

张利娟,孙建强.分数阶 Klein-Gordon-Schrödinger 方程的保能量方法 [J].江西师范大学学报(自然科学版),2022,46(3):257-261.

ZHANG Lijuan, SUN Jianqiang. The energy-preserving method for the fractional Klein-Gordon-Schrödinger equation [J]. Journal of Jiangxi Normal University( Natural Science), 2022, 46(3): 257-261.

文章编号: 1000-5862(2022)03-0257-05

# 分数阶 Klein-Gordon-Schrödinger 方程的保能量方法

张利娟,孙建强\*

(海南大学理学院,海南 海口 570228)

摘要: 该文先将分数阶 Klein-Gordon-Schrödinger 方程转化成辛结构的哈密顿系统,利用傅里叶拟谱方法对 Riesz 空间分数阶导数进行近似离散,得到分数阶 Klein-Gordon-Schrödinger 方程有限维哈密顿系统;再利用 2 阶平均向量场方法对有限维哈密顿系统离散,得到分数阶 Klein-Gordon-Schrödinger 方程新的保能量格式;最后利用新的保能量格式数值模拟方程孤立波的演化行为,并分析新格式的保能量守恒特性.

关键词: 平均向量场方法; 分数阶 Klein-Gordon-Schrödinger 方程; 傅里叶拟谱方法; 能量守恒格式

中图分类号: O 241.5 文献标志码: A DOI: 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2022.03.07

## 0 引言

分数阶微分方程在科学和工程领域中具有重要的应用<sup>[1-2]</sup>,许多学者对分数阶微分方程的理论和计算进行了大量的研究<sup>[3-6]</sup>.本文利用平均向量场方法和傅里叶拟谱方法计算具有拉普拉斯算子( $1 < \alpha < 2$ )的分数阶 Klein-Gordon-Schrödinger (KGS) 方程<sup>[7]</sup>

$$\begin{cases} iu_t - \beta (-\Delta)^{\alpha/2} u/2 + \alpha_1 u \varphi = 0, \\ \varphi_{tt} - \gamma \varphi_{xx} + m^2 \varphi - \alpha_1 |u|^2 = 0, \end{cases} \quad (1)$$

其中  $i = \sqrt{-1}$ , 初始条件为  $u(x, 0) = u_0(x)$ ,  $\varphi(x, 0) = \varphi_0(x)$ ,  $\varphi_t(x, 0) = \varphi_1(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ . 零边界条件为  $u(x, t) = 0$ ,  $\varphi(x, t) = 0$ , 其中  $x \in \mathbf{R} \setminus \Omega$ ,  $\Omega = (x_L, x_R)$ ,  $t \in [0, T]$ . 复函数  $u(x, t)$  表示标量复核子场, 实函数  $\varphi(x, t)$  表示标量介子场.  $\alpha_1, \beta$  是耦合常数, 实常数  $m$  描述介子的质量. 分数阶 KGS 方程(1)具有能量守恒性, 相应的能量函数为

$$E(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi_t^2 + \gamma \varphi_x^2 + m^2 \varphi^2 + \beta |(-\Delta)^{\alpha/4} u|^2 - 2\alpha_1 |u|^2 \varphi) dx. \quad (2)$$

当  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 1$  时, 方程(1)变为耦合 KGS 方程. 在量子场论中, 耦合 KGS 方程是守恒复中子场和实介子场相互作用的数学模型. 在耦合 KGS 方程中, 已经发现了许多重要的结论, 如 M. Ohta<sup>[8]</sup> 分析了耦合 KGS 方程的稳定性, 孔令华等<sup>[9]</sup> 提出了辛方法数值求解耦合 KGS 方程. 分数阶 KGS 方程是经典耦合 KGS 方程的推广, 分数阶 KGS 方程(1)的理论和计算越来越受到关注. 如黄春妍等<sup>[10]</sup> 证明了分数阶 KGS 方程的柯西问题的局部和整体的适定性、低正则性, 王俊杰等<sup>[11]</sup> 利用守恒的傅里叶谱方法来求解分数阶 KGS 方程.

