligned}$$

#### 3.3 情形 $K(x, y) = \kappa_2(xy)^n$

针对  $K(x, y) = \kappa_2(xy)^n$ , 由性质(4) 可得  $\sigma = 2n$ . 由式(17) 和式(18) 知, 方程(7) 的相似解为

$$f(x, t) = e^{\alpha(t+\tau_0)} \varphi(x),$$

其中  $\varphi(x)$  满足约化方程

$$\begin{aligned} \alpha \varphi(x) &= 2\kappa_2 x^{1+2n} \int_1^\infty (s-1)^n \varphi(xs) ds - \kappa_2 x^{1+2n} \cdot \\ \varphi(x) \int_0^1 s^n (1-s)^n ds. \end{aligned}$$

类似地, 由式(21) 和式(22) 知, 方程(7) 的相似解可写成

$$f(x, t) = x^\alpha \varphi(z), z = x^{2n+1} (t + \tau_0),$$

其中  $\varphi(z)$  满足约化方程

$$\varphi'(z) = 2\kappa_2 \int_1^\infty (s-1)^n s^\alpha \varphi(zs^{2n+1}) ds - \kappa_2 \varphi(z) \cdot$$

$$\int_0^1 s^n (1-s)^n ds.$$

### 3.4 情形 $K(x, y) = \kappa_3 |x^p - y^p|$

对于  $K(x, y) = \kappa_3 |x^p - y^p|$ , 由性质(4) 可得  $\sigma = p$ . 由式(17) 和式(18) 知, 方程(7) 的相似解可写成

$$f(x, t) = e^{\alpha(t+\tau_0)} \varphi(x),$$

其中  $\varphi(x)$  满足约化方程

$$\alpha \varphi(x) = 2\kappa_3 x^{1+p} \int_1^\infty |1 - (s-1)^p| \varphi(xs) ds - \kappa_3 x^{1+p} \varphi(x) \int_0^1 |s^p - (1-s)^p| ds.$$

类似地, 由式(21) 和式(22) 知, 方程(7) 的相似解可写成

$$f(x, t) = x^\alpha \varphi(z), z = x^{p+1}(t + \tau_0),$$

其中  $\varphi(z)$  满足约化方程

$$\varphi'(z) = 2\kappa_3 \int_1^\infty |1 - (s-1)^p| s^\alpha \varphi(zs^{p+1}) ds - \kappa_3 \varphi(z) \int_0^1 |s^p - (1-s)^p| ds.$$

## 4 精确解及动力学性态

方程(7) 的精确解对理解微粒系统的动力学性态、理论和实际应用都是有价值和意义的. 采用尺度变换群法能否获得方程(7) 的精确解, 归结为对约化方程的精确解的研究问题. 针对  $K(x, y) = \kappa_0$ , 方程(7) 可具体写成

$$\partial f(x, t) / \partial t = 2\kappa_0 \int_x^\infty f(s, t) ds - \kappa_0 x f(x, t). \quad (24)$$

用观察试探函数法<sup>[11-18]</sup>, 可验证  $\varphi(x) = (\kappa_0 x + \alpha)^{-3}$  是方程(23) 的解, 因此, 方程(24) 的精确解为

$$f(x, t) = (\kappa_0 x + \alpha)^{-3} e^{\alpha(t+\tau_0)}. \quad (25)$$

假设  $f = f(x, t)$  是方程(24) 的解, 且满足式(8), 则 0 阶矩  $M_0(t)$  和 1 阶矩  $M_1(t)$  分别为

$$M_0(t) = \int_0^\infty f(x, t) dx, M_1(t) = \int_0^\infty x f(x, t) dx,$$

其中  $M_0(t)$  表示在微粒系统中微滴的总数量,  $M_1(t)$  表示在微粒系统中微滴的总质量. 若微滴在分裂过程中总保持质量守恒, 则  $M_1(t)$  是时间  $t$  的不变量, 即满足  $dM_1/dt = 0$ . 方程(24) 两边关于变量  $x$  从 0 到  $\infty$  同时积分, 得到

$$\frac{d}{dt} \int_0^\infty f(x, t) dx = 2\kappa_0 \int_0^\infty \int_x^\infty f(s, t) ds dx -$$

$$\kappa_0 \int_0^\infty x f(x, t) dx. \quad (26)$$

采用  $M_0(t)$  和  $M_1(t)$  及式(26), 可得

$$dM_0/dt = \kappa_0 M_1. \quad (27)$$

解(25) 是方程(24) 的真实解, 将它满足的动力学性态逐一进行分析. 当  $x \rightarrow \infty$  时,  $f(x, t) \rightarrow 0$ , 这表明微滴的密度函数满足性质: 当微滴尺寸足够大时, 微滴的密度函数值趋于 0. 若参数  $\alpha > 0$ , 则当  $t \rightarrow \infty$  时, 可推出  $f(x, t) \rightarrow \infty$ , 这表明解是不稳定的; 若参数  $\alpha < 0$ , 则当  $t \rightarrow \infty$  时, 可推出  $f(x, t) \rightarrow 0$ , 这表明解是稳定的; 若参数  $\alpha = 0$ , 则微滴的密度函数  $f(x, t)$  是时间  $t$  的不变量, 满足  $\partial f(x, t) / \partial t = 0$ , 这表明微滴因分裂而出生与微滴因分裂而死亡保持平衡. 解(25) 对应的初值和边值条件分别为

$$f(x, 0) = (\kappa_0 x + \alpha)^{-3} e^{\alpha \tau_0}, f(0, t) = \alpha^{-3} e^{\alpha(t+\tau_0)}, f(\infty, t) = 0.$$

假设  $L, T$  为正常数, 在闭矩形区域  $[0, L] \times [0, T]$  上, 对应的初值和边值条件分别是

$$f(x, 0) = (\kappa_0 x + \alpha)^{-3} e^{\alpha \tau_0}, f(0, t) = \alpha^{-3} e^{\alpha(t+\tau_0)}, f(L, t) = (\kappa_0 L + \alpha)^{-3} e^{\alpha(t+\tau_0)}.$$

考虑解(25),  $M_0(t)$  和  $M_1(t)$  及其相应的变化率分别为

$$M_0(t) = \int_0^\infty f(x, t) dx = e^{\alpha(t+\tau_0)} / (2\kappa_0 \alpha^2),$$

$$dM_0/dt = e^{\alpha(t+\tau_0)} / (2\kappa_0 \alpha),$$

$$M_1(t) = \int_0^\infty x f(x, t) dx = e^{\alpha(t+\tau_0)} / (2\kappa_0^2 \alpha),$$

$$dM_1/dt = e^{\alpha(t+\tau_0)} / (2\kappa_0^2).$$

$M_0(t)$  和  $M_1(t)$  及其变化率的计算结果表明: 解(25) 满足  $M_0(t)$  的变化率与  $M_1(t)$  的性质(27). 若参数  $\alpha > 0$ , 则变化率  $dM_0/dt > 0$ , 这表明在微粒系统中随着微滴分裂的不断演化, 微滴的总数量不断增加, 出生的比死亡的更多; 若参数  $\alpha < 0$ , 则变化率  $dM_0/dt < 0$ , 这表明在微粒系统中随着微滴分裂的不断演化, 微滴的总数量不断减少, 死亡的比出生的更多. 变化率  $dM_1/dt > 0$  表明在微粒系统中随着微滴分裂的不断演化, 微滴的总质量不守恒, 且是非单调递减的. 本文分别选取参数  $\alpha = 0.6$  和  $\alpha = -1.5$ ,  $\tau_0 = 0$ , 动力学参数  $\kappa_0 = 0.8$  和  $\kappa_0 = 3.1$ , 微滴分裂演化的动力学性态和微滴的密度函数式(25) 在矩形区域  $[0, 2] \times [0, 0.8]$  上的图像分别如图 1(a) 和 (b) 所示.



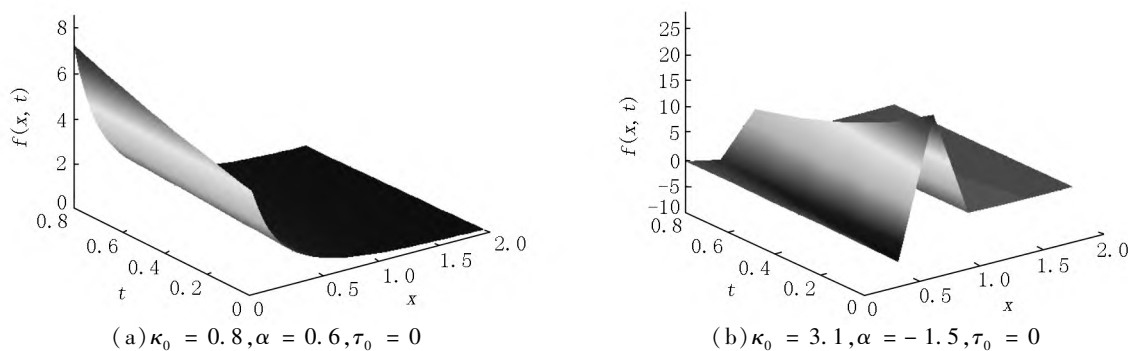


图1 微滴尺寸分布分裂演化行为函数式(25)的图像

## 5 结束语

用尺度变换群法研究方程(7)的相似分析,不仅是有效的,而且构造了相似不变量、约化方程、精确解,分析了精确解的动力学性态及特征.如何构造解析求解的方法探寻约化方程的精确解,并且给出原方程的精确解及动力学性态分析,这些都值得在今后的研究工作中不断创新.