微分方程保能量守恒性的数值方法近年来成为保结构算法研究领域的热点, 平均向量场方法能较好地保持哈密顿系统固有的能量守恒特性. 平均向量场方法是 1999 年由 R.I. McLachlan 等<sup>[12]</sup> 提出的用于求解哈密顿系统的数值方法, 能精确地保持系统的能量<sup>[13-14]</sup>. 文献[15-16] 已利用平均向量场方法分别求解了薛定谔方程和 sine-Gordon 方程等, 取得了满意的效果. 利用保能量算法数值求解分数阶微分方程, 目前国内外研究工作还较少. 本文将利用 2 阶平均向量场方法和傅里叶拟谱方法构造分数阶 KGS 方程(1)的保能量格式.

收稿日期: 2021-10-15

基金项目: 国家自然科学基金(11961020)资助项目。

通信作者: 孙建强(1971—), 男, 湖南双峰人, 教授, 博士, 主要从事微分方程的数值解法研究. E-mail: sunjq123@qq.com

首先,将分数阶 KGS 方程转化成辛结构的哈密顿系统;然后,介绍了  $\alpha$  阶 Riesz 空间分数阶导数定义,给出了 Riesz 空间分数阶导数与分数阶拉普拉斯算子之间的关系,利用傅里叶拟谱方法对 Riesz 空间分数阶导数在空间方向上进行离散近似,得到相应的离散矩阵;再利用傅里叶拟谱方法对 Riesz 空间分数阶 KGS 方程(1)进行空间离散近似,得到有限维的哈密顿系统,在时间方向上利用 2 阶平均向量场方法离散哈密顿系统,构造出分数阶耦合 KGS 的保能量格式;最后,利用新格式数值模拟分数阶 KGS 方程孤立波的演化行为,并对新格式的保能量守恒特性进行分析,得出结论.

## 1 分数阶 KGS 方程辛结构的哈密顿系统

令  $u = p + iq$ ,  $\varphi_t = 2v$ , 则分数阶耦合 KGS 方程(1)等价于

$$\begin{cases} q_t = -\beta(-\Delta)^{\alpha/2}p/2 + \alpha_1\varphi p, \\ p_t = \beta(-\Delta)^{\alpha/2}q/2 - \alpha_1\varphi q, \\ v_t = \gamma\varphi_{xx}/2 - m^2\varphi/2 + \alpha_1(p^2 + q^2)/2, \\ \varphi_t = 2v. \end{cases} \quad (3)$$

方程(3)可以表示成如下的无限维哈密顿系统

$$dz/dt = J\delta H(z)/(\delta z), \quad (4)$$

$$\text{其中 } z = (q \ p \ v \ \varphi)^T, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

相应的哈密顿函数为

$$H(z) = \int_{-\infty}^{\infty} (\beta(-\Delta)^{\alpha/4}p)^2 - ((-\Delta)^{\alpha/4}q)^2 / 4 - \gamma\varphi_x^2/4 - m^2\varphi^2/4 + \alpha_1\varphi(p^2 + q^2)/2 - v^2) dx. \quad (5)$$

## 2 分数阶 KGS 方程的保能量方法

引理 1<sup>[17]</sup> 在无限区间  $(-\infty < x < \infty)$  上,对于函数  $u(x, t)$ , 有下列等式成立

$$\partial^\alpha u(x, t) / \partial |x|^\alpha = -1/(2\cos(\pi\alpha/2)\Gamma(n-\alpha))$$

•

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\xi, t)}{|x-\xi|^{\alpha+1-n}} d\xi = -(-\Delta)^{\alpha/2} u(x, t), \quad (6)$$

其中  $n-1 < \alpha < n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

在无限区间  $(-\infty < x < \infty)$  上,对于函数  $u(x, t)$ , 分数阶拉普拉斯算子<sup>[18]</sup>可以被定义为

$$-(-\Delta)^{\alpha/2} u(x, t) = -F^{-1} |x|^\alpha F u(x, t), \quad (7)$$

其中  $F$  和  $F^{-1}$  分别表示傅里叶变换和傅里叶逆变换,有

$$-(-\Delta)^{\alpha/2} u(x, t) = - \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} |x|^\alpha \cdot$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi\eta} u(\eta, t) d\eta d\xi / 2\pi. \quad (8)$$

在具有周期边界条件或零边界条件的有界区间  $\Omega = (a, b)$  上,由傅里叶级数定义有

$$-(-\Delta)^{\alpha/2} u(x, t) = - \sum_{l \in \mathbb{Z}} |v_l|^\alpha \hat{u}_l e^{iv_l(x-a)}, \quad (9)$$

其中  $v_l = 2l\pi/(b-a)$  和傅里叶系数  $\hat{u}_l = \int_{\Omega} u(x, t) e^{-iv_l(x-a)} dx / (b-a)$ .

假设空间积分区间  $\Omega = [a, b]$ , 并将  $\Omega$  进行  $N$  等分,  $N$  是一个正偶数, 空间步长  $h = (b-a)/N$ . 令  $x_j = a + jh$  ( $j = 0, 1, \dots, N-1$ ) 为空间傅里叶配置点<sup>[19]</sup>. 令函数  $u(x, t)$  的逼近函数  $u_N(x, t)$  表示插值逼近  $(I_N u)(x, t)$ , 有

$$(I_N u)(x, t) = u_N(x, t) = \sum_{k=-N/2}^{N/2} \tilde{u}_k e^{ik\mu(x-a)}, \quad (10)$$

其中  $\tilde{u}_k = \sum_{j=0}^{N-1} u(x_j, t) e^{-ik\mu(x_j-a)} / (Nc_k)$ ,  $\mu = 2\pi/(b-a)$ . 当  $|k| < N/2$  时  $c_k = 1$ , 当  $|k| = N/2$  时  $c_k = 2$ .

由式(9)和式(10)可得

$$-(-\Delta)^{\alpha/2} u_N(x_j, t) = - \sum_{k=-N/2}^{N/2} |k\mu|^\alpha \tilde{u}_k e^{ik\mu(x_j-a)}. \quad (11)$$

令  $u_j = u(x_j, t)$ , 将  $\tilde{u}_k$  代入式(11), 可得

$$-(-\Delta)^{\alpha/2} u_N(x_j, t) = - \sum_{k=-N/2}^{N/2} |k\mu|^\alpha \cdot$$

$$\left( \sum_{l=0}^{N-1} u_l e^{-ik\mu(x_l-a)} / (Nc_k) \right) e^{ik\mu(x_j-a)} = \sum_{l=0}^{N-1} u_l \left( - \sum_{k=-N/2}^{N/2} |k\mu|^\alpha \cdot e^{ik\mu(x_j-x_l)} / (Nc_k) \right) = (D_2^\alpha u)_j, \quad (12)$$

其中  $u = (u_0, u_1, \dots, u_{N-1})^T$ ,  $D_2^\alpha$  是  $N$  阶矩阵的  $\alpha$  ( $1 < \alpha < 2$ ) 阶偏导数的谱微分矩阵,  $D_2^\alpha$  的元素为

$$(D_2^\alpha)_{j,l} = - \sum_{k=-N/2}^{N/2} \frac{1}{Nc_k} |k\mu|^\alpha e^{ik\mu(x_j-x_l)}, \quad (13)$$

同时在方程(3)中变量  $\varphi$  关于  $x$  的 2 阶偏导数的谱微分矩阵的元素<sup>[17]</sup>为

$$(D_2)_{i,j} = \begin{cases} \frac{\mu^2(-1)^{i+j+1}}{2\sin^2(\mu(x_i-x_j)/2)}, & i \neq j, \\ -\mu^2(N^2+2)/12, & i = j. \end{cases} \quad (14)$$

在空间方向上,利用傅里叶拟谱方法对分数阶

KGS 方程 (3) 进行离散, 可得到方程 (3) 的半离散系统

$$\begin{cases} dq_j/dt = \beta(D_2^\alpha p)_j/2 + \alpha_1 \varphi_j p_j, \\ dp_j/dt = -\beta(D_2^\alpha q)_j/2 - \alpha_1 \varphi_j q_j, \\ dv_j/dt = \gamma(D_2 \varphi)_j/2 - m^2 \varphi_j/2 + \alpha_1(p_j^2 + q_j^2)/2, \\ d\varphi_j/dt = 2v_j, \end{cases} \quad (15)$$

其中  $j = 0, 1, \dots, N-1$ , 半离散系统 (15) 可表示为如下有限维哈密顿系统

$$dZ/dt = J \nabla_Z H(Z), \quad (16)$$

其中  $Z = (q_0, q_1, \dots, q_{N-1}, p_0, p_1, \dots, p_{N-1}, v_0, v_1, \dots, v_{N-1}, \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{N-1})^T$ ,

$$J = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & I_N & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -I_N & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_N \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -I_N & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