## 6 参考文献

- [1] YEOH G H, CHEUNG C P, TU Jiyuan. Multiphase flow analysis using population balance modeling: bubbles, drops and particles [M]. Amsterdam: Elsevier Science, 2014.
- [2] RAMKRISHNA D. Population balances, theory and applications to particulate systems in engineering [M]. San Diego: Academic Press, 2000.
- [3] WANG Kaiyuan, YU Suyuan, WEI Peng. An analytical solution of the population balance equation for simultaneous Brownian and shear coagulation in the continuum regime [J]. Advanced Powder Technology, 2020, 31(5): 2128-2135.
- [4] ZIFF R M. New solutions to the fragmentation equation [J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 1991, 24(12): 2821-2828.
- [5] BARENBLATT G I. Similarity, self-similarity, and intermediate asymptotics [M]. New York: Plenum Publishing Corporation, 1979.
- [6] BUCKINGHAM E. On physically similar systems, illustrations of the use of dimension equations [J]. Physical Review, 1914, 4(4): 345-376.
- [7] 林府标, 张千宏. Liouville 方程与其约化变换方程的精确解及  $\psi(\xi)$  展式法 [J]. 吉林大学学报(理学版), 2021, 59(1): 27-33.
- [8] BLUMAN G W, KUMEI S. Symmetries and differential equations [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1989.
- [9] OVSIANNIKOV L V. Group analysis of differential equations [M]. New York: Academic Press, 1982: 1-47.
- [10] MELESHKO S V. Methods for constructing exact solutions of partial differential equations: mathematical and analytical techniques with applications to engineering [M]. New York: Springer-Verlag, 2005.
- [11] 林府标, 张千宏. 用伸缩变换群分析法探究群体平衡方程的自相似解 [J]. 应用数学学报, 2020, 43(5): 833-852.
- [12] 林府标, 张千宏. 一类群体平衡方程的伸缩变换群分析及自相似解 [J]. 安徽大学学报(自然科学版), 2020, 44(3): 6-12.
- [13] 林府标, 张千宏. 一类细胞分裂群体平衡方程的对称群及精确解 [J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2021, 44(2): 209-215.
- [14] 林府标, 张千宏. 一类群体平衡方程的尺度变换群分析及显式精确解 [J]. 浙江大学学报(理学版), 2022, 49(1): 36-40, 59.
- [15] 林府标, 张千宏. 纯粹的破损过程的群体平衡方程的对称及精确解 [J]. 杭州师范大学学报(自然科学版), 2021, 20(3): 295-303.
- [16] 林府标, 张千宏. 一类群体平衡方程的李群分析及精确解 [J]. 华东师范大学学报(自然科学版), 2020, 2020(2): 15-22.
- [17] 林府标, 张千宏. 含源项的 Smoluchowski 方程的预李群分类 [J]. 华中师范大学学报(自然科学版), 2020, 54(5): 749-757, 774.
- [18] LIN Fubiao, FLOOD A E, MELESHKO S V. Exact solutions of population balance equation [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2016, 36: 378-390.

## The Similarity Analysis and Solutions of a Class of Population Balance Equations with Homogeneous Fragmentation Kernels

LIN Fubiao<sup>1</sup>, WANG Qian<sup>2</sup>, ZHANG Qianhong<sup>1</sup>

(1. School of Mathematics and Statistics, Guizhou University of Finance and Economics, Guiyang Guizhou 550025, China;

2. The Middle School Attached to the Guizhou Normal University, Guiyang Guizhou 550001, China)

**Abstract:** The similarity analysis and solutions of a class of population balance equations with homogeneous fragmentation kernels are studied in this paper. Firstly, the method of scaling transformation group is applied to a class of population balance equations with homogeneous fragmentation kernels to explore the similarity invariant variables of scaling functions. The self-similar solutions are constructed by the self-similar invariant variables. Secondly, the similarity solutions, exact explicit solutions and reduced integro-ordinary differential equations of the original equations are obtained by using group transformation of solutions and self-similar solutions. The analysis of dynamic behavior of solution is also presented. Finally, the similarity analysis results show that the scaling transformation group can not only be used for pure differential equations, but also be applied to population balance equations.

**Key words:** population balance equation; scaling transformation group; similarity invariant variable; similarity solution

(责任编辑:曾剑锋)

(上接第 202 页)

## The Properties of Certain Analytic Functions Defined by $q$ -Difference Operator

WANG Bo, LIU Jinlin\*

(Department of Mathematics, Yangzhou University, Yangzhou Jiangsu 225002, China)

**Abstract:** The new subclass of multivalent analytic functions is defined by means of  $q$ -difference operator and Janowski functions. The sufficient and necessary conditions, coefficient estimates, distortion theorems, growth theorems, radius of convexity and starlikeness of the new class are given.

**Key words:**  $q$ -difference operator; Janowski functions; multivalent analytic functions; distortion theorem; radius of convexity; radius of starlikeness

(责任编辑:曾剑锋)