$\mathbf{0}$  和  $I$  分别为零矩阵和单位矩阵, 相应的哈密顿函数为

$$H(Z) = \beta(p^T D_2^\alpha p + q^T D_2^\alpha q)/4 + \gamma(\varphi^T D_2 \varphi)/4 + \sum_{j=0}^{N-1} (\alpha_1 \varphi_j (p_j^2 + q_j^2)/2 - m^2 \varphi_j^2/4 - v_j^2).$$

在时间方向上利用 2 阶平均向量场方法<sup>[15]</sup>

$$(Z^{n+1} - Z^n)/\tau = \int_0^1 f((1-\xi)Z^n + \xi Z^{n+1}) d\xi \quad (17)$$

和离散哈密顿系统 (16), 可得到如下离散格式

$$\begin{aligned} (q_j^{n+1} - q_j^n)/\tau &= \beta(D_2^\alpha(p^{n+1} + p^n)/2)_j/2 + \alpha_1(\varphi_j^{n+1} p_j^{n+1}/3 + \varphi_j^{n+1} p_j^n/6 + \varphi_j^n p_j^{n+1}/6 + \varphi_j^n p_j^n/3), \\ (p_j^{n+1} - p_j^n)/\tau &= -\beta(D_2^\alpha(q^{n+1} + q^n)/2)_j/2 - \alpha_1(\varphi_j^{n+1} q_j^{n+1}/3 + \varphi_j^{n+1} q_j^n/6 + \varphi_j^n q_j^{n+1}/6 + \varphi_j^n q_j^n/3), \\ (v_j^{n+1} - v_j^n)/\tau &= \gamma(D_2(\varphi^{n+1} + \varphi^n)/2)_j/2 - m^2((\varphi_j^{n+1} + \varphi_j^n)/2)/2 + \alpha_1(p_j^{n+1} p_j^{n+1} + p_j^{n+1} p_j^n + p_j^n p_j^n + q_j^{n+1} q_j^{n+1} + q_j^{n+1} q_j^n + q_j^n q_j^n)/6, \\ (\varphi_j^{n+1} - \varphi_j^n)/\tau &= v_j^{n+1} + v_j^n. \end{aligned} \quad (18)$$

**定理 1** 离散格式 (18) 能精确地保持哈密顿系统能量守恒<sup>[15]</sup>

$$H(Z^{n+1}) = H(Z^n).$$

证 方程 (17) 可以改写为

$$(Z^{n+1} - Z^n)/\tau = S \int_0^1 \nabla H((1-\xi)Z^n + \xi Z^{n+1}) d\xi. \quad (19)$$

式 (19) 两端关于  $\int_0^1 \nabla H((1-\xi)Z^n + \xi Z^{n+1}) d\xi$

取尺度积, 由  $S$  是反对称矩阵可得

$$\frac{1}{\tau} \int_0^1 (Z^n - Z^{n+1}) \cdot \nabla H((1-\xi)Z^n + \xi Z^{n+1}) d\xi = 0,$$

$$\text{即 } \frac{1}{\tau} \int_0^1 d H((1-\xi)Z^n + \xi Z^{n+1}) d\xi = 0.$$

由微积分基本定理可得

$$(H(Z^{n+1}) - H(Z^n))/\tau = 0.$$

即定理 1 得证.

### 3 数值模拟

利用新格式 (19) 对分数阶 KGS 方程 (1) 进行数值模拟. 定义相对能量误差函数为

$$R_E(t) = |(H(Z^n) - H(Z^0))/H(Z^0)|,$$

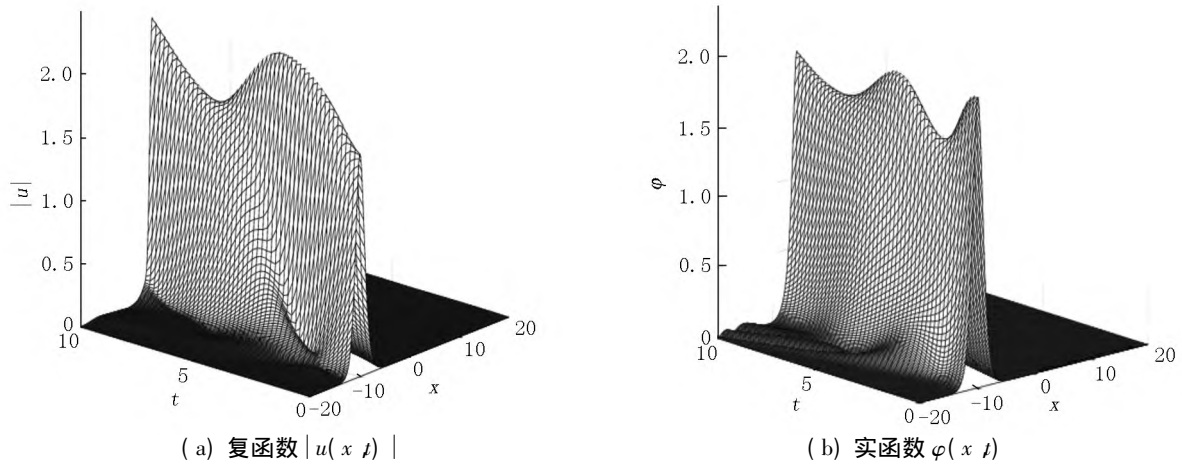
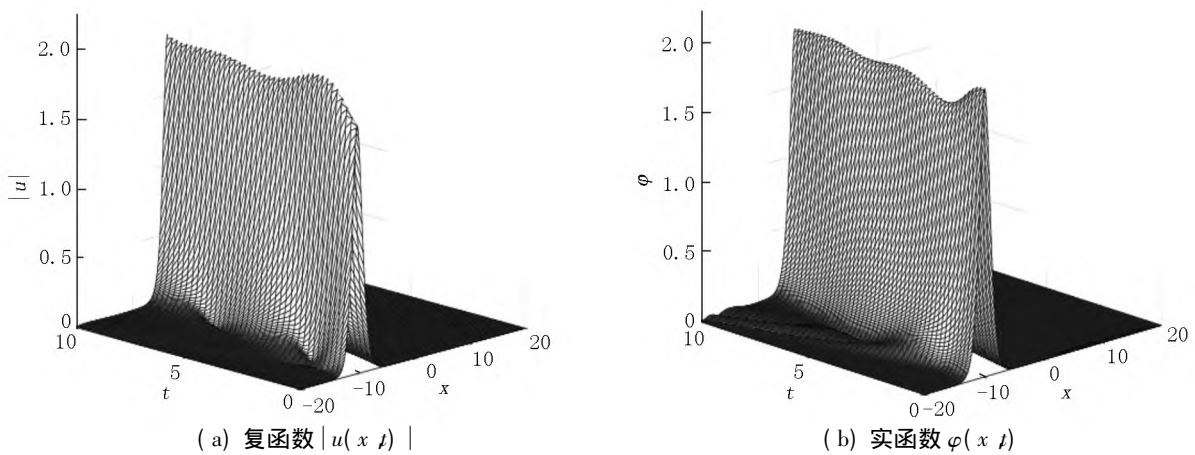
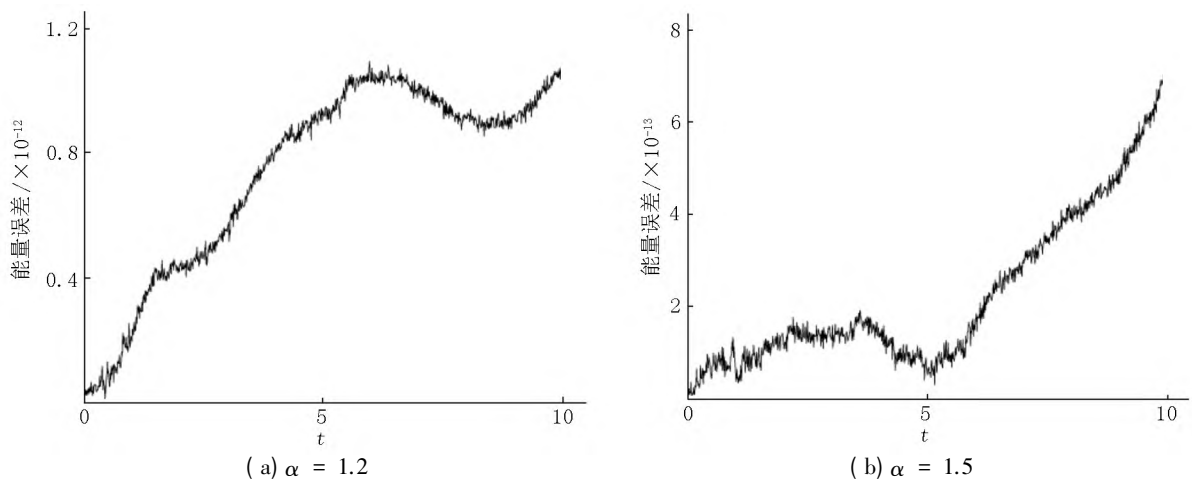
其中  $H(Z^n) = \beta(p^{nT} D_2^\alpha p^n + q^{nT} D_2^\alpha q^n)/4 + \gamma(\varphi^{nT} D_2 \varphi^n)/4 + \sum_{j=0}^{N-1} (\alpha_1 \varphi_j^n ((p_j^n)^2 - m^2 (\varphi_j^n)^2/4 + (q_j^n)^2)/2 - (v_j^n)^2)$ .

设分数阶 KGS 方程 (1) 中变量  $\beta = 1, \gamma = 1, m = 1, \alpha_1 = 1$ , 则初始条件<sup>[7]</sup> 为

$$u_0(x) = 3\sqrt{2} \operatorname{sech}^2((x - x_0)/(2\sqrt{1-v^2})) e^{ix} / (4\sqrt{1-v^2}),$$

$v(x) = \varphi_1(x)/2 = 3v \operatorname{sech}^2((x - x_0)/(2\sqrt{1-v^2})) \cdot \tanh((x - x_0)/(2\sqrt{1-v^2}))/ (8(1-v^2)\sqrt{1-v^2})$ , 其中  $\varphi_0(x) = 3\sqrt{2} \operatorname{sech}^2((x - x_0)/(2\sqrt{1-v^2}))/ (4\sqrt{1-v^2})$ ,  $v = 0.8, x_0 = -10$  和  $x \in [-20, 20], t \in [0, 10], \tau = 0.01, h = 0.1$ .

图 1(a) 表示复函数  $u(x, t)$  孤立波的模在  $\alpha = 1.2, t \in [0, 10]$  时的数值解, 图 1(b) 表示实函数  $\varphi(x, t)$  孤立波在  $\alpha = 1.2, t \in [0, 10]$  时的数值解, 由图 1 可以看出孤立波数值解的波形光滑且较平稳地随时间传播, 与文献 [7] 的数值结果一致. 图 2(a) 表示复函数  $u(x, t)$  孤立波的模在  $\alpha = 1.5, t \in [0, 10]$  时的数值解, 图 2(b) 表示实函数  $\varphi(x, t)$  孤立波在  $\alpha = 1.5, t \in [0, 10]$  时的数值解, 由图 2 可以看出孤立波数值解的波形光滑且较平稳地随时间传播, 与文献 [7] 的数值结果也同样一致. 图 3 表示在分数阶 KGS 方程中孤立波在  $\alpha$  取不同值时数值解的相对能量误差随时间的变化, 误差可达  $10^{-13}$ , 可忽略不计. 这表明新格式能较好地模拟在分数阶 KGS 方程中孤立波的演化行为, 并精确地保持方程离散能量守恒性.

图1 分数阶 KGS 方程  $|u(x, t)|$  和  $\varphi(x, t)$  在  $\alpha = 1.2$  时的数值解图2 分数阶 KGS 方程  $|u(x, t)|$  和  $\varphi(x, t)$  在  $\alpha = 1.5$  时的数值解图3 分数阶 KGS 方程在  $\alpha$  取不同值且  $t \in [0, 10]$  时的相对能量误差

## 4 小结

本文把分数阶 KGS 方程转化成具有辛结构的哈密顿系统,然后利用傅里叶谱方法和平均向量场方法数值离散分数阶 KGS 方程,得到分数阶 KGS 方程新的保能量格式.数值结果表明:新格式能较好地模拟分数阶 KGS 方程孤立波的行为,并保方程的

能量守恒性,验证了格式的保能量守恒性.这说明本文提出的分数阶 KGS 方程的保能量方法是有效的,为进一步研究其他分数阶微分方程提供了可供选择的数值算法.

## 5 参考文献

- [1] UCHAIKIN V V. Fractional derivatives for physicists and en-

- gineers [M]. Beijing: Higher Education Press 2013: 230-240.
- [2] TARASOV V. Fractional dynamics: applications of fractional calculus to dynamics of particles, fields and media [M]. Beijing: Higher Education Press 2011: 163-180.
- [3] LI Changpin, ZENG Fanhai. Numerical methods for fractional calculus [M]. New York: CRC Press 2015: 1-17.
- [4] DING Hengfei, LI Changpin. High-order numerical algorithms for Riesz derivatives via constructing new generating functions [J]. Journal of Scientific Computing 2017, 71(2): 759-784.
- [5] RAN Maohua, ZHANG Chengjian. A conservative difference scheme for solving the strongly coupled nonlinear fractional Schrödinger equations [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation 2016, 41: 64-83.
- [6] 刘发旺, 庄平辉, 刘青霞. 分数阶偏微分方程数值方法及其应用 [M]. 北京: 科学出版社 2015: 320-340.
- [7] WANG Junjie, XIAO Aiguo. A efficient conservation difference scheme for fractional Klein-Gordon-Schrödinger equations [J]. Applied Mathematics and Computation, 2018, 320: 691-709.
- [8] OHTA M. Stability of stationary states for coupled Klein-Gordon-Schrödinger equations [J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 1996, 27(4): 455-461.
- [9] KONG Linghua, CHEN Meng, YIN Xiuling. A novel kind of efficient symplectic scheme for Klein-Gordon-Schrödinger equation [J]. Applied Numerical Mathematics, 2019, 135: 481-496.
- [10] HUANG Chunyan, GUO Boling, HUANG Daiwen, et al. Global well-posedness of the fractional Klein-Gordon-Schrödinger system with rough initial data [J]. Science China: Mathematics 2016, 59(7): 1345-1366.
- [11] WANG Junjie, XIAO Aiguo. Conservative fourier spectral method and numerical investigation of space fractional Klein-Gordon-Schrödinger equations [J]. Applied Mathematics and Computation 2019, 350: 348-365.
- [12] QUISPÉL G R W, MCLAREN D I. A new class of energy-preserving numerical integration methods [J]. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2008, 41(4): 045206.
- [13] CELLEDONI E, MCLACHLAN R I, OWREN B, et al. On conjugate B-series and their geometric structure [J]. Journal of Numerical Analysis, Industrial and Applied Mathematics 2010, 5(1/2): 85-94.
- [14] MCLACHLAN R I, QUISPÉL G R W, ROBIDOUX N. Geometric integration using discrete gradients [J]. Philosophical Transactions of the Royal Society B Biological Sciences, 1999, 357(1754): 1021-1045.
- [15] 李昊辰, 孙建强, 骆思宇. 非线性薛定谔方程的平均向量场方法 [J]. 计算数学学报 2013, 35(1): 59-66.
- [16] JIANG Chaolong, SUN Jianqiang, LI Haochen, et al. A fourth-order AVF method for the numerical integration of sine-Gordon equation [J]. Applied Mathematics and Computation 2017, 313: 144-158.
- [17] RAY S S. A new analytical modelling for nonlocal generalized Riesz fractional sine-Gordon equation [J]. Journal of King Saud University: Science 2016, 28(1): 48-54.
- [18] WANG Pengde, HUANG Chengming. Structure-preserving numerical methods for the fractional Schrödinger equation [J]. Applied Numerical Mathematics 2018, 129: 137-158.
- [19] CHEN Jingbo. Symplectic and multisymplectic Fourier pseudospectral discretizations for the Klein-Gordon equation [J]. Letters in Mathematical Physics 2006, 75(3): 293-305.

## The Energy-Preserving Method for the Fractional Klein-Gordon-Schrödinger Equation

ZHANG Lijuan, SUN Jianqiang

( College of Science, Hainan University, Haikou Hainan 570228, China)

**Abstract:** The fractional Klein-Gordon-Schrödinger equation are transformed into the Hamiltonian system with the symplectic structure. The Riesz space-fractional derivation is discretized approximately by the Fourier pseudo-spectral method. The finite dimensional Hamiltonian system of the fractional Klein-Gordon-Schrödinger equation is obtained. The second order average vector field method is applied to solve the finite dimensional Hamiltonian system. The new energy preserving scheme of the fractional Klein-Gordon-Schrödinger equation is obtained. The new scheme is applied to numerically simulate the solitary evolution behaviors of the equation, moreover the energy conservation property of the new scheme is investigated.

**Key words:** average vector field method; fractional Klein-Gordon-Schrödinger equation; Fourier pseudo-spectral method; the scheme of conservation of energy

(责任编辑: 曾剑锋